

PhD kutatási témajavaslat

BME, Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola

A témavezető neve, tud. fokozata (külső témavezető esetén tanszéki konzulens adatai is):

Pete Gábor, PhD

A PhD téma címe: Csoportok és gráfok geometriai és sztochasztikus tulajdonságai

A kidolgozandó feladat tömör leírása: Viszonylag fiatal terület a sztochasztikus folyamatok vizsgálata csoportokon és általános gráfokon, ahol az alaptér maga is messze nemtriviális, és esetleg éppen a folyamat viselkedése adhat új információt a tér geometriájáról. Itt Benjamini, Lyons, Peres és Schramm voltak az úttörők (1996-2001), ám több jelentős eredményt követően kissé megtorpant a fejlődés, mert a fő sejtések rendkívül nehéznek bizonyultak (pl. a $p_c < p_u$ kettős fázisátmenet léte nemamenábilis tranzitív gráfokon). Új lendületet adott a gráflimeszek elmélete, melynek a hálózatok elmélete felől praktikus, a csoportelmélet, dinamikai rendszerek, kombinatorika felől elméleti mozgatórugói is vannak: sztochasztikus folyamatokat végtelen gráfokon gyakran véges közelítések alapján értünk meg, vagy fordítva, a limesobjektum segíthet a véges problémákban. Itt van négy konkrét probléma ízelítőnek:

Probléma 1. Oded Schramm sejtése, hogy ha a G_n tranzitív végtelen gráfok lokálisan konvergálnak G -hez, és a kritikus perkolációs sűrűségekre $\sup p_c(G_n) < 1$ teljesül, akkor $p_c(G_n)$ konvergál $p_c(G)$ -hez. Igazoljuk ezt bizonyos speciális esetekre, pld síkgráfokra, vagy nilpotens (azaz polinomnövekedésű) csoportokra! Kommutatív csoportokra ismert (Grimmett-Marstrand 1992, Martineau-Tassion 2014).

Probléma 2. Karakterizálja-e a nem-amenábilis csoportokat, hogy létezik olyan Cayley-gráfjuk és olyan k egész szám, hogy a k -szomszédos bootstrap perkoláció folyamat kritikus sűrűsége 0 és 1 között van? Ez ismert a Z^2 csoportra egyfelől (Gravner-Griffeath 1996), és szabad csoportot tartalmazó nemamenábilis csoportokra másfelől (Balogh-Peres-Pete 2006).

Probléma 3. Egy gráfon a bolyongás Green-függvényéből egy új metrika származtatható: $d(x,y) = -\log G(x,y)$. Diszkrét metrikus terekre több dimenziófogalmat is használni szoktak; mit árul el a Green metrika dimenziója a bolyongás viselkedéséről, pld az ún. spektrális dimenzióról? Igazoljuk, hogy amenábilis csoportokon a Green-metrika gömbjei egy Folner-sorozatot alkotnak, sőt általában közel-optimalis izoperimetriájúak!

Probléma 4. Damien Gaboriau sejtése, hogy tetszőleges Cayley gráfon a Free Uniform Spanning Foresthez hozzávehető tetszőlegesen kicsi epsilon sűrűségű invariáns folyamat, hogy összefüggő legyen a kapott véletlen gráf. Más szavakkal, egy csoport első $ell-2$ -Betti száma mindig egyenlő a csoport költsége mínusz 1-gyel. Igazoljuk ezt legalább Kazhdan csoportokra, ahol a FUSF egyenlő a WUSF-fel, és így jól megérthető a struktúrája, hiszen Wilson algoritmusával lehet generálni, körtörölt bolyongásokkal.

A jelentkezővel szemben támasztott elvárások (pl. idegen nyelv ismeret, matematika bizonyos irányainak alaposabb ismerete, stb.): Az angol nyelv ismerete és alapos valószínűségszámítási felkészültség kötelező. Valamekkora csoportelméleti és/vagy gráfelméleti képzettség is szükséges.

A témavezető elérhetősége (külső témavezető esetén tanszéki konzulens adatai is):

Telefon: +36 30 6759824 E-mail: gabor@math.bme.hu

A doktori munka készítésének helye (tanszék megnevezése, külső témavezető esetén külső kutatóhely is): Sztochasztika Tanszék

Nyilatkozat A javasolt témában kutatás feltételei a tanszéken biztosítottak, a téma meghirdetését a tanszékvezető jóváhagyta.