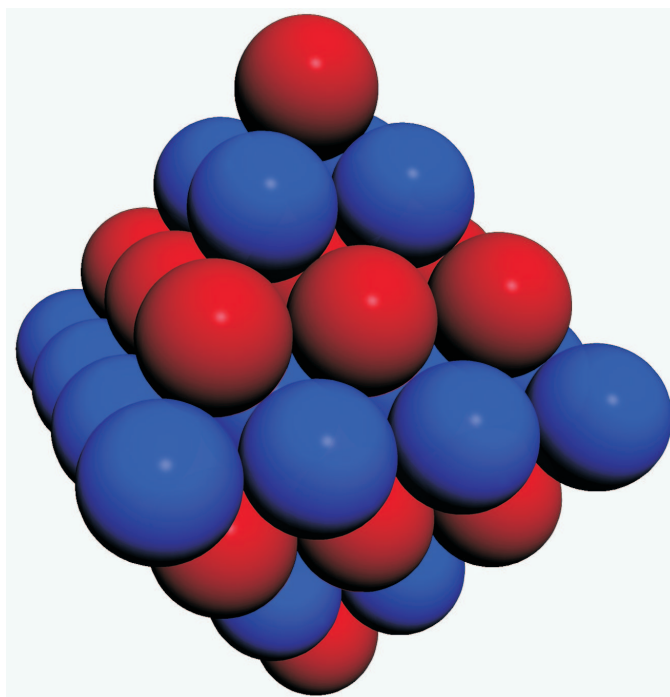


**Wintsche Gergely**

**Véges gömbelhelyezések és  
fedések**



témavezető: ifj. Böröczky Károly  
2002

# Tartalomjegyzék

|  |    |
|--|----|
| Köszönetnyilvánítás .....                          | 3  |
| Jelölések .....                                    | 4  |
| Bevezetés .....                                    | 5  |
| 1. fejezet   |    |
| Az oktaéder .....                                  | 9  |
| 2. fejezet   |    |
| A $d$ -dimenziós keresztpolitóp .....              | 17 |
| 3. fejezet   |    |
| Lokális stabilitás .....                           | 24 |
| 4. fejezet   |    |
| A $d$ -dimenziós keresztpolitóp fedése .....       | 27 |
| 5. fejezet   |    |
| A $d$ -dimenziós gömb fedése $d + 3$ gömbbel ..... | 34 |
| 6. fejezet   |    |
| A $d$ -dimenziós gömb fedésének sűrűsége .....     | 37 |
| Hivatkozások .....                                 | 40 |

## **Köszönetnyilvánítás**

A dolgozat elkészüléséhez sok sok segítséget kaptam témavezetőmtől, ifj. Böröczky Károlytól, aki képes volt türelmesen magyarázni olyan dolgokat, melyek számára világosak voltak. Így volt képes kikerekedni ez a dolgozat. Ezen kívül segített fő témám szigorlati felkészülésében is, és elég sok időt szánt arra, hogy jobb rálátásom legyen egyes problémákra.

Köszönöm.

## Jelölések

|                                |  |
|--------------------------------|--|
| $d$                            | a tér dimenziója   |
| $O^d$                          | a $d$ dimenziós keresztpolitóp                                 |
| $n$                            | az elhelyezni kívánt gömbök–pontok száma                       |
| $v_i$                          | a koordinátarendszer $i$ -dik egységvektora, $i = 1, \dots, d$ |
| $v_{i+d}$                      | $-v_i$ , $i = 1, \dots, d$                                     |
| $e_i$                          | $O$ , illetve $O^d$ éle  |
| $x_i$                          | az $i$ -dik elhelyezni kívánt pont, $i = 1, \dots, n$          |
| $d_n$                          | az $n$ darab pont között fellépő minimális távolság maximuma   |
| $\rho_n$                       | $n$ darab kongruens gömb sűrűsége az adott tartományban        |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | skalárszorzat  |
| $o$                            | origó  |
| $R_k^d$                        | az $O^d$ -t fedő $k$ darab kongruens gömb sugarának minimuma   |
| $S^d$                          | a $d$ dimenziós szférikus gömb                                 |
| $B(r, x)$                      | az $r$ sugarú $x$ középpontú szférikus gömb                    |

## Bevezetés

A térbeli korlátos zárt tartományokban való gömbelhelyezések közül az első eredmények J. Schaer nevéhez fűződnek [14], [15], [16], [17], [18], aki meghatározta a legsűrűbb elhelyezéseket, ha a korlátos tartomány kocka, és a gömbök száma  $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$  (biz nélkül),  $8, 9, 10$ . Ezeknek a bizonyításoknak az ötlete a következő lemmán alapszik:

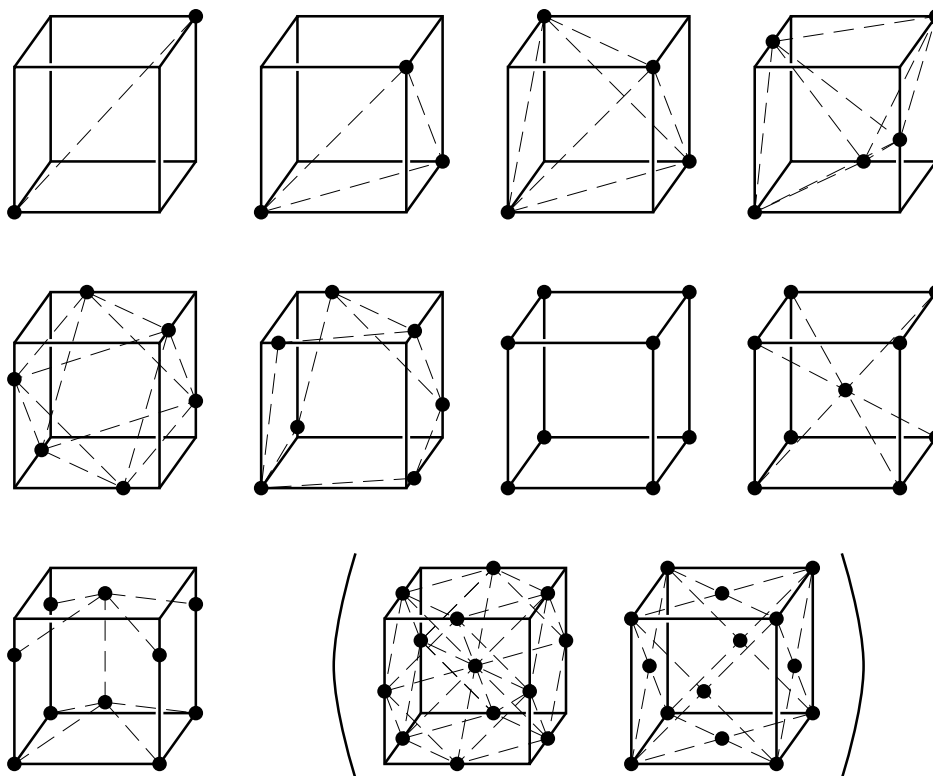
**Lemma:** *(J. Schaer)  $n$  pont bármely "legjobb" konfigurációja esetén, a  $C$  kocka bármely lapja tartalmaz legalább egy pontot az  $n$  közül. Ez az állítás nem csak  $C$  kocka, de tetszőleges  $C$  paralelotóp esetén is érvényes.*

Legyen a  $C$  kocka egység élhosszúságú, és  $x_1, \dots, x_n$  optimális helyzetben lévő pontok, azaz  $\min_{1 \leq i < j \leq n} d(x_i, x_j)$  legyen maximális. Jelölje  $n$  pont esetén ezt a maximális távolságot  $d_n$ .

Az  $n = 2$  esete triviális, Az  $n = 3, n = 4$  eset szoros rokonságot mutat, csak úgy mint az  $n = 8, n = 9$  eset is. Az  $n = 5, n = 6$ , illetve az  $n = 10$  esetekben a kocka ötletes feldarabolása vezet eredményre. Ezek alapján a következő értékeket kapjuk  $d_n$ -re.

|       |            |            |            |                      |                       |                    |   |                      |               |                      |                      |
|-------|------------|------------|------------|----------------------|-----------------------|--------------------|---|----------------------|---------------|----------------------|----------------------|
| n     | 2          | 3          | 4          | 5                    | 6                     | (7)                | 8 | 9                    | 10            | 13                   | 14                   |
| $d_n$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | $\frac{\sqrt{5}}{2}$ | $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ | $(\approx 1,0009)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

Az 1.ábra mutatja a lehetséges optimális konfigurációkat.



1. ábra

További eredményeket, illetve összefoglalást tartalmaz Bezdek [1] cikke, mely kicsit más jellegű, analitikus eszközöket is használó bizonyítást ad néhány már korábban bizonyított esetre. Bezdek [2] ezen kívül két rácyszerű elhelyezéssel foglalkozik,  $n = 13, 14$  pont esetére, melyeknek azonban csak lokálisan optimális tulajdonságát látja be. Mivel ezek az elhelyezések részei a lapcentrált kockarácsnak, – mely egyenlő sugarú gömbök esetén a sejtett legsűrűbb elhelyezést adja –, ezért nagyon valószínű, hogy ezen elhelyezések nem csak lokális optimumot szolgáltatnak.

Ezentúl W. Kuperberg – részben publikálatlan – eredményeit ismertetem  $n$  darab maximális sugarú kongruens gömb elhelyezéséről  $d$ -dimenziós kockában. Amelyik eredmény más nevéhez kötődik, azt külön jelzem. Megoldotta

- (a)  $n = 6, 7, 8, 16, 17$  gömb elhelyezését ha  $d = 4$ ;
- (b)  $n = 16$  gömb elhelyezését ha  $d = 5$ ;
- (c) ha létezik  $n$ -ed rendű Hadamard mátrix és  $n - 1 | d$ ; (S. Ryshkov [13] és W. Kuperberg (nem publikált))
- (d) ha létezik  $2n$ -ed rendű Hadamard mátrix, és  $2n - 2 | d$ ;
- (e) ha létezik  $d$ -ed rendű Hadamard mátrix, akkor  $n = d + 2, \dots, 2d$  esetén a

gömbök sugara állandó  $n$  mind a  $d-1$  lehetséges értékére, de  $n = d$  esetén az elhelyezett gömbök sugara nagyobb,  $n = 2d + 1$  esetén kisebb. Más szavakkal, ha a  $d$  dimenziós kockába  $d + 2$  kongruens gömböt tehetünk, akkor  $2d$  darab is elhelyezhető ugyanazzal a sugárral. (Az (a) pontban felsorolt  $n = 6, 7, 8, d = 4$  ebbe az esetbe tartozik.)

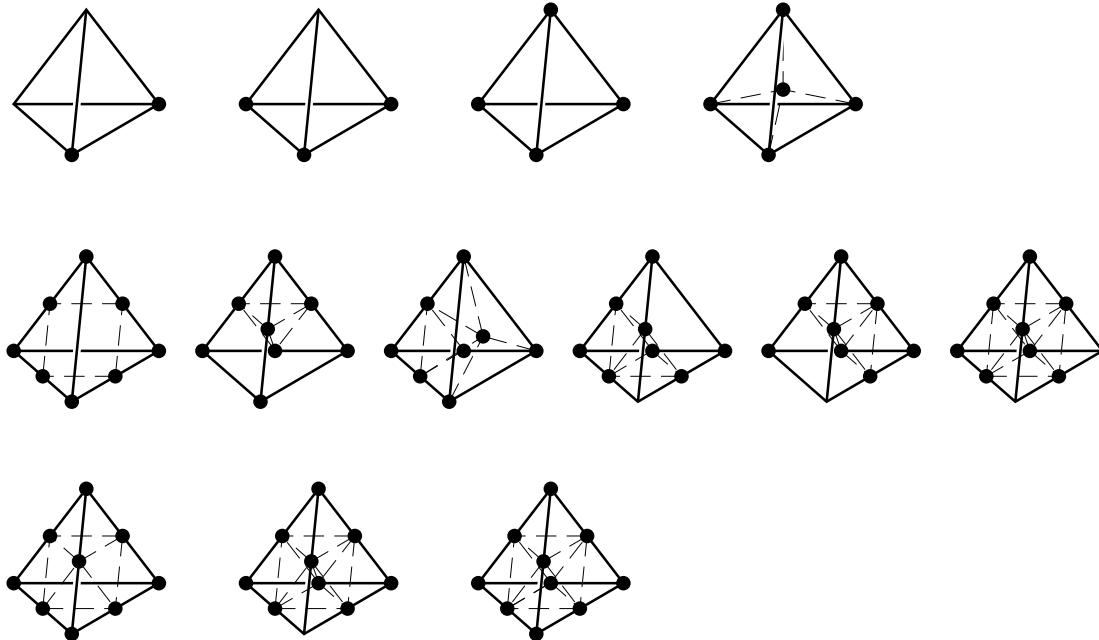
A kocka fedéseinek kérdése egy kicsit nehezebb feladatnak látszik. A  $d$ -dimenziós kocka  $n$  darab minimális sugarú gömbbel történő fedésére vonatkozóan ismertek az alábbi, ugyancsak jórészt W. Kuperbergtől származó publikálatlan eredmények.

- (a)  $n = 2$ ; tetszőleges  $d$  esetén (A  $d = 3$  esetet W. Kuperberg, minden  $d$ -re Dolbilin és Sharygin (nem publikált) oldotta meg.);
- (b)  $n = 3, 4, 8$  esetén ha  $d = 3$ ;
- (c)  $n = 4, d = 4$ .

Szintén az [1] cikkben található meg a tetraéderre vonatkozó ismert optimális elhelyezések összefoglalása is. Egység oldalhosszúságú tetraéder esetén az ehhez tartozó maximális  $d_n$  értékeket tartalmazó táblázat a következő.

| n     | 2 | 3 | 4 | 5                    | 8             | 9             | 10            |
|-------|---|---|---|----------------------|---------------|---------------|---------------|
| $d_n$ | 1 | 1 | 1 | $\frac{\sqrt{6}}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

A 2. ábra mutatja a lehetséges optimális konfigurációkat.



2. ábra

---

Ebben a dolgozatban elsősorban  $n$  darab kongruens gömb  $d$ -dimenziós ( $d \geq 3$ ) keresztpolitópban való elhelyezésével foglalkozunk, illetve a keresztpolitóp  $n$  darab kongruens gömbbel történő fedésével. Az elhelyezéseket az 1–3 fejezet, a fedéseket a 4. fejezet tárgyalja. Belátjuk például, hogy ha 4 darab  $r$  sugarú gömb elhelyezhető a  $d$ -dimenziós keresztpolitópban, akkor  $2d$  darab  $r$  sugarú gömb is elhelyezhető benne (lásd 2. fejezet, 2. Tétel). Az 5. fejezet az  $S^d$  szférikus tér kongruens gömbökkel történő fedésével, a 6. fejezet pedig  $S^d$  fedéseinek sűrűségével foglalkozik.



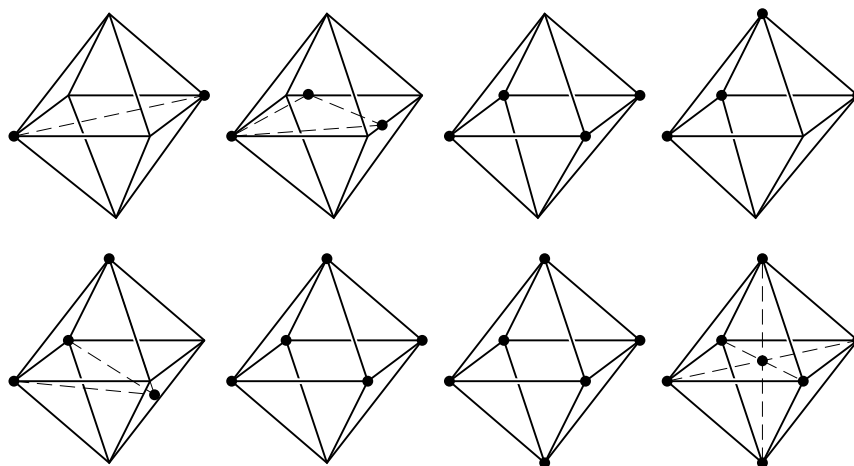
## 1. fejezet

### Az oktaéder

Az oktaéder esetének tárgyalása először Golser [9] cikkében található meg. Később megjelenik Bezdek [1] cikkében is. Tőlük függetlenül Fábián Ildikó és én együtt bizonyítottuk az optimális gömb- illetve pontelhelyezéseket  $n = 3, 6$  esetben. Ennek átdolgozott és témavezetőmmel az  $n = 4, 5, 7$  esettel kiegészített változatát ebben a fejezetben összefoglalom, mert az alkalmazott bizonyítások némely esetben különböznek az [1]-ben található néhol analitikus gondolatmenettől.

Legyen  $O$  a  $\sqrt{2}$  oldalú szabályos oktaéder, és jelölje  $d_n$  az elhelyezett pontpárok minimális távolságának maximumát,  $\rho_n$  pedig a gömbelhelyezések oktaéderen belüli sűrűségét. Az eredmények a következők.

| $n$ | $d_n$         | $r_n$                    | $\rho_n$                            | $\rho_n \approx$ |
|-----|---------------|--------------------------|-------------------------------------|------------------|
| 2   | 2             | $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$   | $\pi \frac{3\sqrt{3}-5}{2}$         | 0,3081           |
| 3   | $2\sqrt{3}-2$ | $\frac{3\sqrt{3}-1}{13}$ | $3\pi \frac{(90\sqrt{3}-82)}{13^3}$ | 0,3170           |
| 4   | $\sqrt{2}$    | $\sqrt{3}-\sqrt{2}$      | $4\pi(9\sqrt{3}-11\sqrt{2})$        | 0,4035           |
| 5   | $\sqrt{2}$    | $\sqrt{3}-\sqrt{2}$      | $5\pi(9\sqrt{3}-11\sqrt{2})$        | 0,5044           |
| 6   | $\sqrt{2}$    | $\sqrt{3}-\sqrt{2}$      | $6\pi(9\sqrt{3}-11\sqrt{2})$        | 0,6053           |
| 7   | 1             | $2-\sqrt{3}$             | $7\pi(26-15\sqrt{3})$               | 0,4231           |

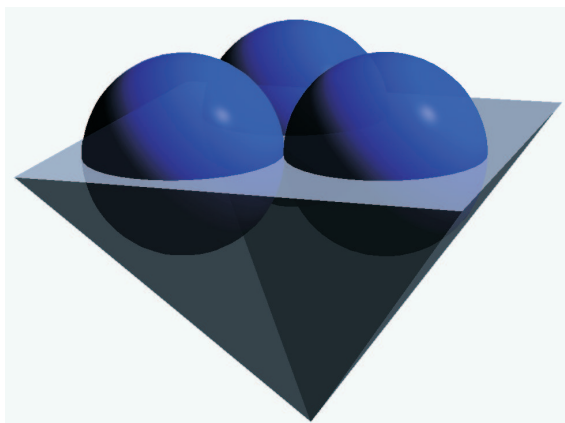


3. ábra

Később ezen eredmények általánosítására is sor kerül, azaz meghatározzuk az optimális gömbelhelyezést a  $d$ -dimenziós keresztpolitópban is, ha  $n \leq 2d + 1$ .

A feladat  $n = 1$  vagy  $n = 2$  esetén nem jelent nehézséget. A további esetek tárgyalásához praktikus az oktaédert egy koordinátarendszerben rögzíteni, és a feladatot a vele ekvivalens pontelhelyezésre átfogalmazni. Legyenek az oktaéder csúcspontjai a koordinátatengelyek  $-1$  és  $1$  pontjai. A feladattal ekvivalens, hogyan helyezzünk el  $n$  pontot a zárt oktaéderben, hogy a pontpárok között keletkező távolságok minimuma maximális legyen. Ezek után egy egyszerű arányosság adja meg a kívánt maximális gömbsugarakat. Ha az optimális pontrendszerben a minimális távolság fele  $x$ , akkor a  $\sqrt{2}$  oldalú oktaéderbe írható gömbök sugara  $r = \frac{x}{\sqrt{3x+1}}$ .  $n = 2$  esetén  $x = 1$ , tehát  $r_2 = \frac{1}{\sqrt{3+1}}$ , a sűrűség pedig  $\rho_2 = \pi \frac{3\sqrt{3}-5}{2} \approx 0,3081$ .

**1. Tétel:**  $n = 3$  pont esetén az optimális pontrendszer olyan szabályos háromszöget határoz meg, melynek egyik csúcsa az oktaéder egyik csúcsa, másik két csúcsa pedig az oktaédernek azon a két élén van, melyek nem illeszkednek az első csúcsra, de azzal és az origóval egy síkba esnek.  $d_3 = 2\sqrt{3} - 2$ ,  $r_3 = \frac{3\sqrt{3}-1}{13}$ ,  $\rho_3 = 3\pi \frac{(90\sqrt{3}-82)}{13^3} \approx 0,3170$ .



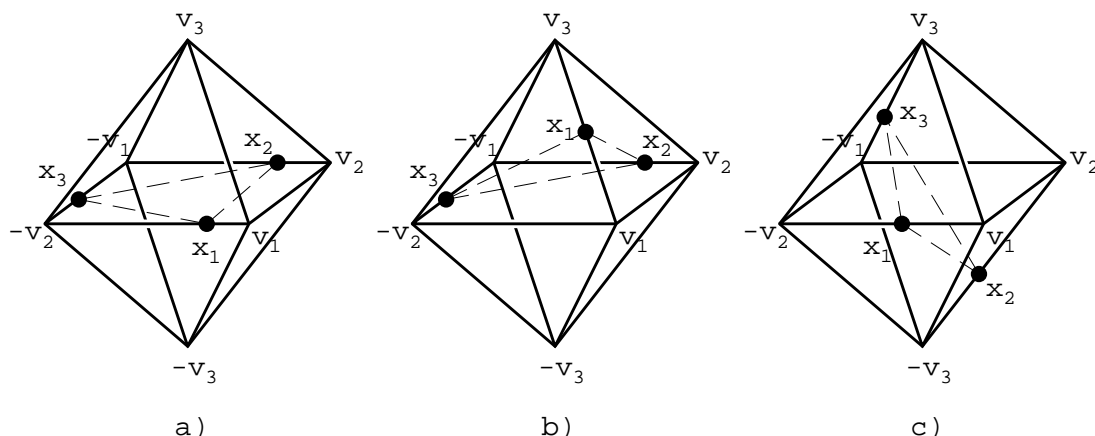
4. ábra

**Bizonyítás:** Jelöljük az optimális háromszöget  $T$ -vel, és tegyük fel, hogy  $d_3 > 2\sqrt{3} - 2$ . A három pont meghatároz egy síkot, és feltehetjük hogy a pontok az oktaéder határán vannak. Ellenkező esetben egyszerű nagyítással növelhető lenne a távolság.

Állítjuk, hogy  $T$ -nek nincs csúcsa lapbelső pontban. Ha van, akkor legyen ez a  $C$  pont, amely az oktaéder  $F$  lapjának belsejében fekszik. Legyen  $S$  az a sík, amely merőleges  $T$  síkjára és illeszkedik  $T$ -nek  $C$ -beli belső szögfelezőjére.  $l := S \cap F$ . Ekkor  $C$  az  $l$  egyenesen legalább az egyik irányban eltolható, hogy  $T$  két oldala növekedjen.  $T$ -nek tehát mindhárom csúcsa az oktaéder élein helyezkedik el.

Triviális, hogy egy háromszöglap két élén nem helyezkedhet el  $T$  egy-egy pontja. Legyenek  $T$  csúcsai  $x_1, x_2, x_3$ ,  $O$  csúcsai pedig  $\pm v_1, \pm v_2, \pm v_3$ . Tegyük fel, hogy  $T$ -nek nincs csúcsa az oktaéder egyik csúcsában sem. Ekkor három eset lehetséges.

- a) Egy négyzetet alkotó négy él közül hármon van egy-egy pont.
- b) Két derékszögben csatlakozó élen van egy-egy pont, a harmadik pedig az ezen két él által meghatározott síkra merőlegesen elhelyezkedő négyzetmetszet egyik lehetséges oldalán van.
- c) Három páronként kitérő élen vannak a pontok. (Lásd 5. ábra.)



5. ábra

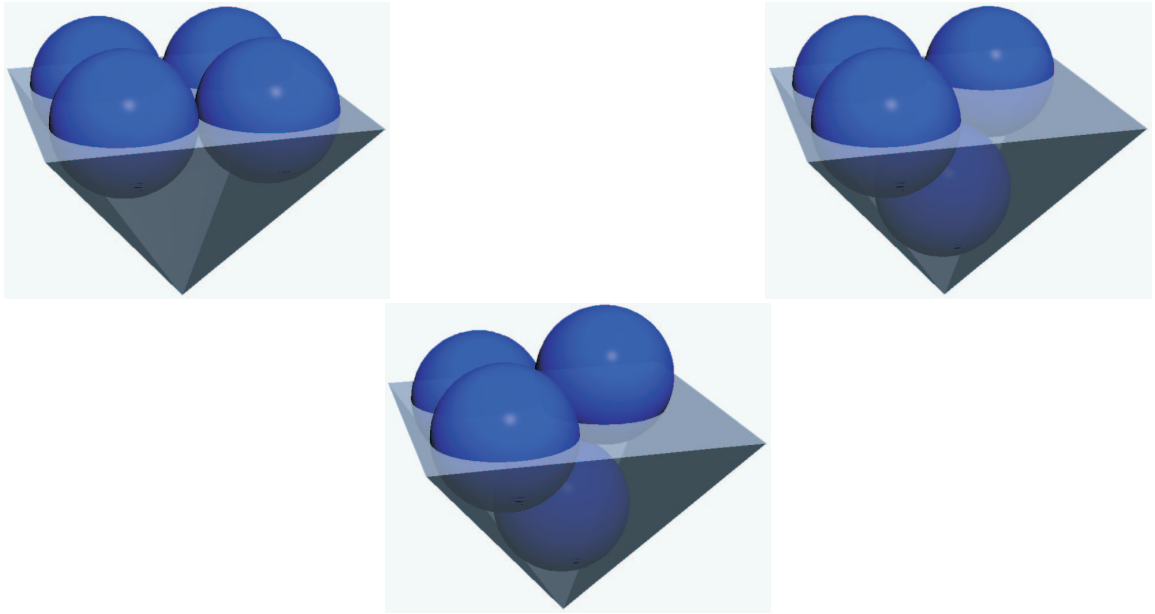
Az a) esetben feltehetjük, hogy az ábrának megfelelően  $x_1 \in (v_1, -v_2)$ ,  $x_2 \in (-v_1, v_2)$ ,  $x_3 \in (-v_1, -v_2)$  és  $d(x_1, v_1) \leq d(x_2, v_2)$ . Ekkor  $x_1$ -et  $v_1$  felé  $2\varepsilon$ -nal,  $x_2$ -t  $v_2$  felé  $\varepsilon$ -nal ( $2\varepsilon \leq d(x_1, v_1)$ ) eltolva olyan  $T'$  háromszöghöz jutunk, melynek oldalai nagyobbak  $T$  oldalainál, ami ellentmondás.

A b) esetben feltehetjük, hogy az ábrának megfelelően  $x_1 \in (v_1, v_3)$ ,  $x_2 \in (-v_1, v_2)$ ,  $x_3 \in (-v_1, -v_2)$ , ekkor azonban  $d(x_1, x_3) < d(v_1, x_3)$  és  $d(x_1, x_2) < d(v_1, x_2)$ , azaz  $T$  nem lehet optimális.

A c) esetben feltehetjük, hogy az ábrának megfelelően  $x_1 \in (v_1, -v_2)$ ,  $x_2 \in (v_1, -v_3)$ ,  $x_3 \in (-v_1, v_3)$ . A szimmetria miatt az is feltehető, hogy  $x_1 \in (v_1, \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2)$ . Legyen  $P = \frac{3}{4}v_2 - \frac{1}{4}v_3$  és  $Q = -\frac{1}{4}v_1 + \frac{3}{4}v_3$ . Ekkor  $x_2 \in (v_2, P)$  és  $x_3 \in (-v_1, Q)$ , azonban ezen szakaszok tetszőleges pontjainak távolsága kisebb mint  $2\sqrt{3} - 2$ .

Ebből következik hogy  $T$ -nek van csúcsa  $O$  valamely csúcsában, mégpedig pontosan egy. Ekkor a másik két ponttal együtt egy olyan síkot határoznak meg, mely egy maximális négyzetben metszi az oktaédert, amiben a szabályos háromszög adja az optimális elhelyezést. ■

**2. Tétel:**  $n = 4, 5, 6$  pont esetén a pontok az oktaéder csúcsaiban helyezkednek el, illetve  $n = 4$  esetén lehetséges, hogy három pont az oktaéder egy lapjának három csúcsában, a negyedik pedig a szemköztes lap középpontjában helyezkedik el.  $r_4 = r_5 = r_6 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ,  $\rho_4 = 4\pi(9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}) \approx 0,4035$ ,  $\rho_5 = 5\pi(9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}) \approx 0,5044$ ,  $\rho_6 = 6\pi(9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}) \approx 0,6053$ .



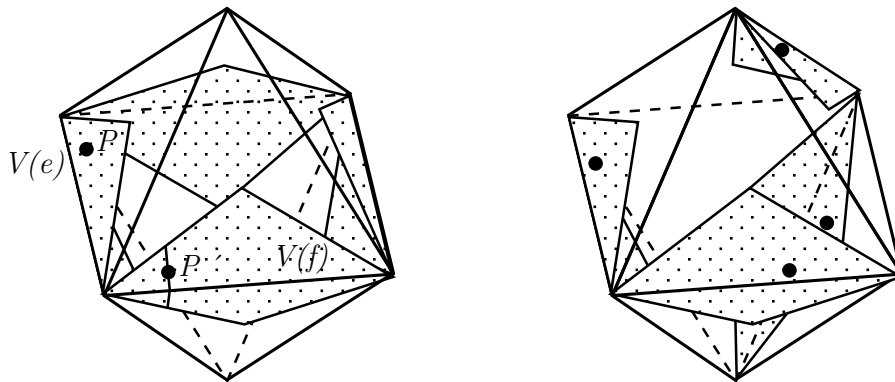
6. ábra



7. ábra

**Bizonyítás:** Vizsgáljuk meg először az  $n = 4$  esetet. A négy pont az oktaéder felszínén helyezkedik el, hiszen 4 pont nyilván konvex alakzatot határoz meg, és egyszerű nagyítással a pontok az oktaéder határára vihetők. Osszuk fel az oktaéder határát 4 egybevágó  $P$  részre a következő módon: legyen  $e$  az oktaéder egy éle, és  $V(e)$  azon pontok halmaza az oktaéder határán, melyek minden más éltől távolabb vannak mint  $e$ -től. Egy  $P$  tartomány álljon az egy laphoz tartozó 3 él alkotta  $V(e)$ -kből, és a tartományok határaiból. Könnyen kiszámolható, hogy  $p, q \in P$  esetén  $d(p, q) \leq \sqrt{2}$ . Ebből következik, hogy ha  $\Pi$  egy optimális pontrendszer és bármely  $p, q \in \Pi$  esetén  $d(p, q) > \sqrt{2}$ , akkor  $\Pi$  legfeljebb 4 pontot tartalmazhat. Vizsgáljuk tovább a pontok elhelyezkedését. Ha az  $e$  és  $f$  élek egy lapon vannak, akkor  $V(e)$

és  $V(f)$  nem tartalmazhat egyszerre pontot. Könnyen ellenőrizhető, hogy négy él csak kétféleképpen helyezkedhet el, ha azt akarjuk hogy ne legyen köztük kettő egy lapon.



8. ábra

1. Ha van két párhuzamos él, akkor egy négyzetet határoznak meg.
2. Ha nincsen, akkor két-két kitérő élpárt alkotnak.

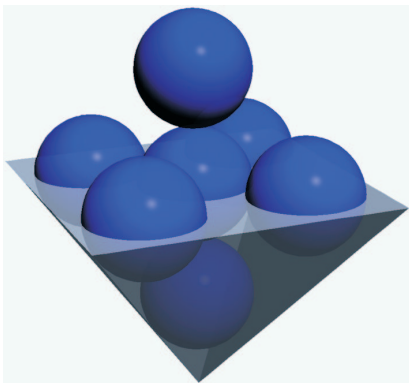
Nézzük az első esetet. Vegyünk két egymáshoz csatlakozó  $e$  és  $f$  élt, a megfelelő  $V(e)$  és  $V(f)$  tartományokkal. Legyen az  $e$  él két végpontja  $A$  és  $B$ , az  $f$  él két végpontja  $B$  és  $C$ . Legyen  $p \in V(e)$  a  $\Pi$  pontrendszer egy pontja. Legyen  $p' \in V(f)$  a  $p$  pontnak  $O$  körüli  $e, f$ -re merőleges tengely körüli  $90^\circ$ -os elforgatottja, és vegyük az  $p'$ -n átmenő,  $f$ -re merőleges síknak és  $V(f)$ -nek a  $\phi$  metszészvonalát. Ha  $q \in V(f)$   $B$ -hez közelebb van mint  $\phi$  metszészvonal, akkor  $d(p, q) < \sqrt{2}$ . Az elforgatást háromszor megismételve körbe érünk, ami ellentmondásra vezet. A  $V$  tartományok esetén csak az oktaéder csúcsaira nézve nem működik a fenti eljárás, azok pedig éppen  $\sqrt{2}$  távolságot határoznak meg.

A másik esetben legyenek a csúcsok rendre  $A, B, C$  illetve  $D, E, F$  a két-két kitérő élpáron. Ha az  $A, B, C$ -hez tartozó  $V$ -k 3 pontot tartalmaznak, akkor ha bármely távolság  $\geq \sqrt{2}$ , akkor azok csak az  $A, B, C$  pontokban helyezkedhetnek el, melyhez a negyedik pontot  $D, E, F$  közül szabadon megválaszthatjuk. 3 pont az  $A, B, C$ -hez tartozó  $V$ -k belsejében nyilván nem helyezkedhet el. Ha az  $A, B, C$ -hez tartozó  $V$ -k és a  $D, E, F$ -hez tartozó  $V$ -k két-két pontot tartalmaznak amelyek egyike sem csúcspont, akkor nem lehet mindkettő közelebb  $B$ -hez, mint  $A$ -hoz vagy  $C$ -hez. Vegyük a  $B$ -től távolabbi pontot, legyen ez  $p$ . Hasonlóan vegyük a  $D, E, F$ -hez tartozó  $V$ -ken a  $q$  pontot, de ekkor  $d(p, q) < \sqrt{2}$ . Azaz legalább az egyik pont valamely csúcsban helyezkedik el. Ekkor lehetséges, hogy a többi pont is egy-egy csúcsban van, avagy még két pont egy ugyanarra a lapra illeszkedő csúcsban

helyezkedik el, és a negyedik pont a szemköztes lap középpontja.

Ezek alapján a minimális távolság  $n = 5$  és  $n = 6$  esetén is  $\sqrt{2}$ , amiből a sűrűségekre a tételben adott értékek adódnak.  $\rho_4 = \frac{4\pi}{11\sqrt{2}+\sqrt{3}} \approx 0,4035$ ,  $\rho_5 = \frac{5\pi}{11\sqrt{2}+\sqrt{3}} \approx 0,5044$ ,  $\rho_6 = \frac{6\pi}{11\sqrt{2}+\sqrt{3}} \approx 0,6053$ . ■

**3. Tétel:**  $n = 7$  pont esetén az optimális elrendezés az oktaéder 6 csúcsa és  $O$  középpontja,  $r_7 \approx 0,1895$ .



9. ábra

**Bizonyítás:** Osszuk fel az oktaédert 6 részre a csúcsoknak megfelelő Dirichlet-Voronoi cellák szerint. A  $v_i$  csúcshoz tartozzon a  $C_i$  zárt cella. Ha  $p, q \in C_i$ , akkor  $d(p, q) \leq 1$ . Rendeljünk súlyokat az oktaéder egyes pontjaihoz, majd számoljuk meg kétféleképpen egy optimális pontrendszer súlyát. Egy  $p$  pont súlya az  $i$ -dik cellára vonatkoztatva legyen  $w_i(p) := \frac{1}{|\{C_i | p \in C_i\}|}$  ha  $p \in C_i$ , és  $w_i(p) := 0$  ha  $p \notin C_i$ . Így ha  $p$  az oktaéder egy pontja, akkor  $\sum_{i=1}^6 w_i(p) = 1$ . Az oldalfelezőpontok súlya  $1/2$ , a lapközeppontok súlya  $1/3$  és az  $O$  középpont súlya  $1/6$  lesz. Ha  $p, q \in \Pi$  esetén  $d(p, q) \geq 1$ , akkor  $\sum_{p \in \Pi} w_i(p) \leq \frac{7}{6} \forall i$ -re.

$$|\Pi| = \sum_{p \in \Pi} \sum_{i=1}^6 w_i(p) = \sum_{i=1}^6 \sum_{p \in \Pi} w_i(p) \leq \sum_{i=1}^6 \frac{7}{6} = 7$$

Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha a súly minden egyes cellára  $\frac{7}{6}$ , azaz az  $O$  középpontban és a csúcsokban vannak a  $\Pi$  pontjai. Tehát  $r_7 = 1$ ,  $\rho_7 = \frac{7\pi}{15\sqrt{3}+26} \approx 0,4231$ . ■

**Megjegyzés:** Először úgy tűnhet, hogy nyolc pont optimális elrendezése egy kockát határoz meg. Ennél azonban kicsit jobb, ha a 6 csúcsba, és két párhuzamos három-

szöglap középpontjait összekötő szakaszra teszünk még két pontot. Sajnos azonban ennél még jobb, ha egy kicsit szabálytalanul, az alábbi elrendezést választjuk, mintegy összefésülve a 3 és 4 pontra kapott eredményeket. A pontok koordinátái.  $A_1(0; 0; 1)$ ,  $A_2(\alpha; 0; 1 - \alpha)$ ,  $A_3(0; \alpha; 1 - \alpha)$ ,  $A_4(-\alpha; 0; 1 - \alpha)$ ,  $A_5(0; -\alpha; 1 - \alpha)$ ,  $A_6(-0,566; 0; -0,434)$ ,  $A_7(0,18; -0,42; -0,4)$ ,  $A_8(0,18; 0,42; -0,4)$ , ahol  $\alpha = 0,594$ . Ekkor  $\min(d(A_i, A_j)) \geq 0,84$ , ami nagyobb egy kicsit, mint a korábbi "szabályos" elrendezések. Ezt az elrendezést is lehetne javítani néhányadik tizedesjegyében, de egyelőre nyitott kérdés, hogy mi az optimális konfiguráció. A rendszer viszonylagos szabálytalansága arra enged következtetni, hogy nem érdemes "szimmetrikus" elrendezést várni.

**Sejtés:**  $n = 19$  pont esetén az optimális pontrendszer az oktaéder csúcsaiból, oldalfelező pontjaiból és középpontjából áll. Általánosabban,  $n = \frac{k(k+1)(2k+1)}{3} + (k+1)^2$  esetén az optimális pontrendszer része egy lapcentrált kockarácsnak, melynek pontjai az oktaéder egy élére  $(k+1)$  pontban illeszkednek. Erre a sejtésre a lokális stabilitással foglalkozó fejezetben visszatérek.



## 2. fejezet

### A $d$ -dimenziós keresztpolitóp

Legyen  $v_1, \dots, v_d$  a  $d$ -dimenziós tér egy ortonormált bázisa, és jelölje  $O^d$  a  $d$ -dimenziós szabályos keresztpolitópot, melynek csúcsai  $\pm v_1, \dots, \pm v_d$ , és így  $O^d$  éleinek hossza  $\sqrt{2}$ .

Ebben a fejezetben meghatározzuk  $n$  darab  $d$ -dimenziós gömb maximális sugarát,  $r(n, d)$ -t az  $O^d$  tartományon belül, ha  $n \leq 2d + 1$ .

Ezen feladat természetesen ekvivalens  $O^d$ -beli  $n$  pont közötti minimális távolságok maximumának meghatározásával. Jelöljük ezt a távolságot  $\varphi(n, d)$ -vel, ekkor

$$r(n, d) = \frac{\varphi(n, d)}{\varphi(n, d)\sqrt{d} + 2}.$$

A továbbiakban csak az  $O^d$ -beli pontelhelyezésekkel foglalkozunk, mert a tételek és bizonyítások egyszerűbben és érthetőbben megfogalmazhatók, mint a gömbelhelyezések kapcsán.

A síkbeli esetben igen egyszerű megmutatni, hogy  $\varphi(3, 2) = 2(\sqrt{3} - 1)$ , ahol az optimális konfiguráció egyik pontja  $O^2$  csúcsa, és a három pont egy szabályos háromszöget határoz meg. Négy pont esetén  $O^2$  csúcsai alkotnak optimális konfigurációt, azaz  $\varphi(4, 2) = \sqrt{2}$ . Végezetül pedig  $O^2$  csúcsai és középpontja optimális elrendezés öt pont esetére, azaz  $\varphi(5, 2) = 1$ .

Első hallásra talán meglepő lehet, de ezek az eredmények adódnak a  $d$ -dimenziós ( $d \geq 3$ ) esetben is, azaz

$$\varphi(n, d) = \begin{cases} 2(\sqrt{3} - 1) & \text{ha } n = 3 \\ \sqrt{2} & \text{ha } 4 \leq n \leq 2d \\ 1 & \text{ha } n = 2d + 1. \end{cases}$$

**1. Tétel:** *Legyen  $d \geq 3$ , és legyen a három pont közötti minimális távolság maximális  $O^d$ -ben. Ekkor a három pont egyike  $O^d$  egyik csúcsa, mondjuk  $v_i$ , és a három pont olyan szabályos háromszöget határoz meg, mely a  $\pm v_i, \pm v_j$ ,  $v_j \neq v_i$  pontok által adott négyzetben van.*

Ha az  $O^d$ -ben elhelyezett pontok  $n$  száma 4 és  $2d$  között van, akkor  $O^d$  csúcsai adják a legjobb elhelyezést.

**2. Tétel:** Legyen  $d \geq 3$ , és legyen az  $n$  pont közötti minimális távolság maximális  $O^d$ -ben, ahol  $4 \leq n \leq 2d$ . Ekkor vagy minden pont  $O^d$  csúcsa, vagy  $n = 4$  esetében három pont egy kétdimenziós lap három csúcsa, a negyedik pedig a szemköztes lap középpontja.

Ebből a tételből egy érdekes állítás következik, nevezetesen:

*Ha a  $d$ -dimenziós szabályos keresztpolitóp négy kongruens gömböt tartalmaz, akkor összesen akár  $2d$  velük kongruens gömb is belepakolható  $O^d$ -be.*

Végezetül pontosan egy optimális konfiguráció létezik, ha  $n = 2d + 1$ :

**3. Tétel:** Legyen  $d \geq 3$ , és legyen az  $n$  pont közötti minimális távolság maximális  $O^d$ -ben, ahol  $n = 2d + 1$ . Ekkor az egyik pont  $O^d$  középpontja, a többi pedig  $O^d$  csúcsa.

A  $d = 3$  esetet már korábban tárgyaltuk. Az itt következő bizonyítások ebben az esetben is működnek. A bizonyításainkban felhasznált ötletek némelyike megtalálható Bezdek [1] és Golser [9] cikkében is.

A jelölések egyszerűsítése érdekében legyen

$$v_{i+d} = -v_i, \quad i = 1, \dots, d,$$

a skalárszorzat legyen  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , és az origót jelölje  $o$ .

## 2. Három pont esete

**1. Tétel bizonyítása:** Legyen  $x_1, x_2, x_3 \in O^d$  optimális helyzetben, azaz a páronkénti távolságok minimumának maximuma legyen legalább  $2(\sqrt{3} - 1)$ . Ekkor az  $x_1, x_2, x_3$  pontok közül legfeljebb egy lehet  $O^d$  csúcsa, hiszen két szomszédos csúcs túl közel kerülne egymáshoz, két szemköztes csúcs köré húzott  $\sqrt{2}$  sugarú gömb pedig lefedí az egész keresztpolitópot.

Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel, hogy az  $x_1, x_2, x_3$  pontok által meghatározott háromszög nem szabályos, és lássuk hogyan vezet ezen feltétel el-  
lentmondásra. Tegyük fel hogy  $d(x_1, x_2) > d(x_1, x_3)$  és  $x_1$  nem csúcsa  $O^d$ -nek. Ekkor  $x_1$  elmozgatható valamely  $x'_1 \in O^d$  helyzetbe úgy, hogy mindkét távolság, azaz  $d(x'_1, x_2)$  és  $d(x'_1, x_3)$  nagyobb legyen mint  $d(x_1, x_3)$ . Biztos, hogy  $x_2$  vagy  $x_3$  nem csúcs, és ez a pont elmozdítható olyan helyzetbe, hogy a keletkezett három

pont páronkénti távolságainak minimuma nagyobb mint  $\varphi(3, d)$ . Ellentmondásra jutottunk, azaz a kiindulási  $x_1, x_2, x_3$  háromszög szabályos volt.

Következő lépésként tegyük fel, hogy  $x_1$  az  $O^d$  egy  $k$ -dimenziós ( $k \geq 2$ ) lapjának relatív belsejében fekszik. Belátjuk hogy ezen feltevés is ellentmondásra vezet. Legyen  $H$  az  $x_2x_3$  szakaszfelező merőleges hipersíkja, és legyen  $G$  az a  $(d-2)$ -dimenziós sík, amely merőleges az  $x_1, x_2, x_3$  pontok által meghatározott kétdimenziós síkra és illeszkedik az  $x_1$  pontra. Ekkor  $H$  tartalmazza  $G$ -t, és jelölje  $G^+$  azt a fél-hipersíkját  $H$ -nak, amely nem metszi az  $x_2x_3$  szakaszt és  $G$  határolja.

De ekkor  $\text{aff}F \cap G^+$  tartalmaz egy  $x_1$ -ből kiinduló  $h$  félegyenest, és  $x_1$ -et ezen félegyenes mentén elmozgatva olyan optimális háromszöghöz jutunk, amely nem szabályos. Ez ellentmondás, tehát tehát minden  $x_i$  pont valamilyen  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  élen kell legyen.

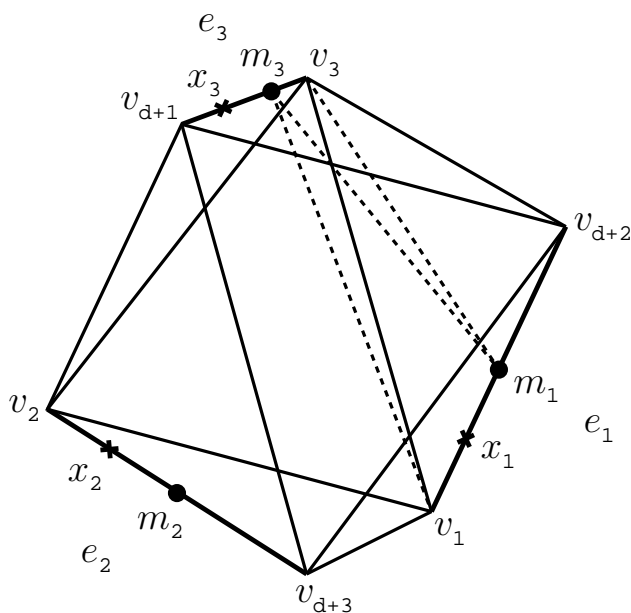
Mivel az  $e_i$  és  $e_j$  élek konvex burkának az átmérője nagyobb mint  $\sqrt{2}$ , ezért

$$e_i \cap -e_j \neq \emptyset. \quad (*)$$

Tekintsük először azt az esetet, amikor az  $e_1, e_2, e_3$  élek páronként diszjunktak. Feltehetjük, hogy  $e_1, e_2$  és  $e_3$  a következő szakaszok  $v_1v_{d+2}$ ,  $v_2v_{d+3}$  és  $v_3v_{d+1}$ , és  $x_1v_1 \leq x_1v_{d+2}$ . Jelölje  $m_1$  és  $m_2$  a  $v_1v_{d+2}$  és a  $v_2v_{d+3}$  szakaszok felezőpontját, valamint legyen  $m_3 = \frac{3}{4} \cdot v_3 + \frac{1}{4} \cdot v_{d+1}$ . Mivel a  $v_1m_1$  szakasz tartalmazza  $x_1$ -et és a  $v_1m_1v_3m_3$  tetraéderben

$$d(v_1, m_3) = \frac{\sqrt{34}}{4} < 2 \cdot (\sqrt{3} - 1),$$

ezért  $x_3$  a  $v_{d+1}m_3$  szakaszra esik. Az előző gondolatmenethez teljesen hasonlóan kapjuk, hogy a  $v_2m_2$  szakasz tartalmazza  $x_2$ -t, mivel a  $v_1m_1v_{d+3}m_2$  tetraéder átmérője  $\sqrt{2}$ . Azt is tudjuk, hogy a  $v_2m_2v_{d+1}m_3$  tetraéder átmérője szintén  $\sqrt{2}$ , ezért  $d(x_2, x_3) < 2 \cdot (\sqrt{3} - 1)$ . Ez ellentmondás, tehát két élen van közös pontja.



10. ábra

Legyen például  $v_1$  az  $e_1$  és  $e_2$  él közös pontja. Feltehetjük (\*) miatt, hogy  $e_1$  és  $e_2$  másik végpontja rendre  $v_2$  és  $v_{d+2}$ , és  $e_3$  egyik végpontja  $-v_1$ . Ha a  $\pm v_1, \pm v_2$  pontok által meghatározott  $S$  négyzet  $x_3$ -at nem tartalmazza, akkor feltehetjük, hogy  $e_3$  másik végpontja  $v_3$ . Ekkor az  $x_i x_3 v_3$  háromszögnek a leghosszabb oldala  $x_i x_3$  ha  $i = 1, 2$ , és ezért  $\angle x_i x_3 v_{d+1}$  tompaszög. Ebből következik, hogy  $d(x_i, x_3) < d(x_i, v_{d+1})$ , azaz az  $x_1 x_2 v_{d+1}$  háromszög optimális, de nem szabályos. Az utolsó lehetőség, ha  $x_3$  az  $S$  négyzetben helyezkedik el. Ha  $S$ -nek van olyan  $e$  éle amely az  $x_1, x_2, x_3$  pontok egyikét sem tartalmazza, akkor az  $x_1 x_2 x_3$  háromszög eltolható  $e$ -re merőlegesen úgy, hogy valamely  $x_i$  pont az  $S$  belsejébe kerüljön. Ez lehetetlen, tehát valamelyik  $x_i$  pont az  $S$  csúcsa, mint azt az 1. Tételben állítottuk. ■

### 3. $4 \leq n \leq 2d$ esete

**2. Tétel bizonyítása:** A második tétel bizonyításához elegendő az  $n = 4$  esetet vizsgálni. Legyen  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in O^d$  optimális elrendezésű 4 pont, azaz  $d(x_i, x_j) \geq \sqrt{2}$  minden  $i \neq j$  esetén.

Legyen  $G_i$  a  $v_i$  csúcs és a  $v_i v_j, j \neq i + d$  élfelező pontok konvex burka, valamint legyen

$$P_0 = O^d \setminus \cup_{i=1}^{2d} G_i.$$

Ekkor  $P_0$  lezártja egy politóp, melynek csúcsai  $O^d$  élfelező pontjai, de ezek az élfelező pontok nem tartoznak  $P_0$ -hoz. Mivel  $O^d$  élfelező pontjai közötti maximális távolság  $\sqrt{2}$ , ezért legfeljebb egy  $x_i$  pont lehet  $P_0$ -ban.

Mindegyik  $G_j$  gúla átmérője 1, s ezért a  $G_j$  gúlának is legfeljebb egy-egy pontot tartalmazhatnak. Tegyük fel, hogy  $x_1 \in G_1$  és  $x_2 \in G_2$ .

Jelölje  $G_i^t$  a  $G_i$  homotetikus képét, ha  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$  és  $i = 1, \dots, 2d$ , ahol  $v_i$  a homotécia centruma, aránya pedig  $2 \cdot t$ . Ekkor  $G_i^t$  csúcsai

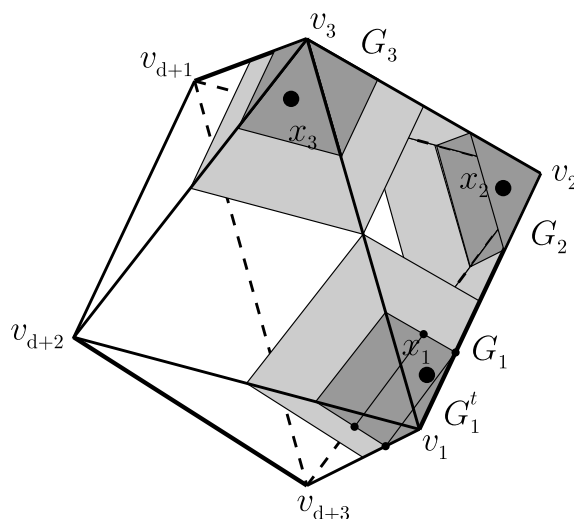
$$v_i \quad \text{és} \quad (1-t) \cdot v_i + t \cdot v_j \quad \text{ha} \quad v_j \neq \pm v_i.$$

Két esetet különböztetünk meg.

a) Ha  $G_j$   $j \neq d+1, d+2$  tartalmazza az  $x_3$  vagy  $x_4$  pontot.

Tegyük fel, hogy  $x_3 \in G_3$ . Legyen  $1-t$  az  $\langle x_i, v_i \rangle$  minimuma, ha  $i = 1, 2, 3$ , és  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ . Feltehetjük, hogy  $\langle x_1, v_1 \rangle = 1-t$  és  $\langle x_1, v_2 \rangle \geq \langle x_1, v_3 \rangle$ . Legyen  $F$  a  $G_1^t$   $v_1$ -gyel szemközti hiperlapján azon pontok halmaza, melyeknek a második koordinátája nem kisebb, mint a harmadik koordinátája. Ekkor  $F$  tartalmazza  $x_1$ -et, és  $F$  egy olyan politóp, melynek csúcsai

$$\begin{cases} (1-t) \cdot v_1 \pm t \cdot v_i & \text{ha } i = 4, \dots, d \\ (1-t) \cdot v_1 + t \cdot v_2 \\ (1-t) \cdot v_1 - t \cdot v_3 \\ (1-t) \cdot v_1 \pm \frac{t}{2} \cdot (v_2 + v_3). \end{cases}$$



11. ábra

Másrésről  $G_2^t$  tartalmazza  $x_2$ -t. Ha  $0 < t \leq \frac{1}{2}$  akkor rövid számolás után kapjuk, hogy  $F$  és  $G_2^t$  bármely csúcsainak távolsága kisebb mint  $\sqrt{2}$ . Ezek szerint  $t = 0$ , azaz  $x_i = v_i$  ha  $i = 1, 2, 3$ . Ebből már könnyen következik, hogy  $x_4$  vagy  $O^d$ -nek egy másik csúcsa, vagy a  $v_{d+1}v_{d+2}v_{d+3}$  kétdimenziós lap középpontja.

b) Ha  $G_j$   $j \neq d+1, d+2$  nem tartalmazza az  $x_3$  és  $x_4$  pontokat.

Ebben az esetben feltehetjük, hogy  $x_3 \in G_{d+1}$ .

Abban az esetben, ha  $x_4 \in P_0$ , ellentmondásra juthatunk. Feltehető, hogy  $\langle x_4, v_1 \rangle \geq \langle x_4, v_{d+1} \rangle$ , azaz  $x_4$  az  $O^d$   $v_{d+1}$ -re nem illeszkedő éleinek felezőpontja által meghatározott konvex tartományba esik. Mivel ezen élfelező pontok és  $G_1$  tetszőleges csúcsának távolsága legfeljebb  $\sqrt{2}$ , valamint  $x_4$  nem esik egyik élfelező pontba sem, ezért  $d(x_1, x_4) < \sqrt{2}$ . Ez ellentmondás, tehát  $x_4 \in G_{d+2}$ .

A bizonyítás második része hasonló az a) pontban leírtakhoz. Legyen  $1 - t$  a  $\langle x_1, v_1 \rangle$ ,  $\langle x_2, v_2 \rangle$ ,  $\langle x_3, v_{d+1} \rangle$  és  $\langle x_4, v_{d+2} \rangle$  minimuma, ahol  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ . Feltehetjük, hogy  $\langle x_1, v_1 \rangle = 1 - t$  és  $\langle x_1, v_2 \rangle \geq \langle x_1, v_{d+2} \rangle$ .

Legyen  $F'$  a  $G_1^t$   $v_1$ -gyel szemközti hiperlapján azon pontok halmaza, melyeknek a második koordinátája nem negatív. Így  $F'$  egy olyan  $(d-1)$ -dimenziós politóp, melynek csúcsai

$$(1-t) \cdot v_1 + t \cdot v_2 \quad \text{és} \quad (1-t) \cdot v_1 \pm t \cdot v_i \quad \text{ha } i = 3, \dots, d.$$

Másrésről  $G_2^t$  tartalmazza  $x_2$ -t. Ha  $0 < t \leq \frac{1}{2}$ , akkor némi számolás után kapjuk, hogy  $F'$  és  $G_2^t$  bármely csúcsainak távolsága kisebb mint  $\sqrt{2}$ , azaz  $t = 0$ . Ekkor  $x_1 = v_1$ ,  $x_2 = v_2$ ,  $x_3 = v_{d+1}$  és  $x_4 = v_{d+2}$ . ■

#### 4. Az $n=2d+1$ pont esete

Legyen a  $v_i$  csúcs Dirichlet-Voronoi cellája  $D_i$ , azaz

$$D_i := \{x \in O^d : \langle x, v_i \rangle \geq \langle x, v_j \rangle \quad \text{minden } j \neq i\}.$$

Ekkor  $D_i$  csúcsai  $O^d$  azon lapjainak középpontjai, melyek  $v_i$ -t tartalmazzák, beleértve ebbe magát  $O^d$ -t is, mint  $d$ -dimenziós lapot. Megjegyezzük, hogyha  $F$  egy  $(m-1)$ -dimenziós lap, melynek csúcsai  $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ , ahol  $2 \leq m \leq d$ , akkor a lap középpontja  $\frac{v_{i_1} + \dots + v_{i_m}}{m}$ .

**Lemma:** Legyen  $x, y \in D_i$ . Ekkor  $d(x, y) \leq 1$ , és  $d(x, y) = 1$  akkor és csak akkor, ha  $\{x, y\} = \{o, v_i\}$  vagy  $\{x, y\} = \{\frac{v_i + v_j}{2}, \frac{v_i - v_j}{2}\}$  ahol  $v_j \neq \pm v_i$ .

**Lemma bizonyítása:** Az  $o$ ,  $v_i$ ,  $\frac{v_i+v_i}{2}$  és a  $\frac{v_i-v_i}{2}$  pontok  $D_i$  csúcsai, tehát feltehetjük, hogy  $x$  és  $y$  szintén  $D_i$  csúcsai. Azt is feltehetjük, hogy  $i = 1$ .

Ha  $x$  vagy  $y$  az origo vagy  $v_1$ , akkor a lemma teljesül, legyen ezért  $x$  és  $y$  egy  $(m-1)$ -dimenziós  $F$  lap, illetve egy  $(k-1)$ -dimenziós  $G$  lap középpontja, ahol  $2 \leq m, k \leq d$ . Tegyük fel, hogy  $k \leq m$ .

Jelölje  $p$  az  $F$  és  $G$  közös csúcsai halmazának számosságát,  $q$  pedig  $F$  azon csúcspontjainak számát, melyeknek szemköztes párja csúcsa  $G$ -nek. Ekkor

$$d(x, y)^2 = p \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right)^2 + q \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m-q-p}{m^2} + \frac{k-q-p}{k^2}.$$

Mivel  $p \geq 1$ , ezért minden  $k$  és  $m$  mellett  $d(x, y)^2$  akkor lesz maximális, ha  $p = 1$  és  $q = k - 1$ ; azaz

$$d(x, y)^2 = \frac{1}{m} \cdot \left(3 - \frac{4}{k}\right) + \frac{1}{k} \leq \frac{4}{k} \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Ezek szerint  $d(x, y)^2$  maximális, ha  $m = k = 2$ , és  $F$  egy  $(v_i, v_j)$  él,  $G$  pedig a  $(v_i, -v_j)$  él. ■

**3. Tétel bizonyítása:** Definiáljuk minden  $x \in O^d$   $i = 1, \dots, 2d$ , pontnak a  $w_i(x)$  súlyát, mint

$$w_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{\#\{j : x \in D_j\}} & \text{ha } x \in D_i \\ 0 & \text{ha } x \notin D_i \end{cases}.$$

Megjegyezzük, hogy  $\sum_{i=1}^{2d} w_i(x) = 1$  minden  $x \in O^d$  pontra fennáll.

$O^d$  csúcsai és középpontja  $2d + 1$  darab pont, melyek páronkénti távolsága legalább 1.

Legyen adott  $n$  darab tetszőleges pontja  $O^d$ -nek úgy, hogy páronkénti távolságuk legalább 1. Jelölje ezeket a pontokat  $x_1, \dots, x_n$ . A lemmából következik, hogy minden  $i = 1, \dots, 2d$  esetén

$$\sum_{j=1}^n w_i(x_j) \leq 1 + \frac{1}{2d},$$

és egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha a  $D_i$ -be eső  $\{x_1, \dots, x_n\}$  pontok az origo és  $v_i$ . Ez alapján

$$n = \sum_{i=1}^{2d} \sum_{j=1}^n w_i(x_j) \leq 2d + 1,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az  $x_1, \dots, x_n$  pontok  $O^d$  csúcsai és a középpontja. ■

### 3. fejezet

## Lokális stabilitás

Ha  $d = 3, 4$ , akkor a  $D_d = \{(x_1, \dots, x_d) \in Z^d : x_1 + \dots + x_d \equiv 0 \pmod{2}\}$  rács a sejtett legsűrűbb elhelyezést adja egyenlő sugarú gömbökre. Mivel a  $D_d$  rács struktúrája nagyon jól illeszkedik  $O^d$ -hez, jó esély van arra, hogy  $D_d$  összehúzottjának  $O^d$ -be eső része legyen a középpontok optimális halmaza.

Tekintsük azon gömböket, melyek belsejükben nem tartalmaznak  $D_d$ -beli pontot, és  $D_d$ -nek a gömb határán lévő pontjai kifeszítik  $E^d$ -t. Az ilyen gömbökbe eső pontok konvex burkai alkotják az úgynevezett Delaunay cellarendszert. (lásd: [11]).

$D_3$ -nak két fajta Delaunay cellája van.  $\sqrt{2}$  élű szabályos tetraéderek és  $\sqrt{2}$  élű szabályos tetraéderek.  $D_4$ -nek minden Delaunay cellája  $\sqrt{2}$  élű szabályos kereszt-politóp.

**Definíció:** Egy pontelhelyezést rácsszerűnek hívunk  $O^d$ -ben, ha a pontok halmaza

$$\left(\frac{1}{k-1}D_d + v_1\right) \cap O^d, \quad k \geq 2, \quad k \in Z.$$

Az itt fellépő minimális távolság  $\frac{\sqrt{2}}{k-1}$ , s ha ezt a véges pontrendszert  $\frac{\sqrt{2}}{k-1} \sqrt{d+2} = \frac{1}{\sqrt{d+2}(k-1)}$ -szeresre kicsinyítjük, akkor éppen a megfelelő rácsszerű gömbelhelyezés középpontjait kapjuk.

**Megjegyzés:** Ha  $f(k, d)$  az  $\left(\frac{1}{k-1}D_d + v_1\right)$  rács  $O^d$  kereszt-politópba eső pontjainak számát jelöli, mely a  $(v_i, v_j)$ ,  $i \neq j + d$  élre  $k$  pontban illeszkedik, akkor  $f(k, d)$ -re a következő rekurzív összefüggés írható fel.

$$f(k, d) = f(k, d-1) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} f(i, d-1) \quad \text{és} \quad f(k, 1) = k$$

A következő táblázat  $f(k, d)$  néhány értékét tartalmazza.

| $f(k, d)$ | 1 | 2 | 3  | 4  | 5   | ... | k                      |
|-----------|---|---|----|----|-----|-----|------------------------|
| $d = 1$   | 1 | 2 | 3  | 4  | 5   | ... | k                      |
| $d = 2$   | 1 | 4 | 9  | 16 | 25  | ... | $k^2$                  |
| $d = 3$   | 1 | 6 | 19 | 44 | 85  | ... | $\frac{2k^3 + k}{3}$   |
| $d = 4$   | 1 | 8 | 33 | 96 | 225 | ... | $\frac{k^4 + 2k^2}{3}$ |



A következőkben belátjuk, hogy a 3-, illetve a 4-dimenziós keresztpolitópban rácyszerűen elhelyezett pontrendszer lokálisan stabil. Ehhez Bezdek [2] eredményeit is felhasználjuk.

**Definíció:** Az  $r$  sugarú gömbök egy  $P$  elhelyezése  $O^d$ -ben lokálisan stabil, ha  $\exists \varepsilon > 0$ , úgy hogy ha bármely gömböt legfeljebb  $\varepsilon$ -nal elmozgatva a kapott gömbök is elhelyezést alkotnak  $O^d$ -ben, akkor  $P$  minden eleme a helyén maradt.

Emlékeztetünk arra, hogy egy poliédert akkor hívunk szimpliciálisnak, ha minden lapja szimplex.

**Definíció:** Legyenek a  $P$  szimpliciális poliéder csúcsai  $V_1, \dots, V_n$ . Azt mondjuk, hogy ez a  $P$  poliéder szigorúan lokálisan térfogatnövelő, ha  $\exists \epsilon > 0$ , hogy minden olyan  $V'_1, \dots, V'_n$  csúcsokkal rendelkező  $Q$  szimpliciális poliéder esetén, melyre

$$d(V_i, V'_i) < \epsilon \quad \text{ha } 1 \leq i \leq n$$

és

$$d(V_i, V_j) \leq d(V'_i, V'_j) \quad \text{minden } 1 \leq i \neq j \leq n$$

akkor  $V(P) \leq V(Q)$ . Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $P \cong Q$ .

**Állítás:** Ha  $P \subset E^d$  egy szimplex és minden csúcs szemközti lapra eső vetülete a lap belsejében van, akkor  $P$  szigorúan lokálisan térfogatnövelő.

**Állítás:** A  $P$  szabályos keresztpolitóp  $E^d$ -ben szigorúan lokálisan térfogatnövelő.

**Bizonyítás:** [2] cikk 2.4.2. és 2.4.3. példája alapján. ■

**Tétel:** A 3-dimenziós oktaéderben rácyszerűen elhelyezett pontrendszer lokálisan stabil.

**Bizonyítás:** A korábbi jelöléseknek megfelelően legyen  $O$  a 3-dimenziós oktaéder, és az  $\frac{k(2k^2+1)}{3}$  pontból álló rácyszerű pontrendszer  $\{x_i\}$ . A rácspontok távolsága legyen  $r$ . Ekkor az  $\frac{1}{k-1}D_d$  Delaunay cellái  $O$ -t felbontják az  $x_i$  pontok által meghatározott  $T_i$  tetraéderek és  $O_j$  oktaéderek uniójára. Mozgassunk minden  $x_i$  pontot  $x'_i$ -be úgy, hogy

$$d(x_i, x'_i) \leq \epsilon \quad \text{és} \quad d(x'_i, x'_j) \geq r.$$

Mivel  $T_i$  és  $O_j$  nyilvánvalóan szimpliciális poliéder, ezért ha

$$T_i = \text{konv}\{x_{i_1}, \dots, x_{i_4}\}, \quad O_j = \text{konv}\{x_{j_1}, \dots, x_{j_6}\}$$

akkor

$$T'_i = \text{konv}\{x'_{i_1}, \dots, x'_{i_4}\} \quad O'_j = \text{konv}\{x'_{j_1}, \dots, x'_{j_6}\}$$

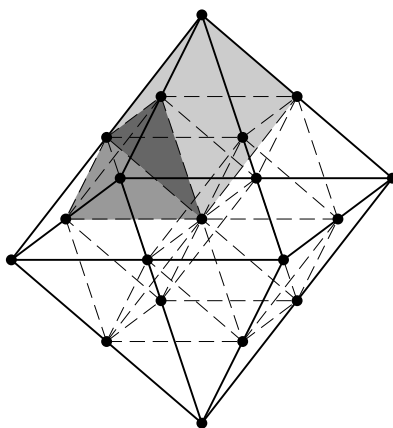
és  $T'_i, O'_j \subset O$ , valamint az eredetileg egymást közös lapban metsző  $T_i$  és  $O_j$  poliéderek  $T'_i, O'_j$  elmozgatottjai szintén közös lapban metszik egymást. A korábbi állítások alapján mind  $T_i$ , mind  $O_j$  szigorúan lokálisan térfogatnövelő, azaz

$$V(T'_i) \geq V(T_i) \quad \text{és} \quad V(O'_j) \geq V(O_j).$$

Ebből azonban következik, hogy most

$$T'_i \cong T_i \quad \text{és} \quad O'_j \cong O_j.$$

Ezek alapján az eredeti  $O$  oktaéder egyik csúcsára illeszkedő  $O_j$  cella fixen marad, s mivel a szomszédos  $T_i$  és  $O_j$  cellák egy-egy oldallapja közös, ezért az eredeti  $O$  oktaéder teljes cellafelbontása fixen marad, azaz  $x'_i = x_i$  minden  $i$ -re, ahogy azt állítottuk. ■



12. ábra

**Tétel:** *A 4-dimenziós keresztpolitópban rácsszerűen elhelyezett pontrendszer lokálisan stabil.*

**Bizonyítás:** Jelölje  $O^4$  a 4-dimenziós keresztpolitópot, és  $\{x_i\}$  az  $\frac{k^2(k^2+2)}{3}$  pontból álló rácsszerű pontrendszert ahol a rácspontok távolsága  $r$ . Az előző bizonyításhoz teljesen hasonlóan  $O^4$  felbomlik a rácspontok által meghatározott  $O_i$  keresztpolitópok uniójára, melyekről már láttuk, hogy lokálisan térfogatnövelő tulajdonsággal rendelkeznek. ■

## 4. fejezet

### A $d$ -dimenziós keresztpolitóp fedése

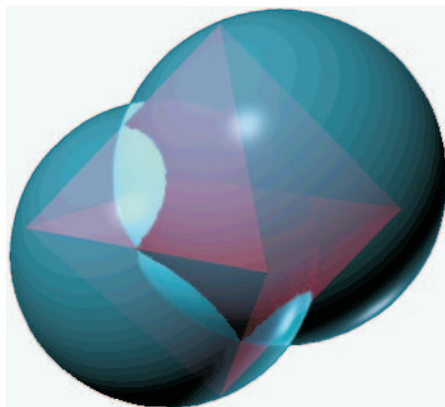
Ebben a fejezetben az oktaéder illetve a keresztpolitóp fedésével foglalkozunk. Meghatározzuk azon kongruens gömbök minimális sugarát, melyek lefedik az oktaédert. Jelöléseink a korábban bevezetettek, azaz  $O$  jelöli az oktaédert,  $O^d$  pedig a  $d$ -dimenziós keresztpolitópot, melynek csúcsai  $\pm v_1, \dots, \pm v_d$ . Ezen kívül jelöljük  $R_n^d$ -vel a  $d$ -dimenziós keresztpolitóp fedéséhez szükséges  $n$  darab kongruens gömb sugarának minimumát.

#### 1. Két gömb esete

**Tétel:**

$R_2^3 = \frac{\sqrt{11}}{4}$ , a két gömb középpontja pedig például  $\pm(1/4, 1/4, 1/4)$ .

$R_2^d = \sqrt{1 - \frac{1}{d}}$ ,  $d \geq 4$  estén, a két gömb középpontja pedig  $O^d$  két szemköztes hiperlapjának súlypontja.



13. ábra

**Bizonyítás:** Először a 3-dimenziós esettel foglalkozunk. Tegyük fel, hogy két  $R_2 < \sqrt{11}/4$  sugarú gömb fedi le  $O^3$ -t. Ekkor egyik gömb sem fedheti  $O^3$  4 csúcsát, mert akkor volna köztük két egymással szemben lévő, melyek távolsága 2. Tehát mindkét gömb három-három szomszédos csúcsát fedi  $O^3$ -nak, mondjuk  $\pm(v_1, v_2, v_3)$ -at. Ez éppen két egymással szemköztes párhuzamos lap, továbbá a gömböknek fedniük kell  $O^3$  azon pontjait is, amelyek a két sík  $H$  felezősíkjára esnek.  $H$  épp a  $\pm(v_1, v_2, v_3)$  lapokat összekötő élek felezőpontjai által meghatározott

$G$  szabályos hatszögben metszi  $O^3$ -t. A  $\pm(v_1, v_2, v_3)$  lapokat fedő minimális sugarú gömb középpontja az origó középpontú,  $v = \frac{v_1+v_2+v_3}{3}$  irányvektorú egyenesre esik, mely merőleges  $H$ -ra is, így  $G$  csúcsai egyenlő távol vannak  $v$  pontjaitól. A szimmetria miatt elegendő meghatározni azon minimális sugarú gömböt, mely  $G$  hatszög egyik csúcsát és például  $(v_1, v_2, v_3)$ -at tartalmazza, amiből adódik a tétel, ha  $d = 3$ .

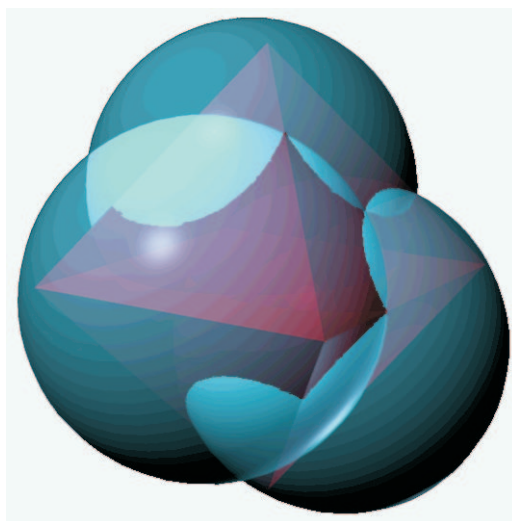
A  $d$ -dimenziós eset bizonyítása hasonlóan működik mint a három dimenziós eseté, de a  $\pm(v_1, v_2, v_3)$  lapok helyébe a  $\pm(v_1, \dots, v_d)$  hiperlapok,  $H$  helyébe pedig a hiperlapokkal párhuzamos, távolságukat felező  $H'$  hipersík kerül. A lefedő gömbök középpontjára a  $\pm(1/4, \dots, 1/4)$  pont adódik, amely azonban  $d \geq 4$  esetén nem esik  $O^d$  belsejébe, tehát találhatunk ennél jobbat is. A rendszer szimmetriája miatt a minimális fedő gömbök középpontja éppen  $\pm(1/d, \dots, 1/d)$  lesz, amiből adódik a tétel, ha  $d \geq 4$ . ■

## 2. $d$ darab gömb esete

**Tétel:**

$$R_d = \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{3}, & \text{ha } d = 3 \\ \sqrt{\frac{11}{20}}, & \text{ha } d \geq 4. \end{cases}$$

1. **Állítás:** A  $(1/3, -1/3, 0)$ ;  $(0, 1/3, -1/3)$ ;  $(-1/3, 0, 1/3)$  középpontú,  $R = \frac{\sqrt{5}}{3}$  sugarú 3 gömb lefedi  $O^3$ -t, tehát  $R_3^3 \leq \frac{\sqrt{5}}{3}$ .



14. ábra

**Bizonyítás:** Először belátom, hogy az általam adott konstrukció tényleg fedés. Például a  $(v_1, -v_2)$  élt fedő  $(1/3, -1/3, 0)$  középpontú gömb tartalmazza az  $(1/3, 1/3, \pm 1/3)$ ,  $(-1/3, -1/3, \pm 1/3)$ ,  $(2/3, 1/3, 0)$ ,  $(-1/3, 2/3, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, -1, 0)$ ,  $(1/3, 0, \pm 2/3)$ ,  $(0, -1/3, \pm 2/3)$  és a  $(0, 0, \pm 1/\sqrt{3})$  csúcsok által meghatározott poliédert, azonban már ezek elforgatottjai is fedik  $O$ -t. ■

**2. Állítás:** 3 darab  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ -nál kisebb sugarú gömb nem fedheti  $O$ -t.

**Bizonyítás:** Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy három darab  $\sqrt{5}/3$ -nál kisebb sugarú gömb lefedi  $O$ -t. Egyik gömb sem fedheti le az oktaéder három csúcsát, hiszen bármely három csúcs köré írt kör sugara nagyobb mint  $\sqrt{5}/3$ . Ez alapján minden gömbnek két-két szomszédos csúcsot kell fednie, melyek három darab páronként kitérő élt alkotnak. Jelöljük a  $(v_1, -v_2)$ ,  $(v_2, -v_3)$ ,  $(v_3, -v_1)$  éleket lefedő gömböket rendre  $B_1, B_2, B_3$ -mal. Ekkor azonban  $B_1$  és  $B_2$  sem tartalmazhatja a  $(-1/3, -2/3, 0)$  és a  $(0, 2/3, 1/3)$  pontokat. Ezeket tehát a  $(v_3, -v_1)$  éllel együtt a  $B_3$  gömbnek kellene fednie. Ezen tertaéder körülírt gömbjének sugara azonban éppen  $\sqrt{5}/3$ . ■

Az 1. és a 2. Állítás bizonyítja a kimondott Tételt  $d = 3$  esetben.

A következő részben rátérünk  $O^d$  ( $d \geq 4$ ) fedésére  $d$  darab kongruens gömbbel.

**3. Állítás:**  $d \geq 4$  darab  $\sqrt{\frac{11}{20}}$  sugarú gömb lefedi  $O^d$ -t, azaz  $R_d^d \leq \sqrt{\frac{11}{20}}$ .

**Bizonyítás:** A konstrukciót a 3-dimenziós eset mintájára, – ahhoz hasonlóan – készíthetjük el.

Legyen  $O^d$   $e_i$  éle

$$e_i := v_i - v_{i+1} \quad i = 1 \dots d, \quad (v_{i+d} = v_i)$$

$$C_i := \frac{1}{20}v_{i-1} + \frac{7}{20}v_i - \frac{7}{20}v_{i+1} - \frac{1}{20}v_{i+2}, \quad i = 1 \dots d$$

$$B_i := \text{a } C_i \text{ középpontú } R = \sqrt{\frac{11}{20}} \text{ sugarú gömb, } i = 1 \dots d.$$

Ezek után  $O^d$  minden  $F$  lapjához megadunk egy  $C(F)$  pontot, melyre  $C(F) \in \text{relint}F$ .

1. Ha  $\dim F = 1$ , akkor

$$C(F) := \begin{cases} \frac{7}{10}v_i + \frac{3}{10}v_{i+1}, & \text{ha } F = (v_i, v_{i+1}) \\ \frac{3}{10}(-v_i) + \frac{7}{10}(-v_{i+1}), & \text{ha } F = (-v_i, -v_{i+1}) \\ F \text{ súlypontja} & \text{egyébként} \end{cases}$$

2. Ha  $\dim F = 2$ , akkor

$$C(F) := \begin{cases} \frac{4}{10}v_i + \frac{3}{10}v_{i+1} + \frac{3}{10}v_k, & \text{ha } F = (v_i, v_{i+1}, v_k), \\ & k \neq i-1, i, i+1 \\ \frac{3}{10}(-v_{i-1}) + \frac{4}{10}v_i + \frac{3}{10}v_{i+1}, & \text{ha } F = (-v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) \\ \frac{3}{10}(-v_i) + \frac{4}{10}(-v_{i+1}) + \frac{3}{10}v_{i+2}, & \text{ha } F = (-v_i, -v_{i+1}, v_{i+2}) \\ \frac{3}{10}(-v_k) + \frac{3}{10}(-v_i) + \frac{4}{10}(-v_{i+1}), & \text{ha } F = (-v_{i-1}, -v_i, -v_{i+1}), \\ & k \neq i, i+1, i+2 \\ F \text{ súlypontja} & \text{egyébként} \end{cases}$$

3. Ha  $\dim F \geq 3$ , akkor  $C(F) := F$  súlypontja.

Ekkor minden  $C(F)$  pontot úgy adtuk meg, hogy teljesül a következő lemma:

**Lemma:** Ha  $v$  csúcsa  $F$ -nek, és  $v \in B_i$ , akkor  $C(F) \in B_i$ .

**Bizonyítás:** A lemma bizonyítása némi számolást igényel. Legyen például  $i = 2$ , azaz tekintsük a  $(v_2, -v_3)$  élt lefedő  $B_2$  gömböt, melynek középpontja  $C_2 = (\frac{1}{20}, \frac{7}{20}, -\frac{7}{20}, -\frac{1}{20}, 0, \dots, 0)$  Ekkor a következő  $F$  lapok jöhetnek szóba.

1. Ha  $\dim F = 1$ , akkor

$$\begin{aligned} \|C(v_2, v_3) - C_2\|^2 &= \frac{11}{20} \\ \|C(v_2, \pm v_i) - C_2\|^2 &\leq \frac{9}{20} \quad i \neq 3 \end{aligned}$$

2. Ha  $\dim F = 2$ , akkor

$$\begin{aligned} \|C(v_2, -v_3, \pm v_4) - C_2\|^2 &\leq \frac{3}{20}, \quad \|C(\pm v_1, v_2, -v_3) - C_2\|^2 \leq \frac{3}{20} \\ \|C(\pm v_1, v_2, v_3) - C_2\|^2 &= \frac{11}{20} \\ \|C(v_2, v_3, \pm v_k) - C_2\|^2 &\leq \|C(v_2, v_3, v_4) - C_2\|^2 = \frac{11}{20}, \quad k \neq 1, 2, 3 \\ \|C(v_2, -v_3, \pm v_k) - C_2\|^2 &< \frac{11}{20}, \quad k \neq 1, 2, 3, 4 \\ \|C(\pm v_1, v_2, \pm v_k) - C_2\|^2 &< \frac{11}{20}, \quad k \neq 1, 2, 3, d \\ \|C(v_2, \pm v_j, \pm v_k) - C_2\|^2 &< \frac{11}{20}, \quad j, k \neq 1, 2, 3 \quad j \neq k \end{aligned}$$

3. Ha  $\dim F \geq 3$ , akkor a  $C_2$ -től legmesszebb lévő súlypont nyilván  $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \dots, 0)$ , de

$$\|(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \dots, 0) - C_2\|^2 = \frac{11}{20}.$$

Ezzel a lemmát beláttuk. ■

A továbbiakban  $F_j$ -vel jelölöm  $O^d$  egy  $j$ -dimenziós lapját,  $j = 0, \dots, d$  ( $F_0 = \pm v_i, F_d = O^d$ ). Legyen  $K_m$  a  $\text{konv}\{C(F_0), C(F_1), \dots, C(F_d)\}$  alakú tetraéderek halmaza, ahol  $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_d$ . Ekkor  $\bigcup_m K_m = O^d$ . A lemma alapján minden  $K_m$  benne van valamely  $B_k$  gömbben, ami bizonyítja a 3. Állítást. ■

4. **Állítás:** Ha az  $R$  sugarú  $B_1, \dots, B_d$  gömbök lefedik  $O^d$  éleit, akkor  $R \geq \sqrt{\frac{11}{20}}$ .

**Bizonyítás:** Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy  $R < \sqrt{\frac{11}{20}}$ . Az alábbiakban lépések sorozatát adjuk meg, mely ellentmondásra fog vezetni.

(1) Léteznek  $e_1, \dots, e_d$  páronként diszjunkt élek, hogy  $e_i \subset B_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ .

Egy  $B_i$  gömb  $O^d$  maximum két szomszédos csúcsát fedheti le, hiszen két szemben fekvő csúcs távolsága 2, bármely három páronként szomszédos csúcs körülírt körének sugara pedig  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

(2) Legyen  $v_i$  és  $v_j$  az  $e_i$  és  $e_j$ ,  $i \neq j$  élek egy-egy végpontja, és legyen  $P = \frac{2}{3}v_i + \frac{1}{3}v_j$ . Ekkor a  $P, v_k, v_l$  ( $k \neq l$ ),  $k, l \neq i, j$  háromszöget nem tartalmazza  $R = \sqrt{\frac{11}{20}}$  sugarú kör.

(3)  $e_i = -e_j$  nem lehetséges

Ellenkező esetben a 2. pontban megadott  $P = \frac{2}{3}v_i + \frac{1}{3}v_j$  pont nem lenne lefedve egyetlen  $B_k$  gömbbel sem.

(4) Az  $e_i$  és  $e_j$  éleket nevezzük egymáshoz képest rákövetkezőknek, ha

$$e_i \cap -e_j \neq \emptyset.$$

Egy  $f$  élt nevezzünk hídnak, ha léteznek olyan  $e_i, e_j$  rákövetkező élek, hogy

$$f \cap e_i \cap (-e_j) \neq \emptyset \quad \text{és} \quad f \cap e_j \neq \emptyset.$$

Legyen  $G$  egy gráf, melynek pontjai az  $e_1, \dots, e_d$  rákövetkező élek,  $G$  élei pedig azon pontjait kötik össze, ahol  $e_i$  és  $e_j$  rákövetkező élek voltak. Ekkor (1)–(4) alapján annyit állíthatunk, hogy  $G$  diszjunkt körök uniója.

(5) Ha  $f$  egy híd az  $e_i$  és  $e_j$  él között, akkor  $f \subset (B_i \cup B_j)$ .

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel hogy  $e_1 = (v_1, -v_2)$ ,  $e_2 = (v_2, -v_3)$ ,  $f = (v_1, v_2)$  és  $P = \frac{2}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2$ . Ekkor  $P \notin B_1$  és  $P \notin B_j$ , ha  $j \geq 3$ , tehát  $P \in B_2$ , amiből következik, hogy  $(P, v_2) \subset B_2$ . Hasonlóan az előzőhöz  $(P, v_1) \cap B_k = \emptyset$ , ha  $k \geq 3$ , azaz  $(P, v_1) \subset (B_1 \cup B_2)$ , amiből már következik az állítás.

(6)  $G$ -ben nem létezik három hosszú kör.

A háromdimenziós esethez hasonlóan járhatunk el, csak figyelembe kell venni a (2) pont alatti megjegyzést is. Tegyük fel hogy létezik, és legyenek a kör pontjai a  $(v_1, -v_2)$ ,  $(v_2, -v_3)$ ,  $(v_3, -v_1)$  rákövetkező élek. Legyen  $P := \frac{2}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2$  és  $Q := -\frac{2}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_3$ . Ekkor  $P \notin B_1$ , és  $P \notin B_k$ ,  $k \geq 3$  esetén. Hasonlóan,  $Q \notin B_1$  és  $Q \notin B_k$ ,  $k \geq 3$  esetén. Azt kapjuk tehát, hogy a  $\{P, Q, v_2, -v_3\}$  pontokat a  $B_2$  gömbnek kell fednie, de ekkor a  $B_2$  gömb sugara legalább  $\frac{\sqrt{5}}{3} > \sqrt{\frac{11}{20}}$ .

(7) Legyen  $B$  egy  $R < \sqrt{\frac{11}{20}}$  sugarú gömb, mely tartalmazza  $e_i$ -t. Legyenek az  $e_i$ -ből induló hídélek  $f_{i1}, f_{i2}, f_{i3}, f_{i4}$  és jelölje a  $B$  gömb által lefedett hídélek összhosszát  $\Phi(B)$ , azaz  $\Phi(B) = \sum_{j=1}^4 |B \cap f_{ij}|$ . Ekkor  $\Phi(B) < 2\sqrt{2}$ .

Tegyük fel, hogy  $i = 2$ , és  $e_1 = (v_1, -v_2)$ ,  $e_2 = (v_2, -v_3)$ ,  $e_3 = (v_3, -v_4)$ . Ekkor az  $e_2$ -re illeszkedő hídélek  $f_1 = (v_1, v_2)$ ,  $f_2 = (-v_2, -v_3)$ ,  $f_3 = (v_2, v_3)$ ,  $f_4 = (-v_3, -v_4)$ . Legyen  $\varphi : R^d \rightarrow R^d$  leképezés, melyre

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_d) = (-x_4, -x_3, -x_2, -x_1, -x_5, \dots, -x_d).$$

Ekkor  $\varphi(e_2) = e_2$ , és a  $\varphi$  leképezés az  $f_1, f_2, f_3, f_4$  hídélemeket egymás között permutálja, azaz  $\varphi(f_1) = f_4$ ,  $\varphi(f_2) = f_3$ ,  $\varphi(f_3) = f_2$ ,  $\varphi(f_4) = f_1$ . Legyen  $C$  a  $B$  gömb középpontja, ekkor  $C' := \frac{1}{2}(\varphi(C) + C)$  a  $B' := \frac{1}{2}(\varphi(B) + B)$  szimmetrizált gömb középpontja. Mivel

$$B' \cap f_1 \supset \frac{1}{2}(\varphi(B \cap f_1) + (B \cap f_1)) = \frac{1}{2}((B \cap f_4) + (B \cap f_1)),$$

ezért  $B'$  legalább akkora szakaszokat fed le a hídélekből mint  $B$ . Triviális, hogy  $\varphi(C') = C'$ . Koordinátákkal felírva  $C' = (\alpha, \beta, -\beta, -\alpha, 0, \dots, 0)$ . A  $v_2, -v_3$  pontoknak a  $B$  gömb határán kell lenniük, mert ha a  $B$  gömb belsejében helyezkednének el, akkor  $C'$  eltolható lenne a  $v_4 - v_1 - v_2 + v_3$  vektorral párhuzamosan úgy, hogy  $\Phi(B')$  nőne. Ekkor

$$d(C', v_2) = d(C', -v_3) = 2\alpha^2 + (1 - \beta)^2 + \beta^2 = \sqrt{\frac{11}{20}},$$



amit a következő formában is írhatunk

$$\alpha^2 + 9 \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\beta \right)^2 = \frac{1}{40}.$$

Írjuk fel  $\alpha$  és  $\beta$  függvényében a lefedett hídélek összhosszát, azaz  $\Phi(\alpha, \beta)$  értékét, majd becsüljük meg.

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta) &= 4 \left( \left\langle C' - v_2, \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left\langle C' - v_2, \frac{v_3 - v_2}{\sqrt{2}} \right\rangle \right) = \\ &= 2\sqrt{2}(\alpha - 3\beta + 2) = 2\sqrt{2} \left( \alpha + 9 \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\beta \right) + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

A négyzetes és a számtani közepet összehasonlítva láthatjuk, hogy  $\Phi(\alpha, \beta)$  akkor maximális, ha  $\alpha = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\beta$ , amiből  $\alpha = \frac{1}{20}$ ,  $\beta = \frac{7}{20}$  és ekkor  $\Phi(\alpha, \beta) = 2\sqrt{2}$ . Ebből pedig következik a (7) pont állítása.

Az (1)–(7) pontok segítségével rátérünk a 4. Állítás bizonyítására. (1)–(6)-ból következik, hogy  $G$  gráf olyan diszjunkt körök uniója, melyek mindegyike legalább 4 élből áll. A (7) állítás szerint a  $B_1, \dots, B_d$  gömbök a hídélekből összesen kevesebb mint  $d2\sqrt{2}$  hosszúságú szakaszokat fednek le, tehát marad lefedetlen szakasz ellentmondásban az (5) ponttal. ■

A 3. és 4. Állítás bizonyítja a kimondott Tételt  $d \geq 4$  esetben. ■

### 3. 2d darab gömb esete

**Tétel:**  $R_d^{2d} = 1/2$ .

**Bizonyítás:** Tegyük fel, hogy a  $2d$  darab gömb sugara legfeljebb  $1/2$ . Ekkor a keresztpolitóp minden csúcsát más más gömb kell fedje, de valamelyiknek fednie kell  $O^d$  középpontját is, tehát ekkor  $R_d^{2d} \geq 1/2$ . Másrésztől könnyen látható, hogy a  $\pm \frac{1}{2}v_i$ ,  $i = 1, \dots, d$  középpontú  $R = \frac{1}{2}$  sugarú gömbök lefedik  $O^d$ -t. ■

## 5. fejezet

### A $d$ -dimenziós gömb fedése $d+3$ gömbbel

$S^d$  fedését vizsgáljuk  $n$  darab egyenlő sugarú szférikus gömbbel, ha  $d \geq 3$ . (A  $d = 2$  esetet lásd Fejes Tóth G. [7].) Nagyon kevés esetben ismert az  $S^d$ -t fedő egybevágó szférikus gömbök minimális sugara. Az ismert esetek a következők:

- Ha  $n \leq d + 1$ , akkor a minimális szférikus gömbsugár  $\pi/2$  (ez abból következik, hogy a gömbök középpontjai  $E^{d+1}$  egy hipersíkjában vannak).
- Ha  $n = d + 2$ , akkor az  $S^d$ -t fedő gömbök középpontjai egy  $E^{d+1}$ -beli szabályos szimplex csúcsai, (lásd például ifj. Böröczky K., Wintsche G. [4]).
- Ha  $d = 3$  és  $n = 8$ , akkor a gömközéppontok egy  $E^4$ -beli szabályos keresztpolitóp csúcsai, (lásd L. Dalla et al. [6]).

Ezek alapján kimondhatjuk a következő sejtést.

**Sejtés:** Legyen  $d \geq 2$ ,  $n$  az  $S^d$ -t fedő egybevágó minimális sugarú szférikus gömbök száma és  $d + 2 \leq n \leq 2d + 2$ . Ekkor a gömbök középpontjainak konvex burka  $E^{d+1}$ -ben előáll egységgömbbe írható, páronként ortogonális  $\lceil \frac{d+1}{n-d-1} \rceil$  és  $\lfloor \frac{d+1}{n-d-1} \rfloor$  dimenziós szabályos szimplexek konvex burkaként, ahol a szimplexek száma  $n - d - 1$ .

Megjegyezzük, hogy a sejtés teljesül  $d = 2$  esetén, (lásd Fejes Tóth G. [7]). Ebben a fejezetben az  $n = d + 3$  esetet igazoljuk.

**Tétel:** Ha  $d + 3$  minimális sugarú kongruens szférikus gömb lefedi  $S^d$ -t, akkor középpontjaik konvex burka  $E^{d+1}$ -ben megegyezik az egységgömb köré írható  $\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$  és  $\lceil \frac{d+1}{2} \rceil$ -dimenziós szimplexek konvex burkával.

A tétel bizonyítása az alábbi lemmán alapszik.

**Lemma:** A  $\varphi < \frac{\pi}{2}$  sugarú szférikus gömbök pontosan akkor fedik le  $S^d$ -t, ha a gömbök középpontjainak konvex burka tartalmazza az origó középpontú  $\cos \varphi$  sugarú gömböt  $E^{d+1}$ -ben.

**Bizonyítás:** Jelölje  $B(r, x)$  az  $x$  középpontú  $r$  sugarú szférikus gömböt. Először tegyük fel, hogy a  $\varphi < \frac{\pi}{2}$  sugarú gömbök lefedik  $S^d$ -t, és jelöljük  $P$ -vel a középpontjaik konvex burkát. Mivel  $\varphi < \frac{\pi}{2}$ , ezért  $P$  belsejében tartalmazza az origót. Ha  $F$  egy lapja  $P$ -nek, akkor  $F$  affín burka aff  $F$  egy  $B(\psi, y)$ ,  $\psi < \frac{\pi}{2}$  sugarú szférikus gömbben metszi  $S^d$ -t. Most  $y$  beleeseik  $P$  valamelyik csúcsa körüli  $\varphi$

sugarú szférikus gömbbe, tehát  $\psi \leq \varphi$ . Ebből következik, hogy aff  $F$  origótól vett euklideszi távolsága legfeljebb  $\cos \varphi$ .

Fordítva, legyenek a  $P$  politóp csúcsai  $S^d$ -n, és tegyük fel, hogy  $P$  tartalmaz egy origó középpontú  $\cos \varphi$  sugarú gömböt. Bármely  $y \in S^d$  pont esetén  $P$  metszi  $B(\varphi, y)$  konvex burkát  $E^{d+1}$ -ben, és így  $B(\varphi, y)$  tartalmazza  $P$  valamelyik  $v$  csúcsát. Ebből következik, hogy  $y \in B(\varphi, v)$ . ■

**Tétel bizonyítása:** A tétel bizonyításához tekintsünk egy  $P \subset B^{d+1}$  politópot, amelybe maximális sugarú  $B$  gömböt írtunk. Megmutajuk, hogy a maximum  $d+3$  csúcsú  $P$  optimális politóp esetén, a  $B$  gömb középpontja az origó.

Ha  $P$ -nek csak  $d+2$  csúcsa van, akkor  $P$  egy szimplex a  $d+1$  dimenziós térben. Válasszunk egy  $v \in P$  csúcsot és egy  $u \in S^d$  pontot úgy, hogy az  $uv$  szakasz messe  $P$  belsejét. Legyen  $P'$  a  $P$  és  $u$  konvex burka. Ekkor  $P'$ -nek  $d+3$  csúcsa van, és  $P'$ -nek minden olyan lapja mely érinti  $B$ -t, tartalmazza  $v$ -t. Ezért  $B$ -t fel lehet nagyítani  $v$ -ből úgy, hogy még a nagyított kép is része  $P'$ -nek, ami ellentmondás.

Ebből következik, hogy  $P$ -nek  $d+3$  csúcsa van. A Radon tétel szerint  $P$  előáll mint egy  $k$ -dimenziós  $S$  és egy  $m$ -dimenziós  $T$  szimplex konvex burka, ahol  $k+m = d+1$ ,  $k, m \geq 1$  és  $S \cap T \neq \emptyset$ . Ebből következik, hogy  $S$  és  $T$  egy pontban metszik egymást, és ez a pont nem csúcsa  $P$ -nek. Jelöljük ezt a pontot  $q$ -val.

Következő lépésként tegyük fel, hogy  $P$ -nek  $v$  csúcsa  $B^{d+1}$  belsejében van, és legyen például csúcsa  $T$ -nek. Válasszunk egy olyan  $v'$  pontot  $P$ -n kívül, hogy a  $v'v$  sugár messe  $P$  belsejét, és  $P$ -nek bármely olyan  $F$  lapját, amely nem tartalmazza belsejében  $v$ -t. A  $v'$  az aff  $F$  által meghatározott olyan nyílt féltérben fekszik, mely metszi  $P$ -t. Legyen  $P'$  a  $P$  és  $v'$  konvex burka, és vegyük észre, hogy  $P'$ -nek szintén  $d+3$  csúcsa van. Válasszuk  $T$ -nek egy  $v$ -től különböző  $w$  csúcsát. Mivel  $P$  bármely lapja tartalmazza  $v$ -t vagy  $w$ -t, ezért  $P'$  bármely lapja tartalmazza  $v'$ -t vagy  $w$ -t. De  $P'$  semelyik  $B$ -t érintő lapja sem tartalmazza  $v'$ -t, ezért  $B$  nagyítható  $w$ -ből úgy, hogy a nagyított gömb még része  $P'$ -nek. Ismét ellentmondásra jutottunk, azaz  $P$  minden csúcsa  $S^d$ -n helyezkedik el.

Végül tegyük fel, hogy létezik egy  $vw$  él mondjuk  $S$ -ben, és egy  $u$  csúcsa  $P$ -nek, hogy  $d(u, v) \neq d(u, w)$ . Legyen  $H$  a  $vw$  szakaszfelező merőleges hipersíkja, és jelölje  $X'$  egy tetszőleges  $X$  alakzat Steiner-szimmetrizáltját  $H$ -ra nézve. Vegyük észre, hogy  $P' \subset B^{d+1}$ , és  $P'$  egy  $d+3$  csúcsú politóp. Mivel  $B' \subset P'$ , ezért  $P'$  egy optimális politóp  $B^{d+1}$ -ben – ahogy azt kívántuk –, valamint  $u'$  csúcsa  $P'$ -nek  $B^{d+1}$  belsejében van, ami ellentmondás. Ezek alapján  $S$  és  $T$  olyan szabályos  $k$

illetve  $m$ -dimenziós szimplex, melyek affín burka ortogonális, és metszetük a közös körülírtató gömbjük középpontja.

Ebből következik hogy  $P$ -nek egyetlen beírt gömbje van, melynek középpontja az origó, és ez a gömb  $P$  minden lapját érinti.  $P$ -nek bármely  $C$  lapja  $S$  egy  $(k-1)$ -dimenziós  $F$  lapjának és  $T$  egy  $(m-1)$ -dimenziós  $G$  lapjának konvex burka.  $F$  és  $G$  távolsága az origótól  $\frac{1}{k}$  illetve  $\frac{1}{m}$ , valamint  $F \subset (\text{lin } G)^\perp$  és  $G \subset (\text{lin } F)^\perp$ . Ezek alapján  $C$  távolsága az origótól egy olyan derékszögű háromszög maximális magassága, melynek két befogója  $\frac{1}{k}$  és  $\frac{1}{m}$ . A magasságra kapjuk, hogy  $\frac{1}{\sqrt{k^2+m^2}}$ . Mivel  $k+m = d+1$ , ezért  $k^2+m^2$  minimális, ha  $k$  és  $m$  a lehető legközelebb esik egymáshoz, azaz  $S$  illetve  $T$  dimenziója  $k$  és  $m$  egyenlő  $\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$  illetve  $\lceil \frac{d+1}{2} \rceil$ -vel, avagy fordítva. Ezzel bizonyítást befejeztük. ■

## 6. fejezet

### A $d$ -dimenziós gömb fedésének sűrűsége

C.A. Rogers [12] látta be egy nagyon bonyolult bizonyítás segítségével, hogy az  $S^d$ -t lefedő  $\varphi$  sugarú szférikus gömbök sűrűsége legfeljebb

$$(1 + c \cdot \frac{\ln \ln d}{\ln d}) \cdot d \cdot \left( \ln d + \ln \frac{1}{\sin \varphi} \right),$$

ahol  $c$  egy abszolút konstans.

Ebben a fejezetben egyszerűbb bizonyítást adunk egy javított sűrűségbecslésre.

**Tétel:** Ha  $\varphi < \frac{\pi}{2}$ , akkor létezik  $S^d$ -nek  $\varphi$  sugarú gömbökkel történő fedése, melynek sűrűsége legfeljebb

$$(1 + c \cdot \frac{\ln \ln d}{\ln d}) \cdot d \ln d,$$

ahol  $c$  egy abszolút konstans.

Jelölje a  $\varphi$  sugarú  $x$  középpontú gömböt  $B(\varphi, x)$ , és legyen a valószínűségi mérték a szokásos térfogatarányos mérték, azaz

$$\Omega(\varphi) = \frac{|B(\varphi, x)|}{|S^d|}.$$

Az alapötlet a következő. Véletlenszerűen elhelyezünk majdnem  $\varphi$  sugarú köröket, majd a kimaradó részt kitöltjük "kicsi" sugarú körökkel úgy, hogy a két körrendszer együttesen már fedést határozzon meg, majd megbecsüljük a körök számát és a fedés sűrűségét.

A bizonyítás során szükségünk lesz  $\Omega(t\varphi)$  becslésére, ezért előrebocsátjuk a következő lemmát.

**Lemma:**  $\Omega(t\varphi) < t^d \cdot \Omega(\varphi)$ , ha  $1 < t < \frac{\pi}{2\varphi}$ .

**Lemma bizonyítása:** Jelölje  $\kappa_d$  a  $d$ -dimenziós gömb térfogatát, ekkor

$$|B(\varphi, x)| = d\kappa_d \cdot \int_0^\varphi \sin^{d-1} \psi \, d\psi,$$

amiből

$$\frac{\partial}{\partial t} |B(t\varphi, x)| = d\kappa_d \cdot \varphi \cdot \sin^{d-1}(t\varphi) < d\kappa_d \cdot \varphi \cdot t^{d-1} \sin^{d-1} \varphi < \frac{\partial}{\partial t} (t^d \cdot |B(\varphi, x)|). \blacksquare$$

**Tétel bizonyítása:** Legyen  $\eta = \frac{1}{d \ln d}$ . Elhelyezünk  $N$  darab  $x_1, \dots, x_N$  körközpontot véletlenszerűen az  $S^d$ -n adott egyenletes eloszlás szerint, egymástól függtelenül. Ekkor  $(1 - \Omega((1 - \eta)\varphi))^N$  annak a valószínűsége, hogy egy pont nincs lefedve egyetlen  $B((1 - \eta)\varphi, x_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  gömbbel sem. Ezt a valószínűséget felülről becsülhetjük az  $1 - t < e^{-t}$  egyenlőtlenség alapján  $e^{-N\Omega((1-\eta)\varphi)}$ -vel.

A következő lépésben annyi  $\eta\varphi$  sugarú gömböt helyezünk el  $S^d$  még le nem fedett részére, amennyit csak lehet. Legyenek ezek a  $B(\eta\varphi, y_j)$ ,  $j = 1, \dots, M$  gömbök. Az  $\eta\varphi$  sugarú gömbök  $M$  száma felülről becsülhető,

$$M \leq \frac{(1 - \Omega((1 - \eta)\varphi))^N}{\Omega(\eta\varphi)} < \frac{e^{-N\Omega((1-\eta)\varphi)}}{\Omega(\eta\varphi)}.$$

Ekkor bármely  $z \in S^d$  pont körüli  $B(\eta\varphi, z)$  gömb metszi valamelyik  $B((1 - \eta)\varphi, x_i)$  vagy  $B(\eta\varphi, y_j)$  gömböt, s ezért az  $\{x_i, y_j\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$  középpontú  $\varphi$  sugarú gömbök  $S^d$  fedését adják. A gömbök száma  $n = N + M$  a korábbi egyenlőtlenség alapján becsülhető,

$$n = N + M < N + \frac{e^{-N\Omega((1-\eta)\varphi)}}{\Omega(\eta\varphi)}.$$

Deriválva kapjuk, hogy az egyenlőtlenség jobboldala közel van a minimumhoz, ha

$$N = \left\lfloor \frac{1}{\Omega((1 - \eta)\varphi)} \cdot \ln \frac{\Omega((1 - \eta)\varphi)}{\Omega(\eta\varphi)} \right\rfloor.$$

Nyilvánvaló, hogy  $\Omega((1 - \eta)\varphi) < \frac{1}{2}$ , amiből következik, hogy az  $n$  darab  $\varphi$  sugarú gömbbel történő fedés sűrűsége

$$n \cdot \Omega(\varphi) < \frac{\Omega(\varphi)}{\Omega((1 - \eta)\varphi)} \cdot \left( \ln \frac{\Omega((1 - \eta)\varphi)}{\Omega(\eta\varphi)} + \sqrt{e} \right).$$

A további becsléshez  $\Omega((1 - \eta)\varphi)$  és  $\Omega(\varphi)$  közötti kapcsolatot lehet becsülni a lemma alapján.

$$n \cdot \Omega(\varphi) < \frac{1}{(1 - \eta)^d} \cdot \left( \ln \frac{(1 - \eta)^d}{\eta^d} + \sqrt{e} \right).$$

Kihasználva, hogy  $\eta = \frac{1}{d \ln d}$ , kapjuk hogy

$$n \cdot \Omega(\varphi) < (1 + c \cdot \frac{\ln \ln d}{\ln d}) \cdot d \ln d,$$

amit bizonyítani akartunk. ■

**Megjegyzés:** ifj. Böröczky K. és Wintsche G. [4], belátja, hogy  $S^d$ -nek létezik olyan fedése tetszőleges sugarú egyforma gömbi gömbökkel, ahol bármely pont legfeljebb  $400 \cdot d \ln d$ -szer van lefedve.

Ha  $\varphi$  kicsi, akkor a  $\varphi$  sugarú szférikus gömbökkel való optimális fedés sűrűsége közel van az Euklideszi tér egyenlő sugarú gömbökkel való fedésének minimális sűrűségéhez. Ez utóbbi sűrűségre Coxeter-Few-Rogers [5] adott  $c \cdot d$  alakú alsó becslést, ahol  $c > 0$  abszolút konstans. Tehát ha  $\varphi$  kicsi, akkor a  $\varphi$  sugarú szférikus gömbökkel való fedés sűrűsége legalább  $\frac{c}{2} \cdot d$ , azaz a Tétel jelentősen nem javítható.

---

## Hivatkozások

- [1] **Bezdek, K.:** Densest packing of small number of congruent spheres in polyhedra. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 30 (1987), 177–194.
- [2] **Bezdek, A.; Bezdek, K. and R. Connelly:** Finite and Uniform Stability of Sphere Packings. *Discrete Comput. Geom.* 20 (1998), 111–130.
- [3] **Böröczky, K. Jr.; Wintsche, G.:** Sphere packings in the regular crosspolytope. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 43 (2000), 151–157 (2001).
- [4] **Böröczky, K. Jr.; Wintsche, G.:** Coverings by spherical balls. *Disc. Comp. Geom. The Goodman–Pollack Festschrift, Springer* (közlésre elfogadva).
- [5] **Coxeter, H.S.M.; Few, L.; Rogers, C.A.:** Covering space with equal spheres. *Mathematika* 6 (1959), 147–157.
- [6] **Dalla, L.; Larmann, D.G.; Mani-Levitska, P.; Zong Ch.:** The blocking numbers of convex bodies. *Disc. Comp. Geom.* 24 (2000), 267–277.
- [7] **Fejes Tóth, G.:** Packing and Covering. *Handbook of Discrete and Combinatorial Geometry, CRC Press New York*, 19–41.
- [8] **Fodor, F.:** The densest packing of 19 congruent circles in a circle. *Geom. Dedicata*, 74 (1999), 139–145.
- [9] **Golser, G.:** Dichteste Kugelpackungen im Oktaeder. *Studia Sci. Math. Hungar.* 12 (1977), no. 3-4, 337–343.
- [10] **Melissen, J.B.M.:** Packing and covering with circles. *PhD dissertation, University of Utrecht*, 1997.
- [11] **Pach, J.; Pankaj, K. A.:** Combinatorial Geometry. *John Wiley & Sons Inc.*, 1995, 65 p.
- [12] **Rogers, C.A.:** Covering a sphere with spheres. *Mathematika* 10 (1963), 157–164.
- [13] **Ryshkov, S. S.; Chepanov, S. A.; Yakovlev, N. N.:** On the disjointness of point systems. (*Russian*) *Translated in Proc. Steklov Inst. Math.* 1992, no. 4, 163–172.
- [14] **Schaer, J.:** The densest packing of 9 circles in a square. *Canad. Math. Bull.* 8 (1965) 273–277.
- [15] **Schaer, J.:** The densest packing of five spheres in a cube. *Canad. Math. Bull.* 9 (1966) 271–274.



- 
- [16] **Schaer, J.:** The densest packing of six spheres in a cube. *Canad. Math. Bull.* 9 (1966) 275–280.
- [17] **Schaer, J.:** On the densest packing of spheres in a cube. *Canad. Math. Bull.* 9 (1966) 265–270.
- [18] **Schaer, J.:** The densest packing of ten congruent spheres in a cube. *Intuitive geometry (Szeged, 1991)*, 403–424, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 63, North-Holland, Amsterdam, 1994.