Ph.D., TDK - TÉMÁK

Interpoláció súlyozott terekben

Az interpoláció nagyjából annyit jelent, hogy néhány pontbeli értékéből hogyan lehet rekonstuálni egy függvényt. Gyakorlatilag úgy is fogalmazhatunk, hogy egy jelenséget időnként/helyenként meg tudunk mérni, akkor le tudunk-e vonni valamilyen következtetést az egész esemény lefolyására nézve? Ehhez tudni kell persze, hogy milyennek várjuk a folyamatot, azaz, most már pontosabban: milyen függvénytérben levő függvényt akarunk interpolálni, milyen interpolációs alapfüggvények segítségével, és milyen norma szerinti konvergencia segítségével szeretnénk előállítani a függvényünket.

Például f folytonos függvény a számegyenesen, $X = \{x_{k,n} | \ k = 1, \ldots, n; n = 1, 2, \ldots, \} \subset \mathbf{R}$ pontrendszer, keresünk olyan (algebrai) polinomokat: $p_n(x)$, melyekre

$$f(x_{k,n}) = p_n(x_{k,n}) \qquad k = 1, \ldots, n; n = 1, 2, \ldots,$$

és szeretnénk, ha az így nyert polinomsorozat valahogy konvergálna is a függvényhez. A folytonos függvények terében az egyenletes konvergencia lenne a természetes követelmény, de ez a "végtelenben" nyilvánvalóan lehetetlen. Ezért szoktunk bevezetni a végtelenben "gyorsan" nullához tartó súlyfüggvényeket (w) melyek szerinti súlyozott terekben már értelmes a feladat. Legyen tehát w pozitív, folytonos,

$$\lim_{|x| \longrightarrow \infty} w(x)x^n = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$C_w = \{f \in C(\mathbf{R}) | \lim_{|x| \longrightarrow \infty} f(x)w(x) = 0\}$$

$$\|f\|_w = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)w(x)|$$

Ekkor már a fenti polinomokról megkérdezhetjük, hogy milyen feltételek mellett lesz

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|f - p_n\|_w = 0.$$

További lehetőség, hogy néhány ”rossz” mérési pontot nem veszünk figyelembe, például' ahol a függvény biztosan ”végtelen akar lenni”. Ez azt jelenti, hogy a súlyfüggvénynek belső gyökei vannak. Ilyen esetekben lehet vizsgálni a különböző interpolációs eljárások konvergenciáját.