RÁCSOK, KÖR- ÉS GÖMBELRENDEZÉSEK

PhD értekezés

Végh Attila

Témavezető: Dr. G. Horváth Ákos
BME, Matematika Intézet
Geometria Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Alkalmazott Matematika Szak
2006

1. Bevezetés

Dolgozatunkban a gyökrácsoknak a geometriai kutatás különböző területein való alkalmazásairól szólunk eltekintve a történelmi előzmények hosszas ismertetésétől. Az eredményeket az egyes fejezetekhez kapcsolódóan tárgyaljuk. A doktori értekezés 1. fejezete egy rövid bevezetés, melyben összefoglaljuk eredményeinket és azok kapcsolatát a gyökrácsokkal, kiemelve a 2. fejezetben a 6-dimenziós rácsok minimális vektorainak vizsgálatánál az E_6 rács szerepét, valamint a 3. fejezetben a rácsok DV celláinak merőleges vetületeinél a Z_n, A_n és a D_n rácsokat, továbbá a Voronoi-sejtéssel kapcsolatban az E_8 rács DV celláját. Végül a 4. fejezetben bizonyos $\langle p, q\rangle$ pontrendszerek maximális tömörségét is az A_n, a D_n és az E_7 valamint az E_8 rácsok szolgáltatják. A következőkben definiáljuk ezen speciális gyökrácsokat. Az n-dimenziós kockarács:

$$Z_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z}\},$$

ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát jelöli. Az $(n+1)$-dimenziós kockarácsból megkapható az n-dimenziós A_n rács:

$$A_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in Z_{n+1} : x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

A sakktáblarácsnak is nevezett D_n rács definíciója:

$$D_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Z_n : x_1 + x_2 + \dots + x_n \text{ páros}\}.$$

A későbbiekben fontos szerepet játszó E_8 és a segítségével megadott E_7, E_6 rácsok definíciói:

$$E_8 = \{(x_1, x_2, \dots, x_8) : x_i \in \mathbb{Z} \text{ vagy } x_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \text{ minden } x_i\text{-re}, \sum x_i \equiv 0 \pmod 2),$$

$$E_7 = \{(x_1, x_2, \dots, x_8) \in E_8 : x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 0\},$$

$$E_6 = \{(x_1, x_2, \dots, x_8) \in E_8 : x_1 + x_8 = x_2 + \dots + x_7 = 0\}.$$

2. Rácsok minimális vektorai

Legyen $\mathbb{E}^n(\mathbf{0}, \mathrm{V}^n(\mathbb{R}, \langle\ ,\ \rangle))$ egy n-dimenziós euklideszi tér kitüntetett $\mathbf{0}$ kezdőponttal, az $\mathbb{R}$ valós számok feletti n-dimenziós V^n vektortérrel és egy pozitív definit szimmetrikus $\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{V}^n \times \times \mathrm{V}^n \to \mathbb{R}, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ skalár-szorzattal. Legyen $\mathrm{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} = \{\mathbf{a}_i\}$ a V^n egy bázisa. A $G := (a_{ij}) := (\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle)$ jelölje a Gram mátrixot. Az A bázishoz tartozó $\mathbb{Z}$-rács definíciója:

$$\Lambda(\mathrm{A}, \mathbb{Z}) = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_i : x_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A Λ rács $m(\Lambda) \in \mathbb{R}^+$ minimumát következőképpen definiáljuk: Létezik olyan $\mathbf{m} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\} =: \dot{\Lambda}$, nullvektortól különböző rácsvektor, hogy $m(\Lambda) := |\mathbf{m}| \leq |\mathbf{v}|$ bármely $\mathbf{v} \in \dot{\Lambda}$-ra teljesül. Az $\mathbb{E}^n$-beli hasonlóság miatt feltehetjük, hogy $m(\Lambda) = 1$. A minimális vektorok halmazát Λ minimumának nevezzük és $\mathrm{M}(\Lambda)$-val jelöljük.

$$\mathrm{M}(\Lambda) := \{\mathbf{m} \in \Lambda : |\mathbf{m}| = m(\Lambda) = 1\}.$$

A Λ rács minimumainak A-beli maximális koordinátája a következő:

$$L\left(\mathrm{A}\right) := \max\left\{x_i \in \mathbb{Z} : \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{m}, \mathbf{m} \in \mathrm{M}(\Lambda)\right\} \in \mathbb{N}.$$

Tekintsük a Λ minimumainak A bázisbeli maximális koordinátái közül a legkisebbet, miközben a Λ rács A-bázisát változtatjuk, azaz definiáljuk:

$$L(\Lambda) := \min\{L(\mathrm{A}) \in \mathbb{N} : \mathrm{A} \ \text{ tetszőleges bázisa } \ \Lambda\text{-nak}\}.$$

Végezetül a Λ rácsot is változtatjuk $\mathbb{E}^n$-ben, így:

$$L_n := L(\mathbb{E}^n) := \max\left\{L(\Lambda) \in \mathbb{N} : \Lambda \ \text{ tetszőleges rács } \mathbb{E}^n\text{-ben}\right\}.$$

Általánosságban feladatunk L_n meghatározása, azaz olyan bázis keresése $\mathbb{E}^n$ tetszőleges rácsában, melyben a rács minimumainak a maximális koordinátája a lehető legkisebb. G. Horváth Á. [30]-ban bizonyította, hogy $L_n = 1$ az $n \leq 5$ esetben, valamint [31]-ben belátta, hogy gyökrácsokra $L(Z_n) = L(A_n) = L(D_n) = L(E_6) = L(E_7) = 1$ és $L(E_8) = 2$.

Azt mondjuk, hogy a Λ rács *bővítés*e a $\bar{\Lambda}$ rácsnak, ha $\bar{\Lambda} \subset \Lambda$. Ez a bővítés *megengedett*, ha $m(\Lambda) = m(\bar{\Lambda})$, azaz a minimum nem csökken bővítés során. A megengedett bővítés *index*e egy szám, melyet a következőképpen adunk meg: ind $\left(\Lambda/\bar{\Lambda}\right) = v\left(\bar{\Lambda}\right)/v\left(\Lambda\right)$, ahol $v\left(\Lambda\right)$ a Λ rács alapparallelepipedonjának a térfogata (lásd: [30], [31], [29]). S.S. Ryshkov [50] és N.V. Zaharova-N.V. Novikova [70] $n \leq 8$ esetén meghatározta az összes megengedett bővítést $\mathbb{E}^n$-ben.

S.S. Ryshkov [50]-beli eredménye alapján feltehetjük, hogy a vizsgált $\Lambda \subset \mathbb{E}^n$ rácsnak n lineárisan független minimuma van. Ezek az $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ minimális vektorok egy $\bar{\Lambda} \subset \Lambda$ részrácsot határoznak meg, ahol $m(\Lambda) = m(\bar{\Lambda})$. Így megengedett bővítést kapunk.

2.1. A 6-dimenziós rácsok

A fentieket $n = 6$-ra alkalmazva $\Lambda \subset \mathbb{E}^6$ rács 6 lineárisan független minimális vektort tartalmaz. Legyen $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_6\}$ a $\bar{\Lambda} \subset \Lambda$ részrács egy bázisa, ahol $\mathbf{a}_i$ egység hosszú minimális vektorok. A Λ rács a $\bar{\Lambda}$ rácsnak egy megengedett bővítése. Tekintsük azt a $\bar{\Lambda}$ rácsot, melyre ind $\left(\Lambda/\bar{\Lambda}\right)$ maximális. A $\bar{\Lambda}$ rács Gram-mátrixát jelölje G.

A fentiek alapján [50] szerint összesen 3 különböző 2-indexű, egy 3-indexű és egy 4-indexű megengedett bővítés van 6-dimenzióban. Ennek megfelelően 3 segédtételt fogalmazunk meg. A 2.6 segédtételben azt az esetet vizsgáljuk, mikor a megengedett bővítés indexe 4. Hasonlóság erejéig egy olyan rács van, melynek az indexe 4. Ez könnyen adódik [50]-ből, de a Gram-mátrix elemeinek az összegét becsülve egyszerűen bizonyítjuk is. Az ilyen becslések a további esetek tárgyalásakor is fontos szerepet játszanak. Ebben az esetben a karakterisztikus mátrix, azaz a rács összes minimumából álló mátrix, könnyedén felírható. A karakterisztikus mátrixot $[\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_\sigma]$-val jelöljük (lásd: [50], [30], [31]), ahol $\pm\mathbf{m}_1, \ldots, \pm\mathbf{m}_\sigma$ a rács összes különböző minimuma. Végezetül alkalmas báziscserét végrehajtva a karakterisztikus mátrix minden eleme nyilvánvalóan $0, -1, +1$ lesz.

A 2.8 segédtételben a 3-indexű megengedett bővítéseket tanulmányozzuk. Szintén a Gram-mátrix elemeinek összegét becsülve nagyon érdekes feltételeket kapunk. Ezen feltételeknek megfelelően két osztályba sorolhatjuk azokat a rácsokat, melyeknek az indexe 3. Az első esetben az osztályhoz tartozó minden rácsra felírjuk az összes lehetséges minimumot, majd ezeken a rácsokon egy alkalmas báziscserét végrehajtva elérjük, hogy a rácsok összes lehetséges minimumára a koordináták egyenlők legyenek $0, -1, +1$-gyel. A második esetben bebizonyítjuk, hogy bármely ehhez az osztályhoz tartozó Λ rácsra $\mathrm{M}(\Lambda) \subseteq \mathrm{M}(E_6)$, ahol $\mathrm{M}(\Lambda)$ jelöli a Λ rács összes minimumát. Felhasználva a 2.3 tételt és az E_6 gyökrács néhány tulajdonságát ([8],[31]), ebben az esetben is könnyen igazolható a tétel. Megjegyezzük, hogy a bizonyítás során egy új konstrukciót is megadunk az E_6 rácsra, nevezetesen, mint egy speciális bővítését a G Gram-mátrixszal megadott $\bar{\Lambda}$ rácsnak.

A 2.13 segédtételben a 2-indexű megengedett rácsbővítéseket vizsgáljuk. A bizonyítás három részre oszlik a három különböző 2-indexű megengedett bővítésnek megfelelően. Ezen esetek bizonyításának az alapötlete hasonló a [31]-beli bizonyításokhoz. Mindhárom esetben felírjuk az összes E^6-beli adott esethez tartozó rács minden lehetséges minimumát és bebizonyítjuk, hogy a Λ rácsnak alkalmas bázisát választva a minimumok koordinátái $\pm 1, 0$. Tehát összességében a következő tételt bizonyítjuk:

2.5. Tétel. ([64]) *L_6 egyenlő 1-gyel, azaz a fentieknek megfelelően, minden 6-dimenziós euklideszi Λ rácsnak van olyan bázisa, melyben a Λ rács minimális vektorainak maximális koordinátája legfeljebb 1.*

2.2. A 7-dimenziós rácsok

Tekintsük a Λ rács $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ bázisát egy tetszőleges ortonormált bázisban felírva. A bázisvektorok koordinátáiból képezett mátrixot A-val jelöljük. Az A mátrix segítségével is definiálhatjuk a Λ rácshoz tartozó pozitív definit kvadratikus formát:

$$Q(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T G\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n,$$

ahol a $G = A^T A$ Gram-mátrixot az előzőekben is használtuk. Mivel a bizonyításhoz szükséges eredmények pozitív definit kvadratikus formákra vannak megfogalmazva, ezért térünk át ebben a fejezetben erre a tárgyalásmódra. Kvadratikus formákról csak a tételünk szempontjából legfontosabb eredményeket tárgyaljuk. További fogalmak és eredmények [29], [8], [45]-ben részletesen ismertetésre kerülnek. A Λ rács minimumának megfelelően definiálhatjuk a Q pozitív definit kvadratikus forma homogén minimumát:

$$m(Q) := min\{Q(\mathbf{z}) : \text{ahol} \quad \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\}$$

Legyen $\mathrm{M}(Q)$ azoknak a $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ pontoknak a halmaza, melyeknél $Q(\mathbf{z})$ minimális. Egy Q pozitív definit kvadratikus forma *tökéletes*, ha a minimális vektorai által egyértelműen meghatározott, azaz pontosan a $\mathbf{z}_i \in \mathrm{M}(Q)$ minimális vektorok a megoldásai a $Q(\mathbf{z}) = m(Q)$, $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$ egyenletnek.

A tökéletes formák $n \leq 7$ dimenzióra ismertek. Síkban J.L. Lagrange [43] foglalkozott a kérdéssel és egy tökéletes formát talált. Térben C.F. Gauss [26] nevéhez fűződik a szintén egy tökéletes forma. A. Korkine és G. Zolotareff [41], [42]-ben 4 és 5-dimenzióban 2, ill. 3 tökéletes formát fedezett fel. A 7 különböző tökéletes formát 6-dimenzióban E.S. Barnes [3] találta meg. K.C. Stacey [54] vizsgálta a 7-dimenziós tökéletes formákat, de a 33-ból egyet elhagyott, melyet J.H. Conway- N.J.A Sloane [9]-ben kiegészített, végül D.O. Jaquet-Chiffelle [40] bizonyította ezek teljességét, melyek Gram mátrixait az A. függelékben felsoroltuk. J. Martinet 8-dimenzióban 10916-nál több tökéletes formát talált. A tökéletes formák listája megtalálható például J.H. Conway- N.J.A Sloane [9]-beli cikkében, valamint C. Batut és J. Martinet [45], [4] munkáiban.

Az L_7 meghatározásánál alapvető szerepet játszik G.F. Voronoi [68]-beli tétele, hogy minden pozitív definit $Q(\mathbf{x})$ kvadratikus formához létezik, olyan $Q^*(\mathbf{x})$ tökéletes forma, melyre

$$\mathrm{M}(Q) \subseteq \mathrm{M}(Q^*).$$

Így elegendő csak az A. függelékben felsorolt tökéletes kvadratikus formák Gram mátrixait vizsgálni. A Gram mátrix és a minimális vektorok koordinátái között az alábbi kapcsolatot áll fenn: ha az $\mathbf{m}$ minimális vektor hossza m, koordinátái valamely rácsbázisban $x_1, x_2, \ldots, x_n$, valamint $D = det(G)$ és D_i a rácsbázis G Gram-mátrixának a_{ii} eleméhez tartozó aldeterminánsa, akkor $|x_i| \leq m\sqrt{\frac{D_i}{D}}$. Továbbá lineáris algebrából közismert, hogy a Λ rács bázisának egy elemi bázistranszformációja ekvivalens, azzal ha a G Gram mátrix i-edik sorának c-szeresét hozzáadjuk a j-edik sorhoz és a kapott mátrixban az i-edik oszlop c-szeresét hozzáadjuk a j-edik oszlophoz. Alkalmas elemi bázistranszformációkat végrehajtva igazoltuk, hogy a rács minimális vektorainak koordinátái mindig kisebbek lesznek 2-nél, így teljesül a következő tétel:

2.18. Tétel. *L_7 egyenlő 1-gyel, azaz minden 7-dimenziós euklideszi Λ rácsnak van olyan bázisa, melyben a Λ rács minimális vektorainak maximális koordinátája legfeljebb* 1.

3. Rácsok Dirichlet-Voronoi cellái

G.L.Dirichlet [15] és G.F.Voronoi [68] vezették be a Dirichlet-Voronoi cella fogalmát, melyet magasabb dimenzióban Voronoi politópnak, Voronoi cellának is neveznek. A következőkben röviden a DV cella elnevezést használjuk. Tekintsünk egy L diszkrét ponthalmazt az $\mathbb{E}^n$ n-dimenziós euklideszi térben. Tetszőleges $P_i \in L$ pont DV cellája azon pontok halmaza, melyek legalább olyan közel vannak P_i-hez, mint tetszőleges más $P_j \in L$ ponthoz, azaz

$$\mathrm{DV}(P_i) = \{x \in \mathbb{E}^n : \mathrm{dist}(x, P_i) \leq \mathrm{dist}(x, P_j) \text{ bármely j-re}\}.$$

A DV cella egy speciális parallelotóp. Egy $\mathcal{P}$ konvex politópot, melynek eltolt példányai fedik a teret és belső pontjaik diszjunktak, valamint az eltolt példányaik lap-lap mentén csatlakoznak, parallelotópnak nevezzük. A fedő parallelotópok centrumai egy n-dimenziós rácsot alkotnak. DV cellákhoz kapcsolódó problémákról lásd [8], [29], [32], [33]. B.A. Venkov [66] és később P. McMullen [47] a következő fontos tételt bizonyította parallelotópokra. A $\mathcal{P}$ politóp, akkor és csak akkor parallelotóp, ha
(i) $\mathcal{P}$ centrálszimmetrikus
(ii) $\mathcal{P}$ minden $(n-1)$-dimenziós lapja is centrálszimmetrikus
(iii) $\mathcal{P}$-nek bármely $(n-2)$-dimenziós lap mentén vett 2-dimenziós merőleges vetülete parallelogramma vagy centrálszimmetrikus hatszög.
A.D. Aleksandrov [1]-ben Venkov bizonyítását egyszerűsítette. A centrálszimmetrikus hatszögnek és a parallelogrammának a fenti (iii) alapján keletkező élei $\mathcal{P}$ bizonyos $(n-1)$-dimenziós lapjainak a vetületei. Ezek az $(n-1)$-dimenziós lapok úgynevezett 2- ill. 3-övet alkotnak. A $\mathcal{P}$ parallelotóp $(n-2)$-dimenziós egymással (kölcsönösen) párhuzamos lapjai az $(n-2)$-dimenziós lapoknak egy zónáját alkotják. Ez a zóna zárt, ha $\mathcal{P}$ parallelotóp bármely $(n-1)$-dimenziós lapjával ennek a zónának vagy nincs közös $(n-2)$-dimenziós lapja vagy kettő van.

B.A. Venkov vezette be az X^k k-dimenziós altér irányában nem nulla kövérségű parallelotóp fogalmát. A $\mathcal{P}$ parallelotóp nem nulla kövérségű X^k mentén ha a $\mathcal{P} \cap (X^k + \mathbf{a})$ metszet k-dimenziós vagy üres az $\mathbf{a}$ vektor bármely eltoltjára. $k = 1$ esetén az X^k k-altér egy egyenes.

Ennek az egyenesnek az irányát egy $\mathbf{z}$ vektor segítségével megadhatjuk. Így a $\mathcal{P}$ parallelotóp $\mathbf{z}$ irányú z kövérsége egyenlő a $\mathbf{z}$-vel párhuzamos egyenesek $\mathcal{P}$-vel vett metszetei közül a minimális hosszúságúval. Ha ez a minimális hossz nulla, akkor a $\mathcal{P}$ parallelotóp $\mathbf{z}$ irányban nulla kövérségű. A $\mathbf{z}$ irányú és z hosszúságú szakaszt jelöljük $S(z)$-vel. V. Grishukhin [28]-ban bebizonyította, hogy a $\mathcal{P}$ parallelotóp $\mathbf{z}$ irányban akkor és csak akkor nem nulla kövérségű, ha $\mathcal{P}$-nek van $\mathbf{z}$-vel párhuzamos zárt él-zónája és $\mathcal{P}$ előállítható az $S(z)$ szakasz és egy $\mathbf{z}$ irányban nulla kövérségű P' parallelotóp Minkowski összegeként, azaz $\mathcal{P}=\mathcal{P}'\oplus S(z)$. Az $\mathbb{E}^d$ térben fekvő d-dimenziós *zonotóp* n egyenes szakasznak a Minkowski-összege, más szóval egy n-dimenziós kocka merőleges vetülete a d-dimenziós altérre. Tehát a következő állítások közül bármely parallelotópra pontosan egy teljesül:
(i) vagy zonotóp
(ii) vagy minden irányban nulla kövérségű parallelotóp
(iii) vagy egy minden irányban nulla kövérségű parallelotópnak és egy zonotópnak a Minkowski összege.

A $\mathcal{P}\oplus S(z)$ Minkowski összeg nem szükségszerűen parallelotóp. V. Grishukhin [27]-ben szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy ez az összeg mikor lesz parallelotóp. A $\mathcal{P}$ parallelotópra a lenti állítások ekvivalensek:
(i) a $\mathcal{P}\oplus S(z)$ Minkowski összeg parallelotóp
(ii) a $\mathbf{z}$ vektor merőleges a $\mathcal{P}$ parallelotóp minden 3-övének legalább egy lapvektorára.

3.1. Rácsok DV celláinak merőleges vetületei

Legyen adott Λ^n n-dimenziós rács. Tekintsük a Λ^n rács P ponton átmenő $(n-1)$-dimenziós H síkkal vett síkmetszetét. Az így kapott $\Lambda^n\cap H$ rácsot jelöljük Λ^{n-1}-gyel, ha $(n-1)$-dimenziós rács.

3.4. Definíció. Ha a $\mathcal{P}$ parallelotóp kitöltéshez tartozó Λ^n rácsnak a Λ^{n-1} $(n-1)$-dimenziós részrácsa rendelkezik az alábbi tulajdonsággal: $\mathbb{R}^n\setminus\bigcup\{\mathcal{P}+\lambda_i \quad \lambda_i\in\Lambda^{n-1}\}$ 2 ívszerűen összefüggő komponensből áll, akkor az $\bigcup\{\mathcal{P}+\lambda_i \quad \lambda_i\in\Lambda^{n-1}\}:=[\Lambda^{n-1}(\mathcal{P})]$ halmazt *parallelotóp réteg*nek az Λ^{n-1} rácsot réteget meghatározó részrácsnak nevezzük.

3.7. Definíció. Ha $\mathcal{P}$ egy DV cella, akkor minden $(n-1)$-dimenziós F laphoz társíthatunk egy rácsvektort, mely a $\mathcal{P}_i$ DV cella középpontjába mutat, ahol $F=\mathcal{P}\cap\mathcal{P}_i$, így ez a vektor az F lap egy meghatározó vektora. Másrészt DV cella esetén ez a vektor merőleges az F lapra, így ez a $\overrightarrow{PP_i}$ vektor egyben F lap egy speciális normálvektora. Ezt a speciális normálvektort az egységes tárgyalás kedvéért F *általánosított lapvektor*ának nevezzük. Legyen most G egy $(n-2)$-dimenziós lap és tegyük fel, hogy egy másik $\mathcal{P}_i$ DV cellára $G=\mathcal{P}\cap\mathcal{P}_i$. Ez a G lap egy 2-övet határoz meg $\mathcal{P}$-n. A G laphoz is társíthatjuk Λ^n-nek egy rácsvektorát mégpedig a G lapot tartalmazó két $(n-1)$-dimenziós lap meghatározó vektorainak (DV celláról szólva általánosított lapvektorainak) az összegét (azaz $\overrightarrow{PP_i}=\overrightarrow{PP_j}+\overrightarrow{PP_k}$). Ezt a vektort a G laphoz tartozó *általánosított lapvektor*nak nevezzük.

A következő tételben arra adunk szükséges és elégséges feltételt, hogy egy rács n-dimenziós DV cellájának a merőleges vetülete mikor lesz a Λ^{n-1} rács $(n-1)$-dimenziós DV cellája, azaz pontosan:

3.5. Tétel. ([65]) *A* $\mathrm{DV}^n(P)$ *cellára és* $\mathbf{z}$ *vektorra a következő állítások ekvivalensek:*

(i) $\mathrm{DV}^n(P)$ *cella* $\mathbf{z}$ *irányú merőleges vetülete a* $\mathbf{z}$*-re merőleges* $(n-1)$*-dimenziós* H *síkra egy* Λ^{n-1} *rács* $(n-1)$*-dimenziós* $\mathrm{DV}^{n-1}(P)$ *cellája, ahol* $\Lambda^{n-1}=\Lambda^n\cap H$.

(ii) *A* $\mathbf{z}$ *vektor merőleges minden 2- és 3-övnek legalább egy általánosított lapvektorára.*

(iii) *Az* $\mathbb{R}^n \setminus [\Lambda^{n-1}(\mathrm{DV}^n(P))]$ *két ívszerűen összefüggő komponensből áll. (A parallelotóp réteg definíciója alapján* $[\Lambda^{n-1}(\mathrm{DV}^n(P))] = \bigcup\{\mathrm{DV}^n(P) + \lambda_i \quad \lambda_i \in \Lambda^{n-1}\}$*)*

A dolgozatban a fenti tételt alkalmazzuk a Z_n és D_n gyökrácsokra, így adódik:

3.6. Tétel. ([65]) *A* Z_n *n-dimenziós kockarács DV cellájának* $(\pm\mathbf{e}_1 \pm \cdots \pm \mathbf{e}_n)$ *irányú merőleges vetülete az* A_{n-1} *gyökrács DV celláját adja.*

3.8. Tétel. ([65]) *A* $\mathrm{DV}^n(D_n)$ *cellának a* $\pm\mathbf{e}_i$ *irányú merőleges vetülete a* $\mathrm{DV}^{n-1}(D_{n-1})$ *cella és a* $(\pm\mathbf{e}_1 \pm \cdots \pm \mathbf{e}_n)$ *irányú vetülete a* $\mathrm{DV}^{n-1}(A_{n-1})$ *cella.*

3.2. Az E_8 rács DV cellája

Tekintsük a P és Q parallelotópokat valamint a $<$ relációt. Azt mondjuk, hogy $P < Q$ akkor és csak akkor ha létezik $\mathbf{v}$ irány, hogy $P \oplus \lambda\mathbf{v} = Q$, ahol $\oplus$ jelöli a Minkowski összeget. Ebben az esetben P-t Q összenyomottjának, ill. Q-t P kihúzottjának nevezzük. Könnyen látható, hogy a $\{\text{parallelotópok}, <\}$ részben rendezett halmaz maximális és minimális elemmel.

Ha a $\mathcal{P}$ parallelotóp $\mathbf{z}$ irányban nem nulla kövérségű, akkor az árnyékhatár csupa $(n-1)$-lapból áll, melyet B.A. Venkov a $\mathbf{z}$-vel párhuzamos lapoknak nevezett. Ennek általánosításaként tekintsük a következő fogalmakat. Az általánosított lapvektor mintájára definiálható az általánosított meghatározó vektor.

3.8. Definíció. Az árnyékhatár $(n-2)$-lapjai, melyek nem tartoznak árnyékhatárbeli $(n-1)$-laphoz tartozhatnak 2- vagy 3-övhöz is. Ha 2-övhöz tartozik egy ilyen $(n-2)$-lap, akkor centrálszimmetrikus és középpontja egy rácsvektor felezőpontja. Ezt a Λ^n-beli O kezdőpontú rácsvektort *általánosított meghatározó vektor*nak nevezzük. Ez a 2-öv 2 valódi meghatározó vektorának az összege vagy különbsége. 3-övhöz tartozó $(n-2)$-lapnak nincs általánosított meghatározó vektora.

3.9. Definíció. A $\mathbf{z}$ irányú árnyékhatár valódi és általánosított meghatározó vektorai által kifeszített rácsot $\mathbf{z}$ irányú *Venkov-rács*nak nevezzük és Λ_z-vel jelöljük.

Megjegyezzük, hogy G. Horváth Á. [36]-ban a parallelotópok merőleges vetületére a fenti DV cellák merőleges vetületével analóg tételt bizonyított: Egy $\mathcal{P}$ parallelotópra a következők ekvivalensek:
(i) $\mathcal{P} \oplus S(z)$ parallelotóp
(ii) A $\mathbf{z}$ irányhoz tartozó Λ_z Venkov-rács $(n-1)$-dimenziós és $\mathcal{P}|_{\mathbf{z}}$ parallelotópja a $[\Lambda_z]$ hipersíknak, a Λ_z eltolás ráccsal.

A következőkben a parallelotópok kihúzhatósága és meghatározó vektoraik koordinátái közötti kapcsolatot vizsgálva beláttuk, hogy ha a $\mathcal{P}$ parallelotóp $\mathbf{z}$ irányban kihúzható, akkor van olyan $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ bázisa a rácsnak, melyben a $[\Lambda_z] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_{n-1}]$ és a Λ_z Venkov-rácshoz nem tartozó meghatározó vektorok n-edik koordinátái ± 1. Azaz ha $\mathcal{P}$ parallelotóp $\mathbf{z}$ irányban kihúzható, akkor a Venkov-rács primitív $(n-1)$-dimenziós részrácsa Λ-nak és minden más meghatározó vektor ± 1 n-edik koordinátákkal rendelkezik, egy alkalmas $\mathbf{e}_n$ bázissá kiegészítő vektor esetén. Továbbá igazoltuk, hogy ha van olyan bázis, melyben a $\mathcal{P}$ parallelotóp meghatározó vektorainak koordinátái $0, \pm 1$ és $\mathcal{P}$ parallelotóp egy DV cella affin képe, akkor létezik $\mathbf{z}$ irány, hogy $\mathcal{P} \oplus S(z)$ szintén parallelotóp. Megjegyezzük, hogy a 3.13 tétel alapján és a fenti feltételek teljesülése esetén a $\mathcal{P}$ parallelotóp $\mathbf{z}$ irányú vetülete $\Lambda_{\mathbf{z}}$ Venkov-rács parallelotópja. Ha a parallelotóp helyett DV cellát tekintünk, akkor belátható, hogy a vetület is DV cella, azaz ha van olyan bázis, melyben a $\mathcal{D}$ DV cella meghatározó vektorainak koordinátái $0, \pm 1$, akkor létezik $\mathbf{z}$ irány, hogy $\mathcal{D}$ cella $\mathbf{z}$ irányú vetülete a $\Lambda_{\mathbf{z}}$ rács DV cellája.

A továbbiakban gyökrácsok DV celláit vizsgáljuk, így szükségünk lesz J.H.Conway, N.J.A.Sloane [8]-beli tételre, nevezetesen hogy valamely Λ gyökrács origó középpontú DV cellája a fundamentális szimplex véges tükrözéscsoportnál vagy $W(\Lambda)$ Weyl csoportnál vett képeinek az uniója. A fundamentális szimplex origót nem tartalmazó lapjának $W(\Lambda)$ Weyl csoportnál vett képei a DV cella $(n-1)$-dimenziós lapjait alkotják. Így a fentiek következményeként adódik: gyökrácsok esetén a DV cella meghatározó vektorai megegyeznek a rács minimális vektoraival [8]. Ezek alapján bizonyítjuk a következő tételt:

3.15. Tétel. *Az E_8 rács kivételével a gyökrácsok $\mathcal{D}$ DV celláira (és azok $\mathcal{P}$ affin képeire) van olyan $\mathbf{z}$ irány, hogy $\mathcal{D} \oplus S(z)$ $(\mathcal{D} \oplus S(z'))$ parallelotóp.*

Megjegyezzük, hogy tétel jelentőségét pont az adja, hogy az E_8 rács DV cellája esetén nincs olyan irány, melyre kihúzható. A fenti tétel analógja vetületre most már könnyen igazolható:

3.16. Tétel. *Az E_8 rács kivételével a gyökrácsok $\mathcal{D}$ DV celláira van olyan $\mathbf{z}$ irány, hogy $\mathcal{D}$ cella $\mathbf{z}$ irányú vetülete a $\Lambda_{\mathbf{z}}$ rács DV cellája.*

A következőkben röviden áttekintjük, hogyan kapcsolódnak eddigi eredményeink a parallelotópok osztályozásához. Már az ókorban ismert volt a két síkbeli parallelotóp, a centrálszimmetrikus hatszög (primitív) és a parallelogramma (nem primitív). E.S. Fedorov [20]-ban leírta az 5 kombinatorikusan különböző 3-dimenziós parallelotópot, melyek közül a csonkolt oktaéder primitív, a többi nem primitív, azaz a nyújtott oktaéder, a rombdodekaéder, a hatszög alapú hasáb és a kocka. B.N. Delone [14]-ben 51 különböző típusú 4-dimenziós parallelotópot talált. A hiányzó 52.-et M.I. Shtogrin találta meg [53]-ban. Ezek közül 17 zonotóp és a többi 35 a szabályos 24-cella valamint ennek Minkowski összege valamely zonotóppal. A fentiek közül 3 primitív. S.S. Ryshkov és E.P. Baranowskii [52]-ben 221 primitív 5-dimenziós parallelotópot talált, melyet P. Engel és V. Grishukhin [18]-ban még eggyel egészített ki. P. Engel [16] és [17]-ben számítógép segítségével 179372 kombinatorikusan különböző 5-dimenziós parallelotópot talált.

Egy parciális rendezést vezethetünk be a parallelotópok kombinatorikus típusain a zárt élzónák összenyomásával. Egy elemet maximálisnak nevezünk, ha triviálistól eltérő módon tovább már nem húzható ki, azaz nincs olyan parallelotóp, melynek az összenyomottja lenne. Minimális elem, melyet már nem lehet tovább összenyomni. 3-dimenzióban maximális elem a primitív csonkolt oktaéder, melynek összenyomásával meg lehet kapni az összes parallelotópot. Minimális elem a kocka (lásd [10] vagy [39]). 4-dimenzióban 4 maximális elem van, de közülük csak 3 primitív. Ezek összenyomásával 2 minimális elemhez jutunk, melyekből viszont kihúzás segítségével kapható meg az összes parallelotóp ([7], [60], [28]). Nyilván a 3 primitívből csak összenyomással nem lehet az összes parallelotópot megkapni.

P. Engel az 5-dimenziós parallelotópokat primitívekből összenyomással, majd a kapott minimális elemek kihúzásával kapta meg. Sajnos általában ilyen módon nem kapható meg az összes parallelotóp, hiszen a 3.15 tétel alapján az E_8 rács DV cellája nem húzható ki semelyik irányba, de másrészt bármely irányban nulla kövérségű, tehát össze se nyomható. *Így létezik nem primitív maximális elem, mely egyben minimális is és semely módon nem kapható meg primitív elemből.*

Megjegyezzük, hogy a fentiek szorosan kapcsolódnak a Voronoi-sejtéshez. G.F. Voronoi a következő kérdést fogalmazta meg: Vajon minden parallelotóp egy DV cella affin képe-e? G.F. Voronoi [68] és [69]-ben bizonyította a sejtést azokban az esetekben mikor a parallelotóp primitív. O.K. Zsitomirszkij [71]-ben kiterjesztette G.F. Voronoi bizonyítását $(n-2)$-primitív parallelotópokra, azaz mikor a parallelotóp minden öve 3-öv. P. McMullen [46]-ban bizonyította a sejtést azokra a parallelotópokra, melyek zonotópok. R.M. Erdahl egy másik bizonyítást adott erre [19]-ben.

Az alábbi két tételt igazolás nélkül közöljük, egyrészt terjedelmi korlátok miatt, másrészt mivel a témát megnyugtatóan még nem zárja le és további vizsgálatokat igényel.

3.17. Tétel. *Ha $\mathcal{P} \oplus S(z)$ parallelotóp egy $\mathcal{D} \oplus S(z')$ DV cella affin képe, akkor $\mathcal{P}$ parallelotóp is egy $\overline{\mathcal{D}}$ DV cella affin képe.*

A tétel megfordítását csak bizonyos feltétel esetén sikerült igazolni, így szükségünk lesz az alábbi definícióra.

3.10. Definíció. A $\mathcal{P}$ parallelotópnak két $\mathbf{z}'$ és $\mathbf{z}''$ irányú kihúzása $\mathcal{P} \oplus S(z')$, $\mathcal{P} \oplus S(z'')$ parallelotópokká ekvivalens, ha a $\mathbf{z}'$ és $\mathbf{z}''$ irányú árnyékhatárok megegyeznek, így $\Lambda_{z'} = \Lambda_{z''}$. Egy $\mathbf{z}$ irányú kihúzás *szabadsági foka* $k_{\mathbf{z}}$ a vele ekvivalens kihúzások irányai által meghatározott altér dimenziója. Ha $\mathbf{z}$ irányban nem húzható ki a parallelotóp, akkor legyen $k_{\mathbf{z}} = 0$.

3.18. Tétel. *Ha a $\mathcal{P}$ parallelotópot egy L affinitás a $\mathcal{D}$ DV cellába viszi és ha létezik a $\mathcal{P} \oplus S(z)$ parallelotóp, ahol $k_{\mathbf{z}} = 1$, akkor $\mathcal{P} \oplus S(z)$ parallelotóp egy $\overline{\mathcal{D}} \oplus S(\overline{z'})$ DV cella affin képe.*

Tehát összefoglalva a fentiek alapján azok a parallelotópok, melyek primitívből, ill. O.K. Zsitomirszkij [71]-beli eredménye alapján $(n-2)$-primitív parallelotópokból a 3.17 tétel miatt összenyomással, majd ezekből a 3.18 tétel miatt egyértelmű kihúzással megkaphatók eleget tesznek a Voronoi sejtésnek, azaz DV cellák affin képei. Az eddigiek és V. Grishukhin 3.3 tétele alapján elegendő csak az $(n-2)$-primitív parallelotópból nem megkapható, minden irányban nulla kövérségű parallelotópok valamint a minden irányban nulla kövérségű parallelotópokból egyértelmű kihúzások sorozatával nem megkapható parallelotópokra igazolni a Voronoi-sejtést, annak igazolásához.

4. $\langle p, q \rangle$ pontrendszerek

J.H. Conway és N.J.A. Sloane [8]-ban részletesen tárgyalja a gyökrácsok szerepét az elhelyezések és fedések esetén magasabb dimenziókban. Ismert, hogy sok esetben ezek, ill. duálisaik szolgáltatják jelenleg a legjobb eredményeket a legsűrűbb gömbelhelyezésre, ill. legritkább gömbfedésre, természetesen általánosságban csak a síkbeli esetben bizonyítva. Az elhelyezésre, ill. fedésre vonatkozó szerteágazó eredményeket nem ismertetjük, csak a fenti problémákkal analóg [37]-ben bevezetett $\langle p, q \rangle$ pontrendszerekkel foglalkozunk. Legyenek $p, q \geq 1$ egészek. Egy állandó görbületű térben a Σ ponthalmaz $\langle p, q \rangle$ pontrendszer alkot, ha $\exists\, r, R > 0$ úgy, hogy tetszőleges r sugarú nyílt gömb Σ-nak legfeljebb p pontját és tetszőleges R sugarú zárt gömb Σ-nak legalább q pontját tartalmazza.

4.1. Definíció. Jelölje r_p a r sugarak szuprémumát és R_q a R sugarak infimumát adott $\langle p, q \rangle$ pontrendszerre. A $\frac{r_p}{R_q}$ hányadost a $\langle p, q \rangle$ pontrendszer tömörségének nevezzük.

Feladatunk a $\langle p, q \rangle$ pontrendszerek változtatása mellett $\sup \frac{r_p}{R_q}$ értékének, valamint annak a pontrendszernek, ill. pontrendszereknek a meghatározása, ahol a maximális tömörség előáll. Jelöljük $\kappa(n, p, q)$-val a $\sup \frac{r_p}{R_q}$-t, ahol n a tér dimenziója. Más szóval, olyan pontrendszereket vizsgálunk, melyeknek a tömörsége maximális, úgyhogy fennállnak a következő tulajdonságok: azok a r sugarú nyílt gömbök, melyeknek a középpontjai a pontrendszer pontjai p-szeres elhelyezést, az ugyanilyen középpontú R sugarú zárt gömbök q-szoros fedést alkotnak.

Az alapproblémát B.N. Delone [13] fogalmazta meg (r,R) pontrendszerekre, ez a fenti terminológia szerint $p=1$, $q=1$ eset. Horváth J. [37] vizsgálta először a problémát $p,q>1$ esetekben. Röviden ismertetjük a témában elért eddigi eredményeket. A feladatot síkban $p=1$, $q=1$ esetben S.S. Ryshkov [51] és Fejes Tóth L. [23], térben Böröczky K. [5] oldotta meg. Az $\langle 1{,}1\rangle$ pontrendszer maximális tömörsége 0,866... az euklideszi síkban és 0,775... a térben. Horváth J. [38] oldotta meg a problémát $\langle 1{,}1\rangle$ pontrendszer esetén 4 és 5-dimenzióban rácsszerű esetben. Síkban nem feltétlenül rácsszerű esetben a $\langle 2{,}1\rangle$ pontrendszer maximális tömörsége, valamint térben rácsszerű esetben a $\langle 2{,}2\rangle$ pontrendszer maximális tömörsége ismert [37]. Továbbá csak rácsszerű és síkbeli esetekben van megoldva a feladat az összes $p,q\leq 5$ valamint az $\langle 1{,}6\rangle$, $\langle 3{,}6\rangle$, $\langle 4{,}6\rangle$ és $\langle 6{,}6\rangle$ pontrendszerekre [37], [56], [58], [72]. Ekkor nagyon sok esetben a maximális tömörséget a szabályos háromszög által generált rács, azaz A_2 rács adja Horváth J. [37] és H. Temesvári Á. [56], valamint H. Temesvári Á., Végh A. [58] alapján. Ez adta a kiindulópontot a további vizsgálatokhoz. A következőkben elsőként $p=1$ és $q>1$ esetén nem feltétlenül rácsszerű eseteket vizsgálunk magasabb dimenziókban. Ezek megoldásai kapcsolódnak az előző fejezetekben vizsgált rácsokhoz. Majd síkbeli rácsszerű esetekkel foglalkozunk.

4.1. Az A_n rács

Adott $q>1$ egész esetén szeretnénk megtalálni a lehető legkisebb R sugarat és az egység sugarú n-dimenziós gömböknek azt az optimális elrendezését, mikor a) azok elhelyezést alkotnak és b) ha mindegyik gömböt egy R sugarúval helyettesítjük, akkor ezek q-szoros fedést alkotnak. Az eredeti gömbök középpontjainak kétszeres fedése érdekében a R sugárnak legalább 2-nek kell lennie. Így teljesül a következő egyszerű lemma:

4.1. Lemma. *Ha $q>1$ és n tetszőleges pozitív egész, akkor $\kappa(n,1,q)\leq\frac{1}{2}$.*

A következőkben olyan rácsokat fogunk vizsgálni, mikor a fenti egyszerű korlát éles. Legyen $B\,(O,r)$ egy r sugarú O középpontú nyílt és $\bar{B}\,(O,r)$ egy zárt gömb. Jelölje $\mathcal{P}^n$ az n-dimenziós szabályos szimplex által kifeszített parallelepipedont. Tegyük fel, hogy $\mathcal{P}^n$ élének a hossza 1. Tekintsük az alábbi n-dimenziós ferdeszögű koordinátarendszert, legyen $(0,\dots,0)^T$ az n-dimenziós szabályos szimplex egy csúcsa, és a többi csúcsok legyenek $(1,0,\dots,0)^T$, $(0,1,\dots,0)^T$,..., $(0,0,\dots,1)^T$. Ilymódon az A_n rács egy bázisát adtuk meg. Így az $\mathbf{x}$ vektor euklideszi hossza nem más, mint $|\mathbf{x}|^2=\mathbf{x}^TG\mathbf{x}$, ahol G az A_n rács Gram-mátrixa. A $\mathcal{P}^n$ parallelepipedon csúcsai az $(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ pontok, ahol $x_i\in\{0{,}1\}$. A $\mathcal{P}^n$ $(n-1)$-dimenziós lapjai $(n-1)$-dimenziós parallelepipedonok. Jelölje $\mathcal{P}^{n-1}_{k,l}$ a $\mathcal{P}^n$ parallelepipedonnak azokat a lapjait, melyeknek csúcsai eleget tesznek az $x_k=l$ feltételnek, ahol $l\in\{0{,}1\}$ és $k\in\{1,\dots,n\}$. Továbbá jelölje H^{n-1}_i azt az $(n-1)$-dimenziós hipersíkot, melynek normálvektora $(1,1,\dots,1)^T$ és melyre $x_1+x_2+\dots+x_n=i$. Ez a hipersík $\mathcal{P}^n$-nek azokat a csúcsait tartalmazza, melyeknek i db nem nulla koordinátája van. Legyen $R^n_{i,i+1}$ a $\mathrm{conv}\left(\left(\mathrm{vert}\mathcal{P}^n\cap H^{n-1}_i\right)\cup\left(\mathrm{vert}\mathcal{P}^n\cap H^{n-1}_{i+1}\right)\right)$ konvex burka, valamint $R^{n-1}_{j,j+1}=$ $=R^n_{i,i+1}\cap\mathcal{P}^{n-1}_{k,l}$, ahol j az i,k,l értékektől függ. Az $R^{n-1}_{j,j+1}$ testek az $R^n_{i,i+1}$ testnek azok a lapjai, melyek nem a H^{n-1}_i hipersíkok valamelyikében fekszenek. Így igazoljuk, hogy ha $n\leq 7$ és $R^n_{i,i+1}$-nek az $R^{n-1}_{j,j+1}$-lapjait a $\bar{B}(X,1)$ gömbök q-szor fedik, ahol $X\in\mathrm{vert}(R^{n-1}_{j,j+1})$, akkor a $R^n_{i,i+1}$ testet is q-szor fedik a csúcsai körül írt egység sugarú gömbök. Ez alapján igazolható:

4.3. Tétel. ([63]) *$\kappa(n,1,q)=\frac{1}{2}$, ha $n=2{,}3{,}4$ és $q\leq n+1$ vagy $n=5{,}6{,}7$ és $q\leq 5$ és ezekben az esetekben az A_n rács maximális tömörséget szolgáltat.*

4.2. A D_n, az E_7, az E_8 és további rácsok

H.S.M. Coxeter [11] jelöléseit követve α_n jelöli az n-dimenziós szabályos szimplexet, β_n az n-dimenziós keresztpolitópot, $h\gamma_n$ pedig azt a testet, melyet a következőképpen definiálunk: legyen $h\gamma_n = \text{conv}\left(\{x \in \{0,1\}^n | \sum x_i \equiv 0\ (2)\}\right)$, azaz az n-dimenziós kocka csúcsai közül „váltakozva" elhagyunk ill. megtartunk egyet, majd az így keletkező ponthalmaznak vesszük a konvex burkát. H.S.M. Coxeter ezt a testet fél-kockának nevezte. A D_n rács L-felbontása [8] alapján két különböző fajta testből áll: $h\gamma_n$-ből és β_n-ből. Egyrészt belátjuk, hogy a β_n keresztpolitópot $n \geq \geq 3$ esetben $(n+1)$-szer fedik a keresztpolitóp élével megegyező sugarú és a csúcsai körül rajzolt gömbök, másrészt, hogy a $h\gamma_5$ testet 6-szor fedik az élével megegyező sugarú és a csúcsai körül rajzolt gömbök. Ezek alapján bizonyítjuk:

4.6. Tétel. *$\kappa(n,1,q) = \frac{1}{2}$, ha $n = 3,4,5$ és $q \leq n+1$ vagy $n = 6,7,8$ és $q \leq 6$ és ezekben az esetekben az D_n rács maximális tömörséget szolgáltat.*

Megjegyezzük, hogy ez az eredmény felülmúlja az A_n rács segítségével elért eredményünket, de azt mégsem teszi feleslegessé két okból sem. Egyrészt a legtöbb esetben ez egy újabb pontrendszert szolgáltat, mely esetén a tömörség maximális, persze távol állunk attól, hogy az összes pontrendszert megadjuk (ld. síkbeli esetet is). Másrészt viszont nagyon fontos következményként adódik az alábbi tétel az A_7 és a D_8 rács felhasználásával.

4.7. Tétel. *$\kappa(7,1,q) = \frac{1}{2}$, ha $q \leq 10$ és $\kappa(8,1,q) = \frac{1}{2}$, ha $q \leq 12$ és ezekben az esetekben az E_7, ill. E_8 rács maximális tömörséget szolgáltat.*

Megjegyezzük még, hogy az eddigi rácsok esetén azt nem bizonyítottuk, hogy az igazoltnál többszörös fedettség nem lehetséges, így előfordulhat, hogy a vizsgált rácsok más $\langle p,q\rangle$-pontrendszerre is a maximális tömörséget adják. Ez a következő tételben szereplő eredményre fokozottan érvényes.

A következőkben J.H. Conway-N.J.A. Sloane [8] alapján bevezetjük a laminált rács fogalmát és ismertetjük néhány tulajdonságát.

4.3. Definíció. Legyen a Λ_0 rács egy pont. Az $n \geq 1$ esetben tekintsük az összes olyan rácsot, melynek minimuma 2 és melynek van legalább egy Λ_{n-1} részrácsa. Ezek közül a Λ_n *laminált rács* egy olyan rács, melynek a determinánsa minimális.

Jelölje $\Lambda_{n-1}^{(i)} = \Lambda_{n-1} + i\mathbf{e}_n$ az egyes rétegeket, ahol $i \in \mathbb{Z}$. Ekkor $\Lambda_n = \bigcup\{\Lambda_{n-1}^{(i)} \,|\, i \in \mathbb{Z}\}$. A [8] alapján a laminált rácsok $n \leq 48$ dimenzióig úgy épülnek fel az eggyel alacsonyabb dimenziós $\Lambda_{n-1}^{(i)}$ rácsokból, mint rétegekből, hogy a $\Lambda_{n-1}^{(i+1)}$ réteg egy rácspontjának a merőleges vetülete a $\Lambda_{n-1}^{(i)}$ rács rácspontjaitól lehető legtávolabb lévő pontba esik. Ebből kiindulva bizonyítjuk a következő tételt:

4.8. Tétel. *$\kappa(n,1,2) = \frac{1}{2}$, ha $n \leq 48$ és ezekben az esetekben a Λ_n laminált rács maximális tömörséget szolgáltat.*

4.3. Pontrendszerek síkban

A következőkben néhány síkbeli eredményt ismertetünk több okból is. Egyrészt mert kiindulópontjai voltak a magasabb dimenziós eseteknek. Másrészt, hogy lássuk síkban rácsszerű esetben sem egyszerű a maximális tömörség meghatározása, valamint azon rácsok ill., általános pontrendszerek megadása, mely esetén a tömörség maximális. Ehhez kapcsolódóan néhány fogalmat vezetünk be.

Egy Λ rács Minkowski szerint redukált, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ bázisvektorai eleget tesznek a következő egyenlőtlenségeknek:

$$|\mathbf{a}| \le |\mathbf{b}| \le |\mathbf{b}-\mathbf{a}|,\ (AOB)\angle \le \frac{\pi}{2}.$$

Bevezetve az $x=\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$, $\alpha=(AOB)\angle$, $y=\cos\alpha$ jelöléseket, a következő fentiekkel ekvivalens egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$0<x\le 1,\ 0\le y\le \frac{x}{2}.$$

Bármely rács esetén megválaszthatók a bázisvektorok úgy, hogy a fenti feltételeknek eleget tegyenek. Így minden Minkowski redukált rácshoz hozzárendelhetünk egy (x,y) rendezett számpárt és minden $(x,y)\neq(0{,}0)$ rendezett számpárnak (hasonlóság erejéig) megfeleltethetünk egy Minkowski redukált rácsot. Így a Minkowski redukált rácsok és az OPQ háromszög O-tól különböző pontjai között hasonlóság erejéig egy-egy értelmű megfeleltetés létesíthető, ahol $O(0{,}0)$, $P(1{,}0)$, $Q(1,\frac{1}{2})$.

Felhasználva H.Temesvári Á., Horváth J., N.N. Yakovlev által [57]-ben a legsűrűbb p-szeres rácsszerű körelhelyezés, ill. H.Temesvári Á. által [55]-ben a legritkább q-szoros rácsszerű körfedés meghatározására kidolgozott módszereket, továbbá a [61], [62]-ben szereplő lehetséges rácskörökre vonatkozó tételeket [58]-ban meghatároztuk $\langle p,q\rangle$ pontrendszerek tömörségét a következő esetekben: H.Temesvári Á. a $p=5$ és $q=1{,}2{,}3{,}4$ értékekre, Végh A. a $p=1{,}2{,}3{,}4$ és $q=5$ értékekre. A következőkben a fent nevezett általános módszer adta lehetőségeket kihasználva az $\langle 1,q\rangle$ és $\langle 3,q\rangle$, ahol $q\in\mathbb{Z}^+$, pontrendszerek esetén leszűkítjük azoknak a rácsoknak a halmazát, melyek esetén a tömörség maximális lehet. Bevezetjük a szintegyenes fogalmát. *O-szintegyenesnek* nevezzük az $\mathbf{a}$ bázisvektor irányú O ponton átmenő rácsegyenest. *j-szintegyenes*nek nevezzük a $j\mathbf{b}$ vektor végpontján áthaladó $\mathbf{a}$-val párhuzamos rácsegyenest. Legyen t_1 olyan rácstranszformáció, mely az O-szintegyenest fixen hagyja, B-t pedig az O-szintegyenes irányába, arra merőlegesen mozgatja. Ha egy tetszőleges Δ_i hegyesszögű rácsháromszög köré írt kör sugara R_i, akkor a t_1 transzformáció alkalmazása során $|\mathbf{a}|$ állandó és R_i csökken, így igazoljuk a következő tételt:

4.12. Tétel. ([58]) *Tekintsük azt a $\langle p,q\rangle$ pontrácsot, ahol $p=1$ és $q\in\mathbb{Z}^+$. A pontrácsok tömörségeinek szuprémuma csak olyan rácsokra állhat fenn, melyre $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, azaz $x=1$ teljesül.*

A továbbiakban az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ vektor végpontját jelölje C. A fentiekhez hasonlóan legyen t_2 olyan rácstranszformáció, mely az $f=OC$ egyenest fixen hagyja, B rácspontot pedig az f egyenes irányába, arra merőlegesen mozgatja. Ha egy tetszőleges Δ_i hegyesszögű rácsháromszög köré írt kör sugara R_i, akkor a t_2 transzformáció alkalmazása során $|\overline{OC}|$ állandó és R_i csökken. A t_2 transzformáció alkalmazása során y nő, miközben x vagy csökken vagy $x=1$, így teljesül:

4.15. Tétel. ([58]) *Tekintsük azt a $\langle p,q\rangle$ pontrácsot, ahol $p=3$ és $q\in\mathbb{Z}^+$. A pontrácsok tömörségeinek szuprémuma csak olyan rácsokra állhat fenn, melyre $y=\frac{x}{2}$, ahol $x\in\left[\sqrt{\frac{1}{7}},1\right]$ vagy $y=\frac{8x^2-1}{2x}$, ahol $x\in\left[\sqrt{\frac{1}{8}},\sqrt{\frac{1}{7}}\right]$.*

Megjegyezzük, hogy a [37]-beli eredmény alapján $\langle 1,q\rangle$ pontrácsra vonatkozó eredmény tovább általánosan nem javítható, hiszen $\langle 1{,}2\rangle$ pontrács esetén a tömörség mindig maximális, ha $x=1$. Nem feltétlenül rácsszerű esetben további pontrendszerek esetén is maximális lesz a tömörség. Tehát még síkbeli esetben is az összes $\langle 1{,}2\rangle$, ill. az $\langle 1,q\rangle$ pontrendszerek megadása nehéz feladat. A magasabb dimenziós esetekről nem is beszélve. Ezekben az esetekben az összes olyan pontrendszer megadása, mely esetén a tömörség maximális szinte lehetetlennek tűnik. A dolgozatban csak a speciális rácsokhoz kapcsolódóan vizsgáltuk ezt a témakört. A síkbeli eset rövid vizsgálatát a nehézségek bemutatása végett fűztük hozzá.

A tézisfüzetben szereplő **Tétel**ek mind saját eredményeim. Az alábbi publikációs lista a PhD értekezésben szereplő összes hivatkozást tartalmazza. Ezek közül saját hivatkozások: [58], [59], [61], [62], [63], [64], [65]. Az értekezés téziseit magában foglaló cikkeket * jelöli, azaz [58], [63], [64], [65].

Hivatkozások

[1] A.D. Aleksandrov, On filling of space by polytopes, *Vestnik Leningradskogo Univ., Ser. math, phys. and chem.* **9** (1954) 33-43. (in Russian)

[2] E.P. Baranovskii, S.S. Ryshkov, Derivation of perfect lattices from admissible centerings, *Russian Math. Survey* **40,4** (1985), 155-156.

[3] E.S. Barnes, The complete enumeration of extreme senary forms, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **249** (1957), 461-506.

[4] C. Batut, J. Martinet, A Catalogue of Perfect Lattices, http://www.math.u-bordeaux.fr/ martinet

[5] K. Böröczky, Closest packing and loosest covering of the space with balls, *Studia Sci. Math. Hungar.* **21**, 78-89.

[6] J.W.S. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers*, Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 99, Springer-Verlag, Berlin, 1959.

[7] J.H.Conway, assisted by R.Y.C. Fung, The Sensual (Quadratic) form *Math. Assoc. Amer.*, The Carus Math. Monographs **26**, 1997.

[8] J.H.Conway-N.J.Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer-Verlag, 1988.

[9] J.H.Conway-N.J.Sloane, Low-dimensional lattices III. Perfect forms, *Proc. R. Soc. Lond.* A **418** (1988), 43-80.

[10] J.H.Conway-N.J.Sloane, Low-dimensional lattices VI. Voronoi reduction of three-dimensional lattices., *Proc. R. Soc. Lond.* A **436** (1992), 55-68.

[11] H.S.M.Coxeter, *Regular polytopes*, Dover Publications, Inc., New York, 3rd ed.,1973

[12] H. Davenport, G.L. Watson, The minimal points of a positive definite quadratic form, *Mathematika* **1** (1954), 14-17.

[13] B.N. Delone, The geometry of positive quadratic forms, *Uspehi Mat. Nauk*, **3**, 16-62.

[14] B.N. Delone, Sur la partition reguliere de l'espace a 4-dimensions, *Izv. Akad. Nauk SSSR Otdel. Fiz.-Mat. Nauk* **7** (1929) 79-110, 147-164.

[15] G.L. Dirichlet, Über die Reduktion der positiven Quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen, *J. Reine und Angew. Math.* Vol. **40**, (1850), 209-227.

[16] P. Engel, Investigations of parallelohedra in $\mathbf{R}^d$, in: *Voronoi's impact on Modern Science*, P. Engel and H. Syta (eds), Institute of Mathematics, vol.**2**,Kyiv 1998, 22-60.

[17] P. Engel, The contraction types of parallelohedra in E^5, *Acta Cryst. Sect. A* **56** (2000) 491-496.

[18] P.Engel, V. Grishukhin, There are exactly 222 L-types of primitive 5-dimensional parallelotopes, *European Journal of Combinatorics*, megjelenés alatt

[19] R.M Erdhal, Zonotopes, dicings and Voronoi's conjecture on parallelohedra, *European Journal of Combinatorics* **20** (1999) 527-549.

[20] E.S. Fedorov, Elements of the study of figures, *Zap. Miner. Obsc.* **21** (1885) 1-279.

[21] L. Fejes Tóth, *Regular Figures*, Pergamon, Oxford, 1964

[22] L. Fejes Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, 2. Auflage 1972, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York

[23] L. Fejes Tóth, Close packing and loose covering with balls, *Publ. Math. Debrecen* **23**,323-326.

[24] R. V. Galiulin, G. P. Litvinskaia, Yu. G.Zagal´skaia, V. S. Kovalenko, On matrix description of crystal classes in Bravais frame, in: *Problems of crystal sciences*, dedicated to N. V. Belov, Ed. B. K. Vainstein, Edition of Moscow University, 1971, 284-288.

[25] R. V. Galiulin, S. S. Ryshkov, On some basic concepts of geometric crystallography, in: *Problems of crystal sciences*, dedicated to N. V. Belov, Ed. B. K. Vainstein, Edition of Moscow University, 1971, 290-298.

[26] C.F. Gauss, Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seeber, *J. Reine. Angew. Math.* **20** (1840), 312-320.

[27] V. Grishukhin, Parallelotopes of non-zero width, *Sb. Math.*, 2004, 195 (**5**), 669-686.

[28] M. Deza, V. Grishukhin, Once more about the 52 four-dimensional parallelotope, *arXiv:math.MG/0307171 v1* 11 Jul 2003.

[29] P.M.Gruber-C.G.Lekkerkerker, *Geometry of numbers*, North-Holland Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo 1987.

[30] Á.G.Horváth, On the coordinates of minimum vectors in n-lattices, *Studia Sci. Math. Hungarica* **29** (1994), 169-175.

[31] Á.G.Horváth, Lower bounds of the maximal coordinates of minimum vectors, 4^{th} *International Congress of Geometry, Congress Proceeding* Thessaloniki (1996), 179-186.

[32] Á.G.Horváth, On the Dirichlet-Voronoi cells of the unimodular lattices *Geometriae Dedicata* **63**, (1996), 183-191.

[33] Á.G.Horváth, On Dirichlet-Voronoi cell Part I. Classical problems *Periodica Poly. Math. Ser. Mech. Eng.* Vol. **39**, No.1. (1995), 25-42.

[34] Á.G.Horváth, On Dirichlet-Voronoi cell Part II. Diagrams *Periodica Poly. Math. Ser. Mech. Eng.* Vol. **41**, No.2. (1997), 95-117.

[35] Á.G.Horváth, On the boundary of an extremal body, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* Vol. **40**, No. 2. (1999), 331-342.

[36] Á.G.Horváth, On the connection between the projection and the extension of a parallelotope (submitted)

[37] J. Horváth, Über die Enge der gitterförmigen k-fachen Packungen, Die Lockerheit der gitterförmigen k-fachen überdekungen und die k-Enge der gitterförmigen Punktmengen, *Beiträge zur Alg. und Geom.* **16**, 139-172.

[38] J. Horváth, $\langle p, q \rangle$-Punktsysteme in der Minkowskischen Ebene, *Beiträge zur Alg. und Geom.* **23**, 43-61.

[39] S. Janzen, Voronoi-Zellen von Gittern erster Art, *Diplomarbeit, Universität Dortmund*, 2000

[40] D.O. Jaquet-Chiffelle, Énumération compléte des classes de formes parfaites en dimension 7, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **43** (1993), 21-55.

[41] A. Korkine, G. Zolotareff, Sur les formes quadratiques positives, *Math. Ann.* **6** (1873), 366-390.

[42] A. Korkine, G. Zolotareff, Sur les formes quadratiques positives, *Math. Ann.* **11** (1877), 242-292.

[43] J.L.Lagrange, Recherches d' arithmetique, *Nouv. Mém. Acad. Berlin* (1773), 265-312.

[44] Z. Major, On centering of lattices, *Annales Univ. Sci. Math.* **28**(1985), 165-172. (in Russian)

[45] J. Martinet, *Perfect lattices in Euclidean spaces*, Grundlehren **327**, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.

[46] P. McMullen, Space tiling zonotopes, *Mathematica* **22**, (1975), 202-211.

[47] P. McMullen, Convex bodies which tile space by translation, *Mathematica* **27**, (1980), 113-121.

[48] H. Minkowski, Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz, *J. Reine Angew. Math.* **129**(1905), 220-274.

[49] W. Plesken, M. Pohst, Constructing integral lattices with prescribed minimum I. *Math. of Comput.* **45** no. 1(1985) 209-221.

[50] S.S. Ryshkov, On the problem of determining perfect quadratic forms of several variables, (in Russian) *Trudy Mat. Inst. Steklov* **142**(1976) 215-239, 270-271, English translation: *Proc. of the Steklov Inst. of Math.* 1979(3), 223-259.

[51] S.S.Ryskov, The polyhedron $\mu(m)$ and some extremal problems in the geometry of numbers, *Dokl. Akad. Nauk. UdSSR* **194**, 514-517; *English translation:* In *Soviet Math Dokl.* **11**, 1240-1244.

[52] S.S Ryshkov, E.P. Baranowskii, C-types of n-dimensional lattices and 5-dimensional primitive parallelohedra (with application to the theory of coverings) *Trudy Math. Institute Steklova* **137** (1976) (in Russian), translated in Proc. Steklov Inst. Math. No. 4 (1978)

[53] M.I. Shtogrin, Regular Dirichlet-Voronoi partitions for the second triclinic group, *Proc. Stekl. Inst. Math.* **123** (1973) 1-127.

[54] K.C. Stacey, The enumeration of perfect quadratic forms in seven variables, *D. Phil. Dissertation*, Oxford, 1973. (ld. J. London Math. Soc. (2) **10** (1975), 97-104.)

[55] Á.H. Temesvári, Eine Methode zur Bestimmung der dünnsten gitterförmigen k-fachen Kreisüberdeckungen, *Studia Sci. Math. Hung.*, **23** (1988), 23-35.

[56] Á.H. Temesvári, Das Maximum der $\langle p,q\rangle$-Dicke von Gittern für $p,q \leq 4$ in der Ebene, *Beiträge zur Alg. und Geom.* **28** 125-138.

[57] Á.H. Temesvári, J. Horváth, N.N. Yakovlev, A method for finding the densest lattice k-fold packing of circles, *Mat. Zametki*, **41/5** (1987), 625-636. (orosz), Angol ford.: Mat. Notes 41(1987), 349-355.

[58] * Á.H. Temesvári, A. Végh, Über die dicke von $\langle p,q\rangle$-punktsystemen in der euklidischen ebene, *Annales Univ. Sci. Budapest* **43** (2000), 79-100.

[59] Á.H.Temesvári-A. Végh, Die dichteste gitterförmige 10-fache Kreispackung, *BDTF- Tud. Közl. XI., Term. Tud.* **6** (1998), 3-18.

[60] F.Vallentin, Sphere coverings, lattices and tilings (in low dimensions), Thesis (Dissertation, Technishe Universitat Munchen), 2003.

[61] Végh A., Többszörös rácsszerű körelrendezések, *Szakdolgozat*, ELTE, 1998.

[62] A. Végh, Adott számú rácspontot tartalmazó rácskörök és alkalmazásaik, *BDTF- Tud. Közl. XII., Term. Tud.* (2000), 3-21.

[63] * A. Végh, Investigation of the $\langle 1,q\rangle$ point systems, *Periodica Math. Hung.* Vol. **45** (1-2), (2002), 161-166.

[64] * A. Végh, The maximum of the smallest maximal coordinate of the minimum vectors in 6-lattices equals 1, *Beit. zur Alg. und Geom.* Vol. **46**(2005), No.1, 151-167.

[65] * A. Végh, On the orthogonal projections of Dirichlet-Voronoi cells of lattices, *Studia Scient. Math. Hung.* (közlésre leadva)

[66] B.A. Venkov, On a class of Euclidean polytopes, *Vestnik Leningradskogo Univ.* **9**,(1954), 11-31. (in Russian)

[67] B.A. Venkov, On projecting of parallelohedra, *Mat. Sbornik* **49**,(1959), 207-224. (in Russian)

[68] G.F. Voronoi, Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques, *J. Reine und Angew. Math.* Vol. **134**, (1908), 198-287.

[69] G.F. Voronoi, Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques II., *J. Reine und Angew. Math.* Vol. **136**, (1909), 67-181.

[70] N.V. Zaharova, Centerings of eight-dimensional lattices that preserve a frame of successive minima, Geometry of positive quadratic forms, *Trudy Mat. Inst. Steklov* **152**(1980),97-123, 237(in Russian) Correction: N.V. Novikova, Three admissible centerings of eight-dimensional lattices, Deposited in VINITI, No. 4842-81 Dep., 1981, I. 8 (in Russian)

[71] O.K.Zhitomirskii, Verschärfung eines Satzes von Voronoi, *Zhurnal Leningradskogo Math. Obschtchestva* **2** (1929) 131-151.

[72] N.N.Yakovlev, Über die enge gitterförmige 3-fache Packung und die lockere gitterförmige 3-fache Überdeckungen in der Ebene, *Vestn. Mosk. Univ.* Ser. 1. Mat-Meh. No 2., 33-37.