

# RÁCSOK, KÖR- ÉS GÖMBELRENDEZÉSEK

PhD értekezés

Végh Attila

**Témavezető: Dr. G. Horváth Ákos**

BME, Matematika Intézet  
Geometria Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Alkalmazott Matematika Szak

2006

# Nyilatkozat

Alulírott Végh Attila kijelentem, hogy ezt a doktori értekezést magam készítettem és abban csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, amelyet szó szerint, vagy azonos tartalomban, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Budapest, 2006. január 25.

Aláírás

# Köszönetnyilvánítás

Először is szeretnék köszönetet mondani Dr. Horváth Jenőnek és Dr. H. Temesvári Ágotának, hogy segítettek és támogatták első lépéseimet a diszkrét geometria területén.

Köszönetemet fejezem ki témavezetőmnek, Dr. G. Horváth Ákosnak, akivel egy-egy probléma megoldásáról folytatott beszélgetésünk sokszor a vilamoson és a vonaton is folytatódott, nagyban hozzájárulva a feladat egyre mélyebb és alaposabb átgondolásához az eredmények végső megformálásához. Köszönöm neki az értekezés többszöri átnézését, definíciók, tételek szabatos megfogalmazásában nyújtott segítségét, valamint egész eddigi munkáját.

Köszönet illeti Dr. Molnár Emilt mind az egyes cikkek, mind az értekezés áttekintéséért, szerkezetére vonatkozó hasznos tanácsaiért és egész munkámat felügyelő gondoskodásáért.

Köszönettel tartozom a KF GAMF Karának erkölcsi és anyagi támogatásáért, különösen Dr. Danyi Józsefnek és Dr. Klebniczki Józsefnek a nyugodt munka biztonságáért.

Továbbá köszönöm Németh Lászlóné és Kasza Ildikó segítségét a cikkek, valamint a tézisfüzet angol nyelvi ellenőrzéséért.

Végül, de nem utolsó sorban hálámat fejezem ki feleségemnek és kisfiamnak végtelen türelmükért és megértésükért, mellyel nagyban hozzájárultak munkám eredményes végzéséhez.

# Tartalomjegyzék

|   |            |
|---|------------|
| <b>1. Bevezetés</b>   | <b>5</b>   |
| <b>2. Rácsok minimális vektorai</b>                                   | <b>10</b>  |
| 2.1. Fogalmak, eredmények . . . . .                                   | 10         |
| 2.2. A 6-dimenziós rácsok . . . . .                                   | 14         |
| 2.2.1. A 2.5 tétel és a bizonyítás gondolatmenete . . . . .           | 14         |
| 2.2.2. A 2.5 tétel bizonyítása . . . . .                              | 16         |
| 2.3. A 7-dimenziós rácsok . . . . .                                   | 37         |
| <b>3. Rácsok Dirichlet-Voronoi cellái</b>                             | <b>43</b>  |
| 3.1. Előzmények . . . . .   | 43         |
| 3.2. Rácsok DV celláinak merőleges vetületei . . . . .                | 48         |
| 3.2.1. A 3.5 tétel és bizonyítása . . . . .                           | 50         |
| 3.2.2. A 3.5 tétel alkalmazása gyökrácsokra . . . . .                 | 56         |
| 3.3. Az $E_8$ rács DV cellája . . . . .                               | 59         |
| <b>4. <math>\langle p, q \rangle</math> pontrendszerek vizsgálata</b> | <b>69</b>  |
| 4.1. Előzmények . . . . .   | 69         |
| 4.2. Alacsony dimenziós esetek 48-dimenzióig . . . . .                | 70         |
| 4.2.1. Az $A_n$ rács . . . . .  | 70         |
| 4.2.2. A $D_n$ , az $E_7$ , az $E_8$ és további rácsok . . . . .      | 76         |
| 4.3. Pontrendszerek síkban . . . . .                                  | 86         |
| <b>A. 7-dimenziós tökéletes formák Gram mátrixai</b>                  | <b>104</b> |
| <b>B. Részletes számolások</b>  | <b>110</b> |

# 1. fejezet

## Bevezetés

Dolgozatunkban a gyökrácsoknak a geometriai kutatás különböző területein való alkalmazásairól szólunk, tekintettel saját eredményeinkre. Témánk centrális kutatási hely a diszkrét geometriában, ezért a bevezetőben a történelmi előzmények ismertetése helyett P.M.GRUBER-C.G.LEKKERKERKER[29]-beli, J.H.CONWAY-N.J.SLOANE [8]-beli, ill. FEJES TÓTH L.[21], ill. [22]-beli könyveit ajánljuk. Röviden tekintsük át az alapvető fogalmakat: Egy véges tükrözéscsoport (Coxeter csoport), ha irreducibilis, azaz nem bomlik alacsonyabb dimenziós tükrözéscsoportok direkt szorzatára, generálható egy gömbi szimplex oldalaira való tükrözéssel, ahol az oldalak és az origó által meghatározott lapok szöge  $\frac{\pi}{p}$  alakú és  $p \geq 2$  természetes szám. Szokásos jelölése Coxeter-Dynkin diagrammal történik ([11], [8]). A Coxeter csoport fundamentális tartományát ezen tükrözési síkok határozzák meg. Ha  $p$  értéke 2, 3, 4, 6 kristálytani tükrözéscsoportról beszélünk. Ebben az esetben a tükrözési síkokra merőleges, jól meghatározott vektorokat gyökvektoroknak, a fundamentális tartomány oldalaira merőleges gyökvektorokat fundamentális gyököknek, a gyökvektorok teljes rendszerét gyökrendszernek nevezzük. A fundamentális gyököknek a fenti csoportnál vett képei a teljes gyökrend-

szert adják. Gyökrácsnak nevezzük a teljes gyökrendszer által generált rácsot, melynek egy egész bázisa a fundamentális gyökök halmaza. A gyökrácsok teljes rendszere és Coxeter-Dynkin diagram jelölése megtalálható [8]-ban. A következőkben felsoroljuk a későbbiekben használt speciális gyökrácsokat. Az  $n$ -dimenziós kockarács:

$$Z_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z}\},$$

ahol  $\mathbb{Z}$  az egész számok halmazát jelöli. Az  $(n+1)$ -dimenziós kockarácsból megkapható az  $n$ -dimenziós  $A_n$  rács:

$$A_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in Z_{n+1} : x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

A sakktáblarácsnak is nevezett  $D_n$  rács definíciója:

$$D_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Z_n : x_1 + x_2 + \dots + x_n \text{ páros}\}.$$

A későbbiekben fontos szerepet játszó  $E_8$  és a segítségével megadott  $E_7$ ,  $E_6$  rácsok definíciói:

$$E_8 = \{(x_1, x_2, \dots, x_8) : x_i \in \mathbb{Z} \text{ vagy } x_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \text{ minden } x_i\text{-re, } \sum x_i \equiv 0 \pmod{2}\},$$

$$E_7 = \{(x_1, x_2, \dots, x_8) \in E_8 : x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 0\},$$

$$E_6 = \{(x_1, x_2, \dots, x_8) \in E_8 : x_1 + x_8 = x_2 + \dots + x_7 = 0\}.$$

A további fogalmak és eredmények részletes ismertetésére az egyes fejezetekben kerül sor.

A rácsok minimális vektoraival való foglalkozáshoz a kiinduló pontot G. HORVÁTH Á. 2.2, ill. gyökrácsokra vonatkozó 2.3 tételei adták. A 2. fejezet nagy részét annak igazolása tölti ki, hogy 6- és 7-dimenzióban bármely  $\Lambda$  rácsnak van olyan bázisa, melyben a  $\Lambda$  rács minimális vektorainak maximális koordinátája 1. A 6-dimenziós esetben a bizonyítás a megengedett

bővítés fogalmán alapul, felhasználva az [50]-ben S.S RYSHKOV és [70]-ben N.V. ZAHAROVA-N.V. NOVIKOVA által meghatározott összes megengedett bővítést és annak indexe szerint osztályozva a rácsokat. A bizonyítás lényegi részét képezi az  $E_6$  rács vizsgálata és 3-indexű megengedett bővítésként való előállítás. A 7-dimenziós esetben más utat követünk. D.O. JAQUET-CHIFFELLE 2.14, ill. G.F. VORONOI 2.15 tételeit felhasználva a 7-dimenziós tökéletes kvadratikus formák Gram mátrixának a segítségével igazoljuk állításunkat.

A 3. fejezetben rácsok Dirichlet-Voronoi celláival (röviden DV cella) foglalkozunk. Egyrészt V. GRISHUKHIN 3.4 tételéhez kapcsolódóan azt vizsgáljuk, hogy a  $\Lambda^n$  rács DV cellájának merőleges vetülete valamely  $H$  hipersíkra, mikor lesz a  $\Lambda^n \cap H$  egy DV cellája. Majd a kapott eredményt alkalmazzuk  $Z_n$ ,  $A_n$ ,  $D_n$  gyökrácsokra. Másrészt tekintsük a  $P$  és  $Q$  paralelotópokat valamint a  $<$  relációt. Azt mondjuk, hogy  $P < Q$  akkor és csak akkor ha létezik  $\mathbf{v}$  irány, hogy  $P \oplus \lambda \mathbf{v} = Q$ . Ebben az esetben  $P$ -t  $Q$  összenyomottjának, ill.  $Q$ -t  $P$  kihúzottjának nevezzük. Bevezetve a Venkov rács fogalmát, mely B.A. VENKOV  $\mathbf{z}$ -vel párhuzamos lapjainak általánosításaként adódott (3.9 definíció), továbbá felhasználva mind a 2. fejezetben szereplő 7-dimenziós rácsok minimális vektoraira vonatkozó eredményt mind a DV cellák kihúzottjára vonatkozót, valamint a két témakör között kapcsolatot teremtő J.H.CONWAY-N.J.SLOANE [8] tételt, mely azt állítja, hogy gyökrácsok esetén a DV cella meghatározó vektorai megegyeznek a minimális vektorokkal, igazoltuk, hogy az  $E_8$  rács DV cellája semelyik irányban nem kihúzható és minden irányban nulla kövérségű, így össze se nyomható. Könnyen látható, hogy a {paralelotópok,  $<$ } részben rendezett halmaz maximális és minimális elemmel. Tehát igazoltuk olyan paralelotóp létezését, mely nem primitív maximális és egyben minimális elem is a rendezésre nézve és nem kapható meg

primitív elemből, hiszen semelyik más elemmel nem áll relációban. Így általában nem igaz, hogy a primitív elemekből összenomással, majd a kapott minimális elemekből kihúzással az összes paralelotóp megkapható.

A DV cellák affin képeivel kapcsolatban bizonyítás nélkül közöltük, hogy ha egy paralelotóp kihúzottja DV cella affin képe, akkor maga a paralelotóp is és bizonyos feltétel esetén a megfordítás is teljesül. Tehát a Voronoi sejtés igazolásához egyik alapvető feladat az összes maximális-minimális elem meghatározása, valamint a fenti tétel megfordításának igazolása általában.

J.H. CONWAY és N.J.A. SLOANE [8]-ban részletesen tárgyalja a gyökrácsok szerepét az elhelyezések és fedések esetén magasabb dimenziókban. Ismert, hogy sok esetben ezek, ill. duálisaik szolgáltatják jelenleg a legjobb eredményeket a legsűrűbb gömbelhelyezésre, ill. legritkább gömbfedésre, természetesen általánosságban csak a síkbeli esetben bizonyítva. Az elhelyezésre, ill. fedésre vonatkozó szerteágazó eredményeket nem ismertetjük, csak a fenti problémákkal analóg [13]-ban DELONE által vizsgált  $(r, R)$  pontrendszerek általánosításaiént HORVÁTH J. által [37]-ben bevezetett  $\langle p, q \rangle$  pontrendszerrel foglalkozunk, melyek esetén a  $r$  sugarú gömbök  $p$ -szeres elhelyezést, a  $R$  sugarúak  $q$ -szoros fedést alkotnak. Feladatunk a  $\sup \frac{r_p}{R_q}$  maximális tömörség meghatározása, ahol  $r_p = \sup r$  és  $R_q = \inf R$ . A 4. fejezetben egy egyszerű lemmából kiindulva látni fogjuk, hogy nem rácsszerű esetben alkalmas gyökrácsok, ill. laminált rácscok szolgáltatják majd bizonyos  $\langle p, q \rangle$  pontrendszerek esetén a maximális tömörséget magasabb dimenziókban. Valóban az elhelyezésre és fedésre [8]-ban elért eredményeket ezen pontrendszerek esetén túlszárnyaljuk, hiszen nem csak a rácsszerű esetben adják a maximális értéket ezek a rácscok, de egyben a nem rácsszerű eset megoldásai is. A fejezet végén ismertetjük a síkbeli eredményeket, melyek közül 2 egyszerű tételt bizonyítunk is, egyrészt az általános síkbeli eset tárgyalását reprezentálan-



dó másrészt annak bemutatása érdekében, hogy a maximális tömörség, de különösen az összes olyan  $\langle p, q \rangle$  pontrendszer megadása, mely esetén ez a maximális érték fellép, még síkban is igen nehéz feladat.

Megjegyezzük, hogy az egyes témákban elért eredmények az adott fejezetekben kerülnek tárgyalásra, azok jobb követhetősége végett. A bevezetésben arra törekedtünk, hogy a dolgozat vezérfonalát megmutassuk, röviden kiemelve a legfontosabb eredményeket és azok kapcsolatát.

A dolgozatban szereplő összes lemma, ill. segéd-tétel, továbbá a 2.5, 2.18, 3.5, 3.6, 3.8, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 4.3, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.12, 4.15 tételek önálló, saját eredményeim.

## 2. fejezet

# Rácsok minimális vektorai

### 2.1. Fogalmak, eredmények

Legyen  $\mathbb{E}^n (\mathbf{0}, V^n(\mathbb{R}, \langle \cdot, \cdot \rangle))$  egy  $n$ -dimenziós euklideszi tér kitüntetett  $\mathbf{0}$  kezdőponttal, az  $\mathbb{R}$  valós számok feletti  $n$ -dimenziós  $V^n$  vektortérrel és egy pozitív definit szimmetrikus  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V^n \times V^n \rightarrow \mathbb{R}, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  skalár-szorozattal. Legyen  $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} = \{\mathbf{a}_i\}$  a  $V^n$  egy bázisa. A  $G := (a_{ij}) := (\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle)$  Gram-mátrix segítségével a következőképpen adhatjuk meg a  $\mathbf{v} := \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{a}_i$

vektor hosszát:  $|\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i v_j} = \sqrt{\mathbf{v}^T G \mathbf{v}}$ . Az  $A$  bázishoz tartozó  $\mathbb{Z}$ -rács:

$$\Lambda(A, \mathbb{Z}) = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i : x_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Szokásosan  $\mathbb{Z}$ -vel az egész számok halmazát jelöltük. A  $\Lambda$  rács  $m(\Lambda) \in \mathbb{R}^+$  minimumát következőképpen definiáljuk:

Létezik olyan  $\mathbf{m} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\} =: \dot{\Lambda}$ , nullvektortól különböző rácsvektor, hogy  $m(\Lambda) := |\mathbf{m}| \leq |\mathbf{v}|$  bármely  $\mathbf{v} \in \dot{\Lambda}$ -ra teljesül.

Az  $\mathbb{E}^n$ -beli hasonlóság miatt feltehetjük, hogy  $m(\Lambda) = 1$ . A minimális

vektorok halmazát  $\Lambda$  minimumainak nevezzük és  $M(\Lambda)$ -val jelöljük.

$$M(\Lambda) := \{\mathbf{m} \in \Lambda : |\mathbf{m}| = m(\Lambda) = 1\}.$$

A  $\Lambda$  rács minimumainak  $A$  bázisbeli maximális koordinátája a következő:

$$L(A) := \max \left\{ x_i \in \mathbb{Z} : \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{m}, \mathbf{m} \in M(\Lambda) \right\} \in \mathbb{N}.$$

Tekintsük a  $\Lambda$  minimumainak  $A$ -beli maximális koordinátái közül a legkisebbet, miközben a  $\Lambda$  rács  $A$ -bázisát változtatjuk, azaz definiáljuk:

$$L(\Lambda) := \min \{L(A) \in \mathbb{N} : A \text{ tetszőleges bázisa } \Lambda\text{-nak}\}.$$

Végezetül a  $\Lambda$  rácsot is változtatjuk  $\mathbb{E}^n$ -ben, így:

$$L_n := L(\mathbb{E}^n) := \max \{L(\Lambda) \in \mathbb{N} : \Lambda \text{ tetszőleges rács } \mathbb{E}^n\text{-ben}\}.$$

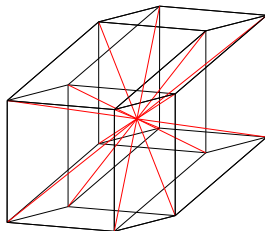
Általánosságban feladatunk  $L_n$  meghatározása, azaz olyan bázis keresése  $\mathbb{E}^n$  tetszőleges rácsában, melyben a rács minimumainak a maximális koordinátája a lehető legkisebb. A fentiekhez kapcsolódóan megemlítjük R. GALIULIN egy problémáját: igaz-e, hogy minden  $n$ -dimenziós kristálycsoport (lineáris) aritmetikai pontcsoportjának mátrixai  $\pm 1, 0$  eleműek [24], [25]. A továbbiakból következik, hogy  $n \leq 7$ -re igenlő a válasz.

Ez egy „max-min-max-min probléma”. A világos áttekintés kedvéért nézzük részletesen:  $L_n \geq L(\Lambda)$  bármely  $\Lambda$  rácsra  $\mathbb{E}^n$ -ben, de van olyan  $\Lambda_0 \subset \mathbb{E}^n$  rács, melyre  $L_n = L(\Lambda_0)$ . Továbbá  $L(\Lambda_0) \leq L(A)$  bármely  $A$  bázisra a  $\Lambda_0$  rács esetén, azonban van olyan  $A_0 \subset \Lambda_0$  bázis, melyre  $L(\Lambda_0) = L(A_0)$ . Végezetül  $L(\Lambda_0) \geq x_i$  bármely  $x_i$  koordinátára, ahol  $A_0 = \{\mathbf{a}_i\}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i =: \mathbf{m} \in M(\Lambda_0)$ ,  $1 = |\mathbf{m}|$  és  $1 \leq |\mathbf{l}|$  minden  $\mathbf{l} \in \Lambda_0$  vektorra, de van olyan  $x_{ik}$  koordinátája a  $\sum_{i=1}^n x_{ik} \mathbf{a}_i =: \mathbf{m}_k \in M(\Lambda_0)$  minimális vektornak, melyre  $L(\Lambda_0) = x_{ik}$ .

A következőkben rácsokra vonatkozó néhány fogalmat ismertetünk:

**2.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a  $\Lambda$  rács *bővítése* a  $\bar{\Lambda}$  rácsnak, ha  $\bar{\Lambda} \subset \Lambda$ . Ez a bővítés *megengedett*, ha  $m(\Lambda) = m(\bar{\Lambda})$ , azaz a minimum nem csökken a bővítés során.

A bővítés helyett használatos a centrálás is, de mi a bővítést használjuk, mivel a centrálás – a magasabb dimenziós kristálytan újabb szóhasználatában – a kiindulási rács szimmetriáit is fixen hagyja. A mi esetünkben erről nincs szó.



2.1. ábra.

A fenti ábrán a 4-dimenziós kockarács egy megengedett bővítése látható, amikor az egységkocka testátlója  $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2$  hosszúságú. A kocka középpontot bővítő rácspontnak vehetjük.

**2.2. Definíció.** A megengedett bővítés *indexe* egy szám, melyet a következőképpen adunk meg:  $\text{ind}(\Lambda/\bar{\Lambda}) = v(\bar{\Lambda})/v(\Lambda)$ , ahol  $v(\Lambda)$  a  $\Lambda$  rács alapparallelepipedonjának a térfogata. (lásd: [30], [31], [29]).

Más szóval a  $\Lambda \setminus \bar{\Lambda}$  faktorcsoport egy  $p$ -ed rendű véges Abel csoport, ahol a  $p$ -t nevezzük a bővítés indexének [44].  $V_n$ -nel jelöljük az összes  $n$ -dimenziós rács minden megengedett bővítésének a lehető legnagyobb indexét. S.S. RYSHKOV [50] és N.V. ZAHAROVA-N.V. NOVIKOVA [70]  $n \leq 8$  esetén meghatározta az összes megengedett bővítést  $\mathbb{E}^n$ -ben. Így  $V_n$  értéke kis  $n$ -ek

esetén ismert, nagy  $n$ -re néhány becslés adott ([12], [41], [42], [48]). A következőkben néhány, a témában fontos és a bizonyításunk során is használt eredményt ismertetünk:

**2.1. Tétel.** (G. HORVÁTH Á. [30]) *Tetszőleges  $n$ -dimenziós rács esetén  $L_n \leq V_n$ .*

A fenti becslés általában nem „éles”, mert  $V_1 = V_2 = V_3 = 1$  és  $V_4 = V_5 = 2$ , de a következő tétel szerint:

**2.2. Tétel.** (G. HORVÁTH Á. [30])  *$L_n = 1$  az  $n \leq 5$  esetben.*

A következő tétel a nevezetes gyökrácsokra vonatkozó eredményeket tartalmazza:

**2.3. Tétel.** (G. HORVÁTH Á. [31])  *$L(Z_n) = L(A_n) = L(D_n) = L(E_6) = L(E_7) = 1$  és  $L(E_8) = 2$ .*

Így az utolsó tétel alapján látható, hogy  $L_8 > 1$ . A hiányzó 6- és 7-dimenziós esetekben belátjuk, hogy  $L_6$  és  $L_7$  is egyenlő 1-gyel. A 6-dimenziós eset bizonyítása a fenti fogalmakra épül, míg 7-dimenzióban a tökéletes kvadratikus formákat fogjuk vizsgálni.

S.S. RYSHKOV a Minkowski redukált rácsoknak egymás utáni minimumokból álló bázisát vizsgálva a következő tételt fogalmazta meg:

**2.4. Tétel.** (S.S. RYSHKOV [50]) *Egymás utáni minimumok egy bázisának minden megengedett bővítése (affin) ekvivalens egy minimumparallelepipedon megengedett bővítésével (tehát amikor az egymás utáni lineárisan független minimumok mindegyike egyforma).*

Ennek alapján a későbbiek szempontjából feltehetjük, hogy a vizsgált  $\Lambda \subset \mathbb{E}^n$  rácsnak  $n$  lineárisan független minimuma van. Ezek az  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$

minimális vektorok egy  $\bar{\Lambda} \subset \Lambda$  részrácsot határoznak meg, ahol  $m(\Lambda) = m(\bar{\Lambda})$ . Így megengedett bővítést kapunk. A 6-dimenziós esetben a megengedett bővítéseket vizsgáljuk és alkalmas bázist választva belátjuk, hogy a minimális vektorok koordinátái maximálisan 1-gyel egyenlők.

Izomorf Abel csoportok izomorf bővítést definiálnak. Így MAJOR Z. [44]-beli eredménye alapján lehetővé válik egy adott indexhez tartozó nem-izomorf bővítések megadása tetszőleges dimenzióban.

## 2.2. A 6-dimenziós rácsok

### 2.2.1. A 2.5 tétel és a bizonyítás gondolatmenete

**2.5. Tétel.** ([64])  *$L_6$  egyenlő 1-gyel, azaz, a fentieknek megfelelően, minden 6-dimenziós euklideszi  $\Lambda$  rácsnak van olyan bázisa, melyben a  $\Lambda$  rács minimális vektorainak maximális koordinátája legfeljebb 1.*

Néhány mondatban vázoljuk a bizonyítás gondolatmenetét. A következőkben feltesszük, hogy a  $\Lambda \subset \mathbb{E}^6$  rács, az előző fejezetnek megfelelően, 6 lineárisan független minimális vektort tartalmaz. Legyen  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_6\}$  a  $\bar{\Lambda} \subset \Lambda$  részrács egy bázisa, ahol  $\mathbf{a}_i$  egység hosszú minimális vektorok. A  $\Lambda$  rács a  $\bar{\Lambda}$  rácsnak egy megengedett bővítése. Tekintsük azt a  $\bar{\Lambda}$  rácsot, melyre  $\text{ind}(\Lambda/\bar{\Lambda})$  maximális. A  $\bar{\Lambda}$  rács Gram-mátrixát jelölje  $G$ .

A fentiek szerint S.S. RYSHKOV [50]-ben meghatározta az összes megengedett bővítést  $n=6$ -ra is. Így összesen 3 különböző 2-indexű, egy 3-indexű és egy 4-indexű megengedett bővítés van. A 2.5 tétel bizonyítását az indexeknek megfelelően három részre osztottuk. A 2.6 segédtételben azt az esetet vizsgáljuk, mikor a megengedett bővítés indexe 4. Hasonlóság erejéig egy olyan rács van, melynek az indexe 4. Ez könnyen adódik [50]-ből, de a Gram-mátrix elemeinek az összegét becsülve egyszerűen bizonyítjuk is. Az ilyen becslések a

további esetek tárgyalásakor is fontos szerepet játszanak. Ebben az esetben a karakterisztikus mátrix, azaz a rács összes minimumából álló mátrix, könnyedén felírható. A karakterisztikus mátrixot  $[\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_\sigma]$ -val jelöljük (lásd [50], [30], [31]), ahol  $\pm\mathbf{m}_1, \dots, \pm\mathbf{m}_\sigma$  a rács összes különböző minimuma. Végezetül alkalmas bázis cserét végrehajtva a karakterisztikus mátrix minden eleme nyilvánvalóan  $0, -1, +1$  lesz.

A 2.8 segéd-tételben a 3-indexű megengedett rácsbővítéseket tanulmányozzuk. Szintén a Gram-mátrix elemeinek összegét becsülve nagyon érdekes feltételeket kapunk. Ezen feltételeknek megfelelően két osztályba sorolhatjuk azokat a rácsokat, melyeknek az indexe 3. Az első esetben az osztályhoz tartozó minden rácstra felírjuk az összes lehetséges minimumot, majd ezeken a rácson egy alkalmas bázis cserét végrehajtva elérjük, hogy a rácso összes lehetséges minimumára a koordináták egyenlők legyenek  $0, -1, +1$ -gyel. A második esetben bebizonyítjuk, hogy bármely ehhez az osztályhoz tartozó  $\Lambda$  rácstra  $M(\Lambda) \subseteq M(E_6)$ , ahol  $M(\Lambda)$  jelöli a  $\Lambda$  rács összes minimumát. Felhasználva a 2.3 tételt és az  $E_6$  gyökrács néhány tulajdonságát ([8],[31]), ebben az esetben is könnyen igazolható a tétel.

A bizonyítás során egy új konstrukciót is megadunk az  $E_6$  rácstra, nevezetesen, mint egy  $G$  Gram-mátrixszal megadott  $\bar{\Lambda}$  rácsnak egy speciális 3-indexű bővítése. Ez a konstrukció kiemeli az  $E_6$  rács geometriai és szimmetria tulajdonságait. Megjegyezzük, hogy a maximális szimmetriával rendelkező rácsokat  $E^6$ -ban W. PLESKEN és M. POHST [49]-ben megadta. A tétel bizonyításában felhasználjuk, hogy az  $E_6$  gyökrács a 6-dimenziós rácso között maximális számú minimum vektorral és maximális szimmetriával rendelkezik.

A 2.13 segéd-tételben a 2-indexű megengedett rácsbővítéseket vizsgáljuk. A bizonyítás három részre oszlik a három különböző 2-indexű megengedett

bővítésnek megfelelően. Ezen esetek bizonyításának az alapötlete hasonló a [31]-beli bizonyításokhoz. Mindhárom esetben felírjuk az összes  $E^6$ -beli adott esethez tartozó rács minden lehetséges minimumát és bebizonyítjuk, hogy a  $\Lambda$  rácsnak alkalmas bázisát választva a minimumok koordinátái  $\pm 1, 0$ .

### 2.2.2. A 2.5 tétel bizonyítása

**2.6. Segéd-tétel.** *Legyen  $\Lambda \subset \mathbb{E}^6$  és  $\bar{\Lambda} \subset \Lambda$  olyan rács, melynek 6 lineárisan független minimuma van. Ha  $\text{ind}(\Lambda/\bar{\Lambda}) = 4$ , akkor a  $\Lambda$  rácsnak egy alkalmas bázisát választva,  $\Lambda$  minimumainak a koordinátái  $\pm 1, 0$ .*

**2.7. Lemma.** *Ha  $\text{ind}(\Lambda/\bar{\Lambda}) = 4$ , akkor a  $\bar{\Lambda} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_6]$  rács a 6-dimenziós kockarács és a  $\Lambda$  rács minimumait az  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_6\}$  bázisra vonatkozólag felírhatjuk a következő karakterisztikus mátrix sémában:*

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm \frac{1}{2} & 0 & \pm \frac{1}{2} \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm \frac{1}{2} & 0 & \pm \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & \pm \frac{1}{2} & \pm \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & \pm \frac{1}{2} & \pm \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & \pm \frac{1}{2} & \pm \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 & \pm \frac{1}{2} & \pm \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A  $\Lambda$  rács bázisa  $\{\mathbf{m}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{m}_2\}$ , ahol  $\mathbf{m}_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)^T$  és  $\mathbf{m}_2 \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ .

Megjegyezzük, hogy a lemma bizonyítása könnyen kiolvasható RYSHKOV [50] -beli munkájából, de a teljesség kedvéért röviden mégis bizonyítjuk. A gondolatmenetet a további esetekben is alkalmazzuk.

**Bizonyítás:** Alapvetően két esetet különböztetünk meg.

1. Tegyük fel, hogy a  $\Lambda$  rácsnak két  $\Lambda_1^{d_1} \subset \Lambda$  és  $\Lambda_2^{d_2} \subset \Lambda$  részrácsa van, ahol a fenti dimenzióra  $d_j < 6$ . Legyenek  $\bar{\Lambda}_j^{d_j} \subset \Lambda_j^{d_j}$  olyan rácsok, melyre  $\Lambda_j^{d_j}$



megengedett bővítése a  $\overline{\Lambda_j^{d_j}}$  rácsnak és  $\text{ind}\left(\Lambda_j^{d_j}/\overline{\Lambda_j^{d_j}}\right) = 2$ . Így a dimenzióra  $d_j > 3$  teljesül, tehát a következő eseteket különböztetjük meg.

Először vizsgáljuk azt, ha  $d_1 = d_2 = 4$ . A  $\Lambda_1^4$  és  $\Lambda_2^4$  részrácsok a jól ismert 4-dimenziós tércentrált kockarácsok, (lásd: [50]), és a 4-dimenziós  $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4] = \overline{\Lambda_1^4} \subset \Lambda_1^4$  részrács a 4-dimenziós kockarács. Így  $\mathbf{m}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_4 \in \Lambda_1^4$ . Ha  $[\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6] = \overline{\Lambda_2^4} \subset \Lambda_2^4$ , akkor  $\mathbf{m}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{a}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_4 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_5 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_6 \in \Lambda_2^4$ . Tehát ezek alapján  $|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2| = 1$ . Az  $\{\mathbf{m}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{m}_2\}$  által kifeszített  $\Lambda$  rács a 6-dimenziós kockarácsnak egy 4-indexű megengedett bővítése. A  $\Lambda$  rácsnak a  $\overline{\Lambda_3^4} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6]$  részrács síkjával vett metszete szintén egy 4-dimenziós tércentrált kockarács, mivel  $\frac{1}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_5 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_6 = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 - \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4 \in \Lambda$ . Így  $\mathbf{m}_3 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \in \Lambda_3^4$ . Könnyen látható, hogy a 6-dimenziós kocka további bővítő pontokat nem tartalmazhat, mert valamely rácsponttól a távolsága kisebb lenne egynél, így a rács minimumait az  $\{\mathbf{a}_i\}$  bázisban kifejezhetjük úgy, ahogy a lemmában állítottuk. Ha a  $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4] = \overline{\Lambda_1^4} \subset \Lambda_1^4$  részrács mellett a  $[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5] = \overline{\Lambda_4^4} \subset \Lambda_4^4$  részrácsot nézzük, akkor  $\mathbf{m}_4 = \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_4 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_5 \in \Lambda_4^4$ . Így  $|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_4| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$  ellentmond annak, hogy a bővítés megengedett, tehát nem lehetséges.

Másrészt tekintsük azt az esetet, ha  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 5$ , ekkor  $\mathbf{m}_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)^T \in \Lambda_1^4$  és  $\mathbf{m}_2 \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \in \Lambda_2^5$  az  $\{\mathbf{a}_i\}$  bázisban, így  $|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2| < 1$  lenne. Hasonlóan járhatunk el, ha  $d_1 = d_2 = 5$ , ekkor  $\mathbf{m}_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T \in \Lambda_1^5$  és  $\mathbf{m}_2 \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \in \Lambda_2^5$  az  $\{\mathbf{a}_i\}$  bázisban, így  $|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2| < 1$  lenne. Tehát egyik eset sem lehetséges, hiszen a bővítés megengedett volt.

2. Tegyük fel, hogy a  $\Lambda$  rácsnak egy  $\Lambda^d \subset \Lambda$  részrácsa van és  $\Lambda^d$  megengedett bővítése a  $\overline{\Lambda^d}$  rácsnak. Jól ismert [50]-ből, hogy nincs olyan  $\Lambda^d$  rács, melyre  $d < 6$  és  $\text{ind}\left(\Lambda^d/\overline{\Lambda^d}\right) = 4$ . (Ezt is könnyen bizonyíthatnánk a  $d = 6$  esettel analóg módon.) Tehát  $d = 6$  és  $\text{ind}\left(\Lambda/\overline{\Lambda}\right) = 4$  a  $\overline{\Lambda} \subset \Lambda$  rácsra. Így van



$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
& & & & & & & m_3 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{array}
\left. \vphantom{\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}} \right]$$

A karakterisztikus mátrix sorain végrehajtott egész együtthatós lineáris operáció ekvivalens a rács egy bázis cseréjével (lásd: [30], [31]). A második sort hozzáadva az elsőhöz és az ötödik sort az utolsóhoz, azt kapjuk, hogy a karakterisztikus mátrix minden eleme  $0, 1, -1$ -gyel egyenlő. Így egy a fentieknek megfelelő bázisban a rács minimumai felírhatók  $0, 1, -1$  koordinátákkal.

**2.8. Segéd-tétel.** *Legyen  $\Lambda \subset \mathbb{E}^6$  és  $\bar{\Lambda} \subset \Lambda$  olyan rács, melynek 6 lineárisan független minimuma van. Ha  $\text{ind}(\Lambda/\bar{\Lambda}) = 3$ , akkor a  $\Lambda$  rácsnak egy alkalmas bázisát választva,  $\Lambda$  minimumainak a koordinátái  $\pm 1, 0$ .*

A következő lemmákban a 3-indexű 6-dimenziós rácsok tulajdonságait fogjuk vizsgálni. A 2.9 lemmában a Gram-mátrix elemeinek az összegét becsljük. A 2.10 lemmában a fenti rácsokra felírjuk az összes lehetséges minimális vektort. Az utolsó két lemmában két típusba soroljuk a 6-dimenziós 3-indexű rácsokat. Az első típusú rácsok nem tartalmaznak 4-dimenziós tércentrálts kockarácsot, a második típusúak igen.

**2.9. Lemma.** *Legyen az  $\mathbb{E}^6$ -beli  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_6\}$  a  $\bar{\Lambda}$  rácsnak egy bázisa,  $|\mathbf{a}_i| = 1 = |\overrightarrow{OA_i}|$  és  $\text{ind}(\Lambda/\bar{\Lambda})$  egyenlő 3-mal. Tekintsük a  $B_j(\frac{j}{6}, \dots, \frac{j}{6})$  pontokat ( $j=1, 2, \dots, 5$ ) az  $\{\mathbf{a}_i\}$  bázisban, ekkor a bővítés feltétele szerint  $\overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OB_4} \in \Lambda$ . Ha  $G = (a_{ij})$  az  $\mathbf{a}_i$ -k skaláris szorzataiból képzett Gram-mátrix, akkor*

$$\frac{3}{2} \leq \sum_{i < j} a_{ij} \leq \frac{15}{4} \quad (1)$$

és az  $\overrightarrow{A_i B_2}$  vektor hossza 1-gyel egyenlő.

**Bizonyítás:** Legyen  $\overrightarrow{OB_2} = \mathbf{b}_2 \left(\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{3}\right)^T$ . Világos, hogy

$$|\mathbf{b}_2|^2 = \mathbf{b}_2^T G \mathbf{b}_2 \geq 1.$$

Így a Gram-mátrixot kifejtve, majd rendezve

$$\begin{aligned} \frac{2}{9} \sum_{i < j} a_{ij} + \frac{2}{3} &\geq 1, \\ \sum_{i < j} a_{ij} &\geq \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Tekintsük most a  $C_{kl}$  pontokat, ahol  $\overrightarrow{OC_{kl}} := \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_l$  és  $1 \leq k < l \leq 6$ .  $|\overrightarrow{C_{kl}B_2}|^2 \geq 1$  bármely  $k, l$  indexpárra, mivel a bővítés megengedett. Így a következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{C_{12}B_2}|^2 &= \frac{8}{9}a_{12} - \frac{4}{9} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=3}^6 a_{ij} + \frac{2}{9} \sum_{2 < i < j} a_{ij} + \frac{4}{3} \geq 1. \\ &\vdots \\ |\overrightarrow{C_{56}B_2}|^2 &= \frac{8}{9}a_{56} - \frac{4}{9} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=5}^6 a_{ij} + \frac{2}{9} \sum_{i < j < 5} a_{ij} + \frac{4}{3} \geq 1. \end{aligned}$$

Összegezve a  $\binom{6}{2} = 15$  darab egyenlőtlenséget és rendezve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} -\frac{4}{3} \sum_{i < j} a_{ij} + \frac{4}{3} \cdot 15 &\geq 15 \\ \sum_{i < j} a_{ij} &\leq \frac{15}{4}. \end{aligned} \quad (3)$$

A (2) és (3) egyenlőtlenségéből adódik (1).

Hasonlóan a megengedett bővítés miatt  $|\overrightarrow{A_k B_2}|^2 \geq 1$  minden  $k=1, \dots, 6$ -ra.

$$|\overrightarrow{A_1 B_2}|^2 = 1 - \frac{4}{9} \sum_{j=2}^6 a_{1j} + \frac{2}{9} \sum_{1 < i < j} a_{ij} \geq 1.$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ |\overrightarrow{A_6 B_2}|^2 &= 1 - \frac{4}{9} \sum_{j=1}^5 a_{6j} + \frac{2}{9} \sum_{i < j < 6} a_{ij} \geq 1. \end{aligned}$$

Ismét összeadva a fenti egyenlőtlenségeket kapjuk, hogy

$$|\overrightarrow{A_1 B_2}|^2 + \cdots + |\overrightarrow{A_6 B_2}|^2 = 6 + \left( -\frac{4}{9} \cdot 2 + \frac{2}{9} \cdot 4 \right) \sum_{i < j} a_{ij} = 6 \geq 6.$$

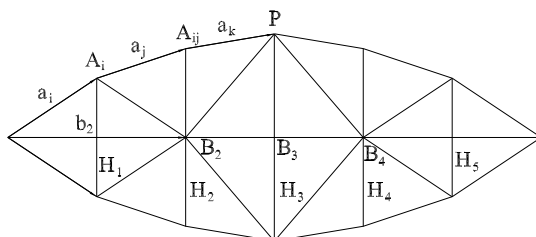
Csak az egyenlőség teljesülhet és akkor és csak akkor ha  $|\overrightarrow{A_k B_2}|^2 = 1$  minden  $k$ -ra, amint állítottuk.  $\square$

Következmény: A fenti  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  és  $B_1$  pontok egy 5-dimenziós hipersíkban fekszenek. Ezt a hipersíkot  $H_1$ -gyel jelöljük. Mivel  $|OB_1| = |B_1 B_2|$  és  $|OA_i| = 1 = |A_i B_2|$ , a  $H_1$  hipersík merőleges az  $OB_2$  vektorra.  $H_i$ -vel jelöljük az  $OB_i$  vektorra merőleges, a  $B_i$  ponton átmenő hipersíkot.

Az előző lemmában a  $B_2$  pont koordinátáinak előjelét önkényesen mind pozitívrá választottuk. Ebből következik, hogy a Gram-mátrix minden eleme szintén nem kisebb nullánál. Valóban, mivel  $|\overrightarrow{OB_2}| \geq 1$  és  $|\overrightarrow{C_{kl} B_2}| \geq 1$ , így  $|\overrightarrow{OC_{kl}}| \geq \sqrt{2}$ . Tehát az  $OA_k C_{kl}$  háromszög nem hegyesszögű, így az  $\mathbf{a}_k$  és  $\mathbf{a}_l$  vektorok nem tompaszögűek, azaz  $a_{kl} \geq 0$  bármely  $k, l$  párra. Megjegyezzük még, hogy nyilvánvalóan  $a_{kl} \leq \frac{1}{2}$  bármely  $k, l$  párra.

**2.10. Lemma.** *Legyen az  $\mathbb{E}^6$ -beli  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_6\}$  a  $\bar{\Lambda}$  rácsnak egy bázisa,  $|\mathbf{a}_i| = 1 = |\overrightarrow{OA_i}|$ ,  $\text{ind}(\Lambda/\bar{\Lambda})$  egyenlő 3-mal és mint fentebb  $\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_6)$ . Ebben az esetben a  $\Lambda$  rácsnak a következő vektorai lehetnek minimálisak:  $\pm \mathbf{a}_i$ ,  $\pm \mathbf{b}_2$ ,  $\pm(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)$ ,  $\pm(\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_2)$ ,  $\pm((\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j) - \mathbf{b}_2)$ ,  $\pm(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k)$ ,  $\pm((\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k) - \mathbf{b}_2)$ , ahol  $i, j, k = 1, \dots, 6$  és  $i, j, k$  páronként különböző indexek (2.2 ábra).*

**Bizonyítás:** Legyen  $\pi$  az  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_6\}$  vektorok által kifeszített paralelepipedon. Megmutatjuk, hogy a  $\bar{\Lambda}$  rács minimumai reprezentálhatók a  $\pi$



2.2. ábra.

parallelepipedon bizonyos éleinek és átlóinak (két csúcsot összekötő szakasz) megfelelő vektorokkal. Valóban, ha az  $\mathbf{m}$  origó kezdőpontú minimális vektor metszi például a  $\pi$  parallelepipedon  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$  vektorai által kifeszített  $(n-1)$ -dimenziós lappal párhuzamos lapot, akkor  $v(\pi') > v(\pi)$ , ahol  $\pi'$  a  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5, \mathbf{m}\}$  által kifeszített parallelepipedon. Így  $\text{ind}(\Lambda/\Lambda') > 3$  lenne a  $\Lambda' = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5, \mathbf{m}]$  rácsra, mely ellentmondás.

Először be fogjuk bizonyítani, hogy a  $\pi$  parallelepipedon bizonyos éleinek és átlóinak a hossza mindig nagyobb mint 1. Így csak a többi él és átló lehet a  $\pi$  minimuma, azaz a  $\bar{\Lambda}$  rács minimuma.

Az előzőekben láttuk, hogy ha  $|i-j| > 1$ , akkor a  $H_i$  és  $H_j$  hipersíkok távolsága nagyobb egynél, így ebben az esetben a rajtuk lévő pontok távolsága is nagyobb egynél. Ennek alapján az origó kezdő pontú vektorok közül csak  $\pm \mathbf{a}_i$ -k lehetnek minimálisak. Az  $\mathbf{a}_i$  kezdőpontú vektorok közül a  $\pm(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)$  és a  $\pm(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k)$  vektorok lehetnek minimálisak. Belátjuk, hogy a fenti  $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j$  kezdőpontú vektoron kívül más ilyen vektor nem lehet minimális. Először igazoljuk, hogy  $|(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j) - (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_l)| > 1$ , ahol  $i, j, k, l = 1, \dots, 6$  és  $i, j, k, l$  páronként különböző indexek. Legyen  $\mathbf{c}_{12} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{c}_{34} = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$ ,  $\mathbf{c}_{56} = \mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_6$

és  $\mathbf{c}_{kl} = \overrightarrow{OC_{kl}}$ ,  $C_{kl} \in H_2$ . Nyilvánvalóan  $|\mathbf{c}_{kl}| < 2$ . Mivel  $\mathbf{c}_{12} + \mathbf{c}_{34} + \mathbf{c}_{56} = \overrightarrow{OB_6}$  és  $H_2 \perp \overrightarrow{OB_6}$ , a  $\mathbf{c}_{kl}$  vektorok felírhatók a következő formában:  $\mathbf{c}_{kl} = \mathbf{c}_{kl}^\perp + \mathbf{c}_{kl}^\parallel$ , ahol  $\mathbf{c}_{kl}^\perp = \overrightarrow{B_2C_{kl}} \in H_2$  és  $\mathbf{c}_{kl}^\parallel = \overrightarrow{OB_2}$ . Következésképpen,  $\mathbf{c}_{12}^\perp + \mathbf{c}_{34}^\perp + \mathbf{c}_{56}^\perp = \mathbf{0}$ , azaz  $\mathbf{c}_{56}^\perp = -(\mathbf{c}_{12}^\perp + \mathbf{c}_{34}^\perp)$ , így  $|\mathbf{c}_{56}^\perp| = |\mathbf{c}_{12}^\perp + \mathbf{c}_{34}^\perp|$ . Ha indirekt feltesszük, hogy  $|\mathbf{c}_{12} - \mathbf{c}_{34}| = 1$ , akkor  $|\mathbf{c}_{12}^\perp - \mathbf{c}_{34}^\perp| = 1$ . Mivel  $|\mathbf{c}_{kl}^\perp| \geq 1$ ,  $|\mathbf{c}_{56}^\perp| = |\mathbf{c}_{12}^\perp + \mathbf{c}_{34}^\perp| \geq \sqrt{3}$ , így a  $|\mathbf{c}_{56}| \geq 2$  következik a  $|\mathbf{c}_{56}^\perp| \geq 1$  egyenlőtlenségből. Ez ellentmondás, így  $|\mathbf{c}_{12} - \mathbf{c}_{34}| \neq 1$ , tehát  $|(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j) - (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_l)| > 1$ .

Másrészt belátjuk, hogy  $|(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k) - (\mathbf{a}_l + \mathbf{a}_m)| > 1$ , ahol  $i, j, k, l, m = 1, \dots, 6$  és  $i, j, k, l, m$  páronként különböző indexek. Jelöljük  $\mathbf{n}$ -nel a  $(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k) - (\mathbf{a}_l + \mathbf{a}_m)$  vektort és legyen  $\mathbf{a}_n$  a hatodik generáló vektor, valamint  $\mathbf{c}_{lm} = \mathbf{a}_l + \mathbf{a}_m$ ,  $\mathbf{c}_{lmn} = \mathbf{a}_l + \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_n$  és  $\mathbf{c}_{ijk} = \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k$ . Nagy betűvel jelöljük azokat a pontokat, melyeknek helyvektorai a fenti vektorok. Így az  $\mathbf{n} - \mathbf{a}_n$  vektor, azaz a  $\overrightarrow{C_{ijk}C_{lmn}}$  a  $\pi$  paralelepipedonnak egy valódi testátlója, tehát átmegy a  $B_3$  középponton. Ha feltesszük, hogy  $|\mathbf{n}| = 1$ , akkor  $C_{lm}C_{lmn}C_{ijk}$  egy egyenlőszárú háromszög, melynek  $C_{lm}$ -beli magasságtalpontja szintén  $B_3$ . Másrészt, mivel a bővítés megengedett  $|C_{ijk}B_2| = |C_{lmn}B_2| \geq 1$ , így  $|B_2B_3| \geq |C_{lm}B_3|$ . Minthogy  $|B_2B_3|$  a  $H_2$  és  $H_3$  hipersíkok távolsága, így  $C_{lm}$  pont vagy megegyezik  $B_2$ -vel vagy nincs a  $H_2$  hipersíkban, melyek mindegyike ellentmondás. Tehát beláttuk, hogy  $|(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k) - (\mathbf{a}_l + \mathbf{a}_m)| > 1$ .

Végül belátjuk azt is, hogy  $|(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k) - (\mathbf{a}_l + \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_n)| > 1$ , ahol  $i, j, k, l, m, n = 1, \dots, 6$  és  $i, j, k, l, m, n$  páronként különböző indexek. A fentiekhez hasonlóan jelölje  $\mathbf{c}_{ijk}$  az  $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k$  vektort és  $\mathbf{c}_{lmn}$  az  $\mathbf{a}_l + \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_n$  vektort és nagy betű a neki megfelelő pontot. Tegyük fel, hogy  $|\mathbf{c}_{ijk} - \mathbf{c}_{lmn}| = 1$ . Mivel  $C_{ijk}$  pont a  $C_{lmn}$  pont  $B_3$ -ra vonatkozó tükörképe, így  $|\overrightarrow{B_3C_{123}}| = |\overrightarrow{B_3C_{456}}| = \frac{1}{2}$ . Másrésztől viszont,

$$|\overrightarrow{B_2B_3}|^2 = |\overrightarrow{OB_1}|^2 = |\mathbf{b}_1|^2 = \mathbf{b}_1^T G \mathbf{b}_1 = \frac{1}{18} \sum_{i < j} a_{ij} + \frac{1}{6}.$$

A (3) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\sum_{i < j} a_{ij} \leq \frac{15}{4}.$$

Így

$$|\overrightarrow{B_2 B_3}|^2 \leq \frac{1}{18} \cdot \frac{15}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{8}, \quad \text{azaz}$$

$$|\overrightarrow{B_2 B_3}| \leq \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Mivel  $\overrightarrow{B_2 B_3}$  merőleges a  $\overrightarrow{B_3 C_{123}}$  vektorra,  $|\overrightarrow{B_2 C_{123}}| \leq \sqrt{\frac{5}{8}}$ . De ez lehetetlen, mert  $|\overrightarrow{B_2 C_{123}}| \geq 1$ .

Eddig megvizsgáltuk a  $\bar{\Lambda}$  rács lehetséges minimumait. A bővítés során a  $\mathbf{b}_2$  vektor hozzávételével a  $\Lambda$  rácsnak még a következő minimális vektorai lehetnek:  $\pm \mathbf{b}_2$ ,  $\pm (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_2)$ ,  $\pm ((\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j) - \mathbf{b}_2)$ ,  $\pm ((\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k) - \mathbf{b}_2)$ , ahol  $i, j, k = 1, \dots, 6$  és  $i, j, k$  páronként különböző indexek. Mivel  $B_2 \in H_2$ , ezért a  $H_4$  vagy annál távolabbi hipersíkra nem mutat minimális vektor. Így bizonyítottuk a 2.10 lemmát.

**2.11. Lemma.** *Tekintsük a  $\Lambda$  és  $\bar{\Lambda}$  rácsokat, melyeknek 6 lineárisan független minimuma van. Legyen  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_6\}$  a  $\bar{\Lambda}$  egy bázisa  $\mathbb{E}^6$ -ban és  $|\mathbf{a}_i| = 1$ , valamint  $\text{ind}(\Lambda/\bar{\Lambda}) = 3$ . Ha  $|\overrightarrow{PB_2}| > 1$  minden  $P \in H_3$ -ra, ahol  $\overrightarrow{OP} \in \Lambda$ , akkor  $\Lambda$  rács lehetséges minimumai (az  $\{\mathbf{a}_i\}$  bázisban, az  $\{\mathbf{a}_i\}$  vektoroknak egy megfelelő sorrendjét választva) a következő formában írhatók fel:*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & b_2 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{array}{cccccccccccc}
m_7 & \dots & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \dots & m_{27} & m_{28} & m_{29} & m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \\
-\frac{2}{3} & \dots & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \dots & \frac{1}{3} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{3} & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \dots & \frac{1}{3} & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
\frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
\frac{1}{3} & \dots & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}
\Bigg].$$

Megjegyezzük, hogy egy konkrét  $\Lambda$  rács általában nem tartalmazza az összes fenti minimális vektort, viszont a feltételeknek eleget tevő  $\Lambda$  rács összes minimális vektora megtalálható a fentiek között.

**Bizonyítás:** Nyilvánvalóan,  $\mathbf{a}_i$  minimális, ahol  $i = 1, \dots, 6$ . Ha  $|\overrightarrow{OB_2}| = 1$ , akkor  $\mathbf{b}_2$  is minimális vektor. A 2.9 lemma alapján  $|A_i B_2| = 1$  a  $\Lambda$  rácsban, így  $\mathbf{m}_i$  minimális, ahol  $i = 7, \dots, 12$ . Ha a 2.9 lemma jelölései alapján  $|C_{ij} B_2| = 1$  a  $\Lambda$  rácsban, akkor az  $\mathbf{m}_i$  vektorok is minimálisak lehetnek, ahol  $i = 13, \dots, 27$ . Ha  $|\overrightarrow{PB_2}| > 1$  minden  $P \in H_3$ -ra, akkor a 2.10 lemmában szereplő  $\pm((\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k) - \mathbf{b}_2)$  vektorok nem lehetnek minimálisak.

A következőkben azt bizonyítjuk, hogy az említett lemmában szereplő lehetséges minimumok közül a  $\pm(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)$  és a  $\pm(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k)$  vektorok mindegyike nem fordul elő egy konkrét  $\Lambda$  rács esetén.

Először bebizonyítjuk, hogy a  $G$  Gram-mátrix egy sorának legfeljebb két  $a_{ij}$  eleme lehet egyenlő  $\frac{1}{2}$ -del. Tegyük fel indirekt, hogy az első sorban három elem egyenlő  $\frac{1}{2}$ -del. A 2.9 lemma alapján

$$|\overrightarrow{A_1 B_2}|^2 = 1 - \frac{4}{9}(a_{12} + \dots + a_{16}) + \frac{2}{9}(a_{23} + \dots + a_{56}) = 1,$$

így

$$2(a_{12} + \dots + a_{16}) = (a_{23} + \dots + a_{56}).$$

Mivel  $a_{ij} \geq 0$  bármely  $i, j$  párra, a feltevés miatt  $(a_{12} + \dots + a_{16}) \geq \frac{3}{2}$ , ezért

$(a_{23} + \dots + a_{56}) \geq \frac{6}{2}$  és  $(a_{12} + \dots + a_{56}) \geq \frac{9}{2}$ . Ez ellentmond a 2.9 lemma (3) egyenlőtlenségének. Tehát a  $G$  mátrix felírható például a következő formában, hogy a lehető legtöbb  $\frac{1}{2}$  elemet tartalmazza:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

(Valóban, ha a  $G$  mátrix sorának legfeljebb két  $a_{ij}$  eleme egyenlő  $\frac{1}{2}$ -del és  $G$  nem a fenti (4) alakú, akkor könnyen látható, hogy az  $\mathbf{a}_i$  vektoroknak a sorrendjét megcserélve a mátrix a fenti alakúra hozható.) Így  $a_{12} = a_{23} = a_{34} = a_{45} = a_{56} = a_{16} = \frac{1}{2}$ , tehát az  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$ ,  $\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4$ ,  $\mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_5$ ,  $\mathbf{a}_5 - \mathbf{a}_6$ ,  $\mathbf{a}_6 - \mathbf{a}_1$ , azaz a  $\mathbf{m}_i$  vektorok, ahol  $i = 1, 2, \dots, 6$  minimálisak.

Másrészt belátjuk, hogy  $\mathbf{m} = (\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k)$  akkor és csak akkor minimális, ha  $a_{ij} = 0$ ,  $a_{ik} = \frac{1}{2}$  és  $a_{jk} = \frac{1}{2}$ . Valóban, ha  $\mathbf{m}$  minimális,  $\mathbf{m}$  hosszának a négyzete  $\mathbf{m}^T G \mathbf{m} = 3 + 2a_{ij} - 2a_{ik} - 2a_{jk}$  egyenlő eggyel. Az egyenletet rendezve  $2 + 2a_{ij} = 2a_{ik} + 2a_{jk}$ , mely akkor és csak akkor teljesül, ha  $a_{ij} = 0$ ,  $a_{ik} = \frac{1}{2}$  és  $a_{jk} = \frac{1}{2}$ . A megfordítás nyilvánvalóan látszik. Tehát, ha a  $G$  mátrixban azokat az  $a_{ij}$  elemeket, melyekre  $a_{ik} = a_{jk} = \frac{1}{2}$  nullának választjuk további minimális vektorokat kaphatunk. A legtöbbet akkor, ha a fenti  $G$  mátrixban  $a_{13} = a_{15} = a_{24} = a_{26} = a_{35} = a_{46} = 0$ . Így  $\mathbf{m}_i$  minimális, ahol  $i = 28, 29, \dots, 33$ . Ezzel lemmánkat bizonyítottuk.

**2.12. Lemma.** *Tekintsük a  $\Lambda$  és  $\bar{\Lambda}$  rácsokat, melyeknek 6 lineárisan független minimuma van. Legyen  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_6\}$  a  $\bar{\Lambda}$  egy bázisa  $\mathbb{E}^6$ -ban és  $|\mathbf{a}_i| = 1$ , valamint  $\text{ind}(\Lambda/\bar{\Lambda}) = 3$ . Ha  $\exists P$  melyre  $|\overrightarrow{PB_2}| = 1$ , ahol  $P \in H_3$  és  $\overrightarrow{OP} \in \Lambda$ , akkor  $M(\Lambda) \subseteq M(E_6)$ .*

**Bizonyítás:** Mivel  $|B_2B_3| = |B_3B_4|$  és  $H_3$  hipersík merőleges  $B_2B_4$ -re,  $|PB_2| = |PB_4| = 1$ . Legyen  $\overrightarrow{PB_4} = \mathbf{m}_1$  és  $\overrightarrow{B_2P} = \mathbf{m}_2$ , továbbá  $\bar{\Lambda}_1^4 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{m}_1]$ ,

$\Lambda_1^4 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2]$   $\bar{\Lambda}_2^4 = [\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{m}_2]$  és  $\Lambda_2^4 = [\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{b}_2]$ . Ha  $\mathbf{p} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ , akkor  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{m}_1 = \frac{2}{3}(\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_6) = 2\mathbf{b}_2$  és  $\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_6 + \mathbf{m}_2 = \frac{2}{3}(\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_6) = 2\mathbf{b}_2$ . Így  $\text{ind}(\Lambda_i^4/\bar{\Lambda}_i^4) = 2$ , ahol  $i = 1, 2$ , a  $\Lambda_1^4$  és  $\Lambda_2^4$  rácsok a jól ismert tércentrált kocka rácsok. Ezért a következő vektorok skaláris szorzataira:  $\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_1 \rangle = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2 \rangle = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3 \rangle = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{m}_1 \rangle = \frac{1}{2}$ ,  $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{m}_1 \rangle = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{m}_1 \rangle = \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{m}_1 \rangle = 0$ , valamint  $\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_4 \rangle = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_5 \rangle = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_6 \rangle = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{m}_2 \rangle = \frac{1}{2}$ ,  $\langle \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \rangle = \langle \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_6 \rangle = \langle \mathbf{a}_4, \mathbf{m}_2 \rangle = \langle \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6 \rangle = \langle \mathbf{a}_5, \mathbf{m}_2 \rangle = \langle \mathbf{a}_6, \mathbf{m}_2 \rangle = 0$ ,  $\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle = 1$ . Egymás után megszorozva a  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{m}_1 = 2\mathbf{b}_2$  és  $\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_6 + \mathbf{m}_2 = 2\mathbf{b}_2$  egyenleteket a  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_6$  vektorokkal és felhasználva a fentieket, a Gram mátrixra a következőket kapjuk:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 1 & 0 & 0 \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & 0 & 1 & 0 \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

melyre teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned} a_{14} + a_{15} + a_{16} &= \frac{1}{2} \\ a_{24} + a_{25} + a_{26} &= \frac{1}{2} \\ a_{34} + a_{35} + a_{36} &= \frac{1}{2} \\ a_{14} + a_{24} + a_{34} &= \frac{1}{2} \\ a_{15} + a_{25} + a_{35} &= \frac{1}{2} \\ a_{16} + a_{26} + a_{36} &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Jelölje a fenti feltételeknek eleget tevő  $\Lambda$  rácsok halmazát  $\mathcal{L}$ . Könnyen látszik, hogy a  $\Lambda \in \mathcal{L}$  rácsra a következő vektorok biztosan minimálisak lesznek:  $\pm \mathbf{a}_i$ ,  $\pm(\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_2)$ , ahol  $i = 1, \dots, 6$ ,  $\pm \mathbf{b}_2$ ,  $\pm \mathbf{m}_1$ ,  $\pm \mathbf{m}_2$ ,  $\pm(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2)$ ,  $\pm(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_2)$ ,  $\pm(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_2)$ ,  $\pm(\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 - \mathbf{b}_2)$ ,  $\pm(\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_6 - \mathbf{b}_2)$ ,  $\pm(\mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_6 - \mathbf{b}_2)$ . Tehát, ha létezik  $\overrightarrow{OP} \in \Lambda$  úgy, hogy  $|\overrightarrow{PB}_2| = 1$  és  $P \in H_3$ , akkor a  $\Lambda \in \mathcal{L}$  rácsnak ezek biztos minimális vektorai. Jelölje ezeknek a minimális vektoroknak a halmazát  $M(\Lambda)$ .

Legyen  $\mathbf{m}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 - \mathbf{b}_2$  és  $\mathbf{m}_4 = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_6 - \mathbf{b}_2$ , valamint  $\bar{\Lambda}_3^4 = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{m}_3]$ ,  $\Lambda_3^4 = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{b}_2]$ ,  $\bar{\Lambda}_4^4 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{m}_4]$  és  $\Lambda_4^4 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{b}_2]$ . Ha  $|\mathbf{m}_3| = |\mathbf{m}_4| = 1$ , akkor  $\text{ind}(\Lambda_i^4 / \bar{\Lambda}_i^4) = 2$ , ahol  $i = 3, 4$ , így  $\Lambda_3^4$  és  $\Lambda_4^4$  szintén a 4-dimenziós tércentrált kocka rács. Tehát  $a_{14} = a_{24} = a_{35} = a_{36} = 0$  és (5) alapján  $a_{34} = \frac{1}{2}$ , azaz  $|\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4| = 1$ . Ennek megfelelően az új minimális vektorok:  $\pm \mathbf{m}_3$ ,  $\pm \mathbf{m}_4$ ,  $\pm (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4)$ ,  $\pm (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4 - \mathbf{b}_2)$ ,  $\pm (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 - \mathbf{b}_2)$ ,  $\pm (\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_5 - \mathbf{b}_2)$ ,  $\pm (\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_6 - \mathbf{b}_2)$ .

Legyen  $\mathbf{m}_5 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_5 - \mathbf{b}_2$  és  $\mathbf{m}_6 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_6 - \mathbf{b}_2$ , valamint  $\bar{\Lambda}_5^4 = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_6, \mathbf{m}_5]$ ,  $\Lambda_5^4 = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_6, \mathbf{b}_2]$ ,  $\bar{\Lambda}_6^4 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5, \mathbf{m}_6]$  és  $\Lambda_6^4 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5, \mathbf{b}_2]$ . Ha továbbá feltesszük, hogy  $|\mathbf{m}_5| = |\mathbf{m}_6| = 1$  is teljesül, akkor  $\text{ind}(\Lambda_i^4 / \bar{\Lambda}_i^4) = 2$ , ahol  $i = 5, 6$  és azt kapjuk, hogy  $\Lambda_5^4$  és  $\Lambda_6^4$  részrácsok szintén 4-dimenziós tércentrált kocka rácsok lesznek. Így  $a_{15} = a_{26} = 0$  és (5) alapján  $a_{25} = \frac{1}{2}$  és végül egyértelműen adódik, hogy  $a_{16} = \frac{1}{2}$ , azaz  $|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_5| = 1$  és  $|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_6| = 1$ . Megjegyezzük, hogy így  $|\mathbf{m}_7| = |\mathbf{m}_8| = 1$  és  $\Lambda_7^4$  és  $\Lambda_8^4$  szintén 4-dimenziós tércentrált kocka rácsok, ahol  $\mathbf{m}_7 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 - \mathbf{b}_2$ ,  $\mathbf{m}_8 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_6 - \mathbf{b}_2$  és  $\Lambda_7^4 = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_6, \mathbf{b}_2]$ ,  $\Lambda_8^4 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{b}_2]$ . Így ezen további feltételek teljesülése esetén a következő új minimális vektorok adódnak:  $\pm \mathbf{m}_5$ ,  $\pm \mathbf{m}_6$ ,  $\pm \mathbf{m}_7$ ,  $\pm \mathbf{m}_8$ ,  $\pm (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_5)$ ,  $\pm (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_6)$ ,  $\pm (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_5 - \mathbf{b}_2)$ ,  $\pm (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_6 - \mathbf{b}_2)$ . Ha számba vesszük az összes eddigi minimális vektort, 72-t kapunk. Mivel a minimális vektorok száma ennél nem lehet több és egyértelműen csak az  $E_6$  rács esetén lehet ennyi, azt kaptuk, hogy az  $E_6$  rács minimális vektorai közül valók a  $\Lambda \in \mathcal{L}$  rács minimumai. A következőkben belátjuk, hogy csak ezek közül kerülnek ki a  $\Lambda \in \mathcal{L}$  rács minimumai.

Az (5)-beli egyenlőségek miatt a  $\Lambda \in \mathcal{L}$  rács Gram-mátrixának bármely sorában legfeljebb egy  $\frac{1}{2}$  elem lehet. Így a 2.11 lemma bizonyítása alapján  $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k$  nem lehet minimális, hiszen ehhez egy sorban kettő  $\frac{1}{2}$  elemnek kell lennie. Tehát a 2.10 lemma alapján a minimális vektorok a  $\pm \mathbf{a}_i$  és a

$\pm(\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_2)$  vektorokon kívül, csak az  $\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j$ ,  $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j - \mathbf{b}_2$  vagy a  $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k - \mathbf{b}_2$  vektorok közül kerülhetnek ki.

Tegyük fel, hogy az  $\mathbf{m}$  vektor a  $\Lambda \in \mathcal{L}$  rács minimális vektora, de az  $E_6$  rácsnak nem. Először vizsgáljuk, ha  $\mathbf{m} = \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k - \mathbf{b}_2$ , ahol  $i, j, k = 1, \dots, 6$  páronként különböző indexek. Az  $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k - \mathbf{b}_2$  alakú minimális vektorok száma nem lehet 8-nál több, mert különben lenne 72 minimumnál több minimummal rendelkező 6-dimenziós rács. Így az  $\mathbf{a}_i$  bázis vektorok sorrendjét változtatva elérhető, hogy  $\mathbf{m}$  az  $E_6$  rács valamely fenti minimuma legyen. Másrészt, ha  $\mathbf{m} = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j$ , akkor (5) alapján a Gram mátrix egy sorában csak egy  $\frac{1}{2}$  elem lehet, így az  $\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j$  alakú minimális vektorok száma legfeljebb 3 lehet. Tehát  $\mathbf{a}_i$  bázis vektorok sorrendjét változtatva szintén elérhető, hogy  $\mathbf{m}$  az  $E_6$  rács valamely fenti minimuma legyen. Végül tekintsük, ha  $\mathbf{m} = \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j - \mathbf{b}_2$ . A fenti 12  $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j - \mathbf{b}_2$  alakú minimális vektornál nem tartalmazhat több minimális vektort egy  $\Lambda \in \mathcal{L}$  rács. Valóban, ha  $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j - \mathbf{b}_2$  minimális vektor, akkor  $a_{ij} = 0$ . Így ha 12-nél több ilyen minimális vektor van akkor a Gram mátrixnak van olyan sorra, melynek összege a főátlóbeli elemet kivéve 0. Ez ellentmond (5)-nek. Tehát  $\mathbf{m}$  a fenti minimális vektorok közül való vagy báziscserével ez elérhető. Tehát bizonyítottuk a lemmát.

**A 2.8 segédtelem bizonyítása:** Ha  $\text{ind}(\Lambda/\bar{\Lambda})$  egyenlő 3-mal és  $|\overrightarrow{PB_2}| > 1$  minden  $P \in H_3$ -ra és  $\overrightarrow{OP} \in \Lambda$ -ra, akkor a 2.11 lemmából következik, hogy a  $\Lambda$  rács  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{b}_2$  bázisra vonatkozó lehetséges minimumai felírhatók a következő formában:

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & b_2 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

| $m_7$ | $m_8$ | $m_9$ | $m_{10}$ | $m_{11}$ | $m_{12}$ | $m_{13}$ | $m_{14}$ | $m_{15}$ | $m_{16}$ | $m_{17}$ | $m_{18}$ | $m_{19}$ | $m_{20}$ |
|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| -1    | 0     | 0     | 0        | 0        | 1        | -1       | -1       | -1       | -1       | 0        | 0        | 0        | 0        |
| 0     | -1    | 0     | 0        | 0        | 1        | -1       | 0        | 0        | 0        | 1        | -1       | -1       | -1       |
| 0     | 0     | -1    | 0        | 0        | 1        | 0        | -1       | 0        | 0        | 1        | -1       | 0        | 0        |
| 0     | 0     | 0     | -1       | 0        | 1        | 0        | 0        | -1       | 0        | 1        | 0        | -1       | 0        |
| 0     | 0     | 0     | 0        | -1       | 1        | 0        | 0        | 0        | -1       | 1        | 0        | 0        | -1       |
| 0     | 1     | 1     | 1        | 1        | -2       | 1        | 1        | 1        | 1        | -2       | 1        | 1        | 1        |

| $m_{21}$ | $m_{22}$ | $m_{23}$ | $m_{24}$ | $m_{25}$ | $m_{26}$ | $m_{27}$ | $m_{28}$ | $m_{29}$ | $m_{30}$ | $m_{31}$ | $m_{32}$ | $m_{33}$ |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1        | 0        | 0        | 1        | 0        | 1        | 1        | -2       | 1        | 0        | 0        | -1       | 2        |
| 0        | 0        | 0        | 1        | 0        | 1        | 1        | 0        | -1       | 1        | 0        | -1       | 1        |
| 1        | -1       | -1       | 0        | 0        | 1        | 1        | -1       | 1        | -1       | 1        | -1       | 1        |
| 1        | -1       | 0        | 1        | -1       | 0        | 1        | -1       | 0        | 1        | -1       | 0        | 1        |
| 1        | 0        | -1       | 1        | -1       | 1        | 0        | -1       | 0        | 0        | 1        | -2       | 2        |
| -2       | 1        | 1        | -2       | 1        | -2       | -2       | 3        | 0        | 0        | 0        | 3        | -3       |

Hozzáadva a harmadik, negyedik és ötödik sort az utolsóhoz, valamint kivonva a harmadik sort az elsőből és az ötödikből, a karakterisztikus mátrix minden eleme  $0, 1, -1$ . Mivel a sorkivonás megfelel egy báziscserének, így az új bázisban a rács minimális vektorai felírhatók  $0, 1, -1$  koordinátákkal.

Ha létezik olyan  $\overrightarrow{OP} \in \Lambda$ , melyre  $|\overrightarrow{PB_2}| = 1$  és  $P \in H_3$ , akkor a 2.12 lemmából következik, hogy  $M(\Lambda) \subseteq M(E_6)$ . Mivel a 2.3 tétel alapján az  $E_6$  rács minimumai alkalmas bázisban felírhatók  $0, 1, -1$  koordinátákkal, így bizonyítottuk a segédtételt.

**2.13. Segédtétel.** *Legyen  $\Lambda \subset \mathbb{E}^6$  és  $\bar{\Lambda} \subset \Lambda$  olyan rács, melynek 6 lineárisan független minimuma van. Ha  $\text{ind}(\Lambda/\bar{\Lambda}) = 2$ , akkor a  $\Lambda$  rácsnak egy alkalmas bázisát választva,  $\Lambda$  minimumainak a koordinátái  $\pm 1, 0$ .*

**Bizonyítás:** G. HORVÁTH Á. [30]-beli cikkében található az  $n$ -dimenziós rácsok  $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$  bázisának egy olyan konstrukcióját a lehető legnagyobb térfogattal rendelkező  $\pi(\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n)$  minimál paralelepipedonra, melyben a  $v_{ji}$  koordinátájú  $\mathbf{m}_j = \sum_{i=1}^n v_{ji} \mathbf{a}_i$  élvektorok eleget tesznek az

alábbi egyenlőtlenségeknek:

$$\begin{aligned} (i) \quad & v_{jj} > 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad v_{ji} = 0, \quad \text{ahol } 1 \leq j < i \leq n \\ (ii) \quad & 0 \leq v_{ji} < v_{jj}, \quad \text{ahol } 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

Erre a bázisra vonatkozólag minden minimális vektor felírható a következő formában

$$\mathbf{m}_l = \sum_{j=1}^n \alpha_{lj} \mathbf{m}_j = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=i}^n \alpha_{lj} v_{ji} \right) \mathbf{a}_i, \quad \text{ahol } 1 \leq l \leq \sigma.$$

és az  $\alpha_{lj}$  racionális számokra teljesül:

$$|\alpha_{lj}| \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{ahol } 1 \leq l \leq \sigma.$$

Ekkor a minimális vektorok koordinátái:

$$(6) \quad m_{il} = \sum_{j=i}^n \alpha_{lj} v_{ji},$$

ahol  $\alpha_{lj}$  és  $v_{ji}$  a fenti feltételeknek tesz eleget. Tekintsük most az  $n=6$  esetet. Ha a minimál paralelepipedon térfogata 1 vagy  $-1$ , akkor karakterisztikus mátrix elemei is  $0, 1, -1$ . Így feltehetjük, hogy a minimál paralelepipedon térfogata 2, ennél nagyobb nem lehet, mert a bővítés indexe 2. Tehát a karakterisztikus mátrix eleme is legfeljebb 2 lehet. Három részre tagoljuk a bizonyítást a kettő indexű bővítés részrácsának dimenziója alapján.

1. Ha a  $\Lambda$  rácsnak  $d < 6$ -ra nincs olyan  $\Lambda^d$  részrácsa (természetesen  $d=6$ -ra van), melynek kettő az indexe, akkor a karakterisztikus mátrix az alábbi formában kezdődhet:

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \dots \end{bmatrix}$$

Így  $v_{11} = \dots = v_{55} = v_{6i} = 1$ , ha  $1 \leq i < 6$ ,  $v_{66} = 2$  és a többi  $v_{ji} = 0$  a (6) egyenletben. Ezért

$$m_{il} = \alpha_{li} + \alpha_{l6}, \quad m_{6l} = 2\alpha_{l6}.$$

Tegyük fel, hogy  $m_{6l} \geq 0$ .

Mivel  $m_{6l} \leq 2$ , először vizsgáljuk azt az esetet, ha  $m_{6l} = 2$  és így  $\alpha_{l6} = 1$ . Mivel  $|\alpha_{li}| \leq 1$ , így  $m_{il} = 0, 1, 2$  lehet, ahol  $i = 1, \dots, 5$ . Ha lenne nulla az  $m_{il}$  értékek között, például  $m_{1l} = 0$ , akkor  $\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4, \mathbf{m}_5, \mathbf{m}_l$  vektorok egy 2-indexű minimális rendszert alkotnának, mely ellentmondás. Ha lenne 2 az  $m_{il}$  értékek között, ahol  $i = 1, \dots, 5$ , például  $m_{1l} = 2$ , akkor az  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_6$  vektorok által kifeszített  $\Lambda^5$  részrács meghatározná a  $\pi(\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4, \mathbf{m}_5, \mathbf{m}_l)$  minimál paralelepipedont, melynek a térfogata 2. Ez ellentmondásra vezet, hiszen a dimenziója kisebb 6-nál. Így ha  $m_{6l} = 2$ , akkor  $m_{il} = 1$ , ahol  $i = 1, \dots, 5$ , tehát  $\mathbf{m}_l = \mathbf{m}_6$ .

Másrészt tekintsük azt az esetet, ha  $m_{6l} = 1$  és  $\alpha_{l6} = \frac{1}{2}$ , akkor  $m_{il}$  koordináták, ahol  $i = 1, \dots, 5$ , nullával vagy eggyel egyenlők. Jelölje ezen minimális vektorok mátrixát  $A$ .

Végül, ha  $m_{6l} = 0$ , akkor az  $m_{il}$  koordináták  $-1, 0, 1$  lehetnek, ahol  $i = 1, \dots, 5$ . Jelölje  $A'$  ezeket a minimális vektorokat tartalmazó mátrixot.

Így a karakterisztikus mátrix a következő formában írható fel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ A \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ A' \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Kivonva az első sort az utolsóból, könnyen látható, hogy a karakterisztikus mátrix minden eleme  $-1, 0, 1$ , így alkalmas bázisban a  $\Lambda$  rács minimumainak a koordinátái is  $-1, 0, 1$ .



2. Ha a  $\Lambda$  rácsnak van egy 2-indexű 5-dimenziós  $\Lambda^5$  részrácsa, akkor a karakterisztikus mátrix felírható az alábbi blokk mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & A & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & A' & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 1 & \dots & 1 & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & B & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & C & & & \\ 1 & \dots & 1 & & & \end{bmatrix}$$

ahol az  $A$  mátrix elemei  $-1,0,1$  és az  $A'$  elemei  $0,1$ . (lásd: [30]) A  $B$  mátrixnak négy, a  $C$ -nek egy sora van. Ha a  $C$  mátrixnak egy eleme 2-vel (ill.  $-2$ -vel) egyenlő, akkor  $C$ -nek nincs negatív (ill. pozitív) koordinátája. Valóban, például, ha  $\mathbf{m}_i (m_{1i}, m_{2i}, m_{3i}, m_{4i}, 2, 1)^T$  és  $\mathbf{m}_j (m_{1j}, m_{2j}, m_{3j}, m_{4j}, x, 1)^T$ , ahol  $x < 0$ , akkor

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & m_{1i} & m_{1j} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & m_{2i} & m_{2j} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & m_{3i} & m_{3j} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m_{4i} & m_{4j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 - x > 2,$$

mely nem lehet. Így ha  $C$  egy eleme egyenlő 2-vel (ill.  $-2$ -vel), akkor kivonva (ill. hozzáadva) az utolsó sort az ötödikhez (mely  $C$ -t tartalmazza)  $C$  elemei  $-1,0,1$  lesznek. Így feltehetjük, hogy  $C$  elemei  $-1,0,1$ . Legyen  $\mathbf{m} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 1]$  egy minimális vektor, ahol az  $x_1, x_2, x_3, x_4$  koordináták a  $B$  egy oszlopának a koordinátái és  $x_5$  egyenlő  $-1,0,1$ -gyel. A  $\pi = \pi(\mathbf{m}, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4, \mathbf{m}_5, \mathbf{m}_6)$  paralelepipedon térfogata maximum 2. Tegyük fel, hogy  $B$  mátrixnak van egy olyan eleme (például  $x_1$ ), melynek abszolút értéke nagyobb, mint 1. Így

$$v(\pi) = \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = |2x_1 - x_5| > 2,$$

mely ellentmond a fentieknek. Ezért a  $B$  mátrix elemei  $-1,0,1$ . Így a karakterisztikus mátrix minden eleme  $-1,0,1$ , kivéve  $m_{55} = 2$ . Az  $A$  mátrix elemei  $-1,0,1$  és az  $A'$  elemei  $0,1$ . Kivonva az első sort az ötödikből, adódik, hogy a karakterisztikus mátrix minden eleme  $-1,0,1$ , kivéve ha  $x_5 = -x_1 = \pm 1$ . Ebben az esetben azonban

$$v(\pi) = |2x_1 - x_5| = |3x_1| = 3 > 2,$$

mely ellentmondás.

3. Ha a  $\Lambda$  rácsnak van 2-indexű 4-dimenziós  $\Lambda^4$  részrácsa (ez a részrács egy 4-dimenziós tércentrált kockarács), akkor a karakterisztikus mátrix az alábbi formában írható fel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ 1 \dots 1 \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ 0 \dots 0 \\ 1 \dots 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \\ 1 \dots 1 \\ 1 \dots 1 \end{bmatrix}$$

ahol  $A, C, E$  mátrixoknak 3, a  $B, D, F$  mátrixoknak egy sora van.

Ha a  $B, D$  vagy  $F$  mátrixoknak egy eleme 2-vel (ill.  $-2$ -vel) egyenlő, akkor a  $B$  és  $F$ , a  $D$  és  $F$  vagy az  $F, B$  és  $D$  mátrixoknak nincs negatív (ill. pozitív) koordinátája. Valóban, például ha  $\mathbf{m}_i (m_{1i}, m_{2i}, m_{3i}, 2, 1, 0)^T$  és

$\mathbf{m}_j (m_{1j}, m_{2j}, m_{3j}, -1, 1, 0)^T$ ,  $\mathbf{m}_k (m_{1k}, m_{2k}, m_{3k}, -1, 1, 1)^T$ , akkor

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & m_{1i} & m_{1j} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & m_{2i} & m_{2j} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & m_{3i} & m_{3j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & m_{1i} & m_{1k} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & m_{2i} & m_{2k} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & m_{3i} & m_{3k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 > 2$$

A bizonyítás analóg, ha a  $D$  vagy  $F$  mátrix valamely eleme 2 (ill.  $-2$ ). Ebből következik, hogy ha a  $B$  mátrixnak egy eleme 2 (ill.  $-2$ ) és  $D$  egy eleme  $-2$  (ill. 2), akkor  $F$  elemei nullák.

Ha  $B$ -nek és  $D$ -nek is valamely eleme 2 (ill.  $-2$ ), akkor  $F$  elemei is kettesek (ill.  $-2$ -k). Például legyen  $\mathbf{m}_i (m_{1i}, m_{2i}, m_{3i}, 2, 1, 0)^T$ ,  $\mathbf{m}_j (m_{1j}, m_{2j}, m_{3j}, 2, 0, 1)^T$ ,  $\mathbf{m}_k (m_{1k}, m_{2k}, m_{3k}, x, 1, 1)^T$ .

$$|\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & m_{1i} & m_{1j} & m_{1k} \\ 0 & 1 & 0 & m_{2i} & m_{2j} & m_{2k} \\ 0 & 0 & 1 & m_{3i} & m_{3j} & m_{3k} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}| = |-4 + x| \leq 2$$

Az egyenlőség csak  $x = 2$ -re teljesül, így  $F$  minden eleme 2-vel egyenlő.

Tekintsük a következő eseteket: Először vizsgáljuk, ha  $B$ ,  $D$ ,  $F$  egyikének sincs  $-2$  eleme. Tegyük fel, hogy  $B$ -nek van 2 eleme, de  $D$ -nek nincs. Ekkor  $F$  minden eleme 0,1,2. Így kivonva az ötödik sort a negyedikből, azt kapjuk, hogy  $B$ ,  $D$ ,  $F$  minden eleme  $-1,0,1$ . Hasonlóan, ha  $D$ -nek van 2 eleme, de  $D$ -nek nincs, akkor  $F$  minden elem 0,1,2, így kivonva a hatodik sort a negyedikből, az adódik, hogy  $B$ ,  $D$ ,  $F$  elemei  $-1,0,1$ . Ha  $F$ -nek van 2 eleme, de  $B$ -nek és  $D$ -nek nincs, akkor  $B$  és  $D$  minden eleme 0,1. Tehát kivonva az ötödik sort a negyedikből,  $B$ ,  $D$ ,  $F$  elemei szintén  $-1,0,1$ . Végül, ha  $B$ -nek és  $D$ -nek is van 2 eleme, akkor  $F$  minden elem szintén 2 és  $B$  és  $D$  elemei nem negatívak. Így kivonva az ötödik és a hatodik sort a negyedikből  $B$ ,  $D$ ,  $F$  elemei  $-1,0,1$  lesznek.

Másrészt ha  $B, D, F$  egyikének sincs 2 eleme, hasonlóan bizonyítható.

Végül tekintsük azt, ha  $B, D, F$  elemei között 2 és  $-2$  is van. Ha  $F$ -nek van 2 eleme, akkor  $B$  és  $D$  nem negatív, így ebben az esetben ez nem lehetséges. Tehát az lehet, hogy  $B$ -nek 2,  $D$ -nek  $-2$  eleme van, ekkor  $F$  minden eleme 0. Kivonva az ötödik sort a negyedikből és hozzáadva az utolsó sort a negyedikhez,  $B, D, F$  minden eleme  $-1, 0, 1$  lesz. Fordított esetben, ha  $B$ -nek van  $-2$  és  $D$ -nek 2 eleme, a bizonyítás analóg.

Legyen vagy  $\mathbf{m}_i = [x_1, x_2, x_3, x_4, 1, 0]^T$  vagy  $\mathbf{m}_j = [x_1, x_2, x_3, x_4, 0, 1]^T$  vagy  $\mathbf{m}_k = [x_1, x_2, x_3, x_4, 1, 1]^T$  egy minimális vektor, melynek  $x_1, x_2, x_3$  koordinátái az  $A$  vagy  $C$  vagy  $E$  egy oszlopának az elemei és  $x_4$  egyenlő  $-1, 0, 1$ -gyel. Tegyük fel indirekt, hogy  $A$ -nak vagy  $C$ -nek vagy  $E$ -nek van olyan eleme (például  $x_1$ ), melynek abszolút értéke nagyobb mint 1. Így mindhárom esetre

$$\begin{aligned} & \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \\ & = \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = |2x_1 - x_4| > 2, \end{aligned}$$

ez ellentmondás. Tehát  $A, C$  és  $E$  elemei  $-1, 0, 1$ -gyel egyenlők. Mivel  $m_{44} = 2$ , kivonva az első sort a negyedikből, a karakterisztikus mátrix minden eleme  $-1, 0, 1$  lesz, kivéve, ha  $x_4 = -x_1 = \pm 1$ . Ebben az esetben azonban

$$|2x_1 - x_4| = |3x_1| = 3 > 2,$$

ami ellentmondás. Így bizonyítottuk a segéd-tételt és egyben a 2.5 tételt is.

## 2.3. A 7-dimenziós rácsok

Tekintsük a  $\Lambda$  rács  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  bázisát egy tetszőleges ortonormált bázisban felírva. A bázisvektorok koordinátáiból képezett mátrixot  $A$ -val jelöltük. Az  $A$  mátrix segítségével is definiálhatjuk a  $\Lambda$  rácshoz tartozó pozitív definit kvadratikus formát:

$$Q(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T G \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n,$$

ahol a  $G = A^T A$  Gram-mátrixot az előzőekben is használtuk. A  $Q$  pozitív definit kvadratikus forma függ a  $\Lambda$  rács  $A$  bázisának a megválasztásától. A  $\Lambda$  rács tetszőleges  $A$  és  $B$  bázisa esetén létezik egy  $U$  unimoduláris mátrix, melyre  $A = UB$ . A  $Q$  kvadratikus formához tartozhatnak különböző rácsok. Például az  $A$  bázishoz tartozó  $\Lambda$  rács és az  $A'$  bázishoz tartozó  $\Lambda'$  rács. Ebben az esetben azonban létezik olyan  $O$  ortogonális transzformáció, melyre  $A = OA'$ . Mivel a következő eredmények pozitív definit kvadratikus formákra vannak megfogalmazva, ezért térünk át ebben a fejezetben erre a tárgyalásmódra. Kvadratikus formákról csak a tételünk szempontjából legfontosabb eredményeket tárgyaljuk. További fogalmak és eredmények [29], [8], [45]-ben részletesen ismertetésre kerülnek. A  $\Lambda$  rács minimumának megfelelően definiálhatjuk a  $Q$  pozitív definit kvadratikus forma homogén minimumát:

$$m(Q) := \min\{Q(\mathbf{z}) : \text{ahol } \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\}$$

Legyen  $M(Q)$  azoknak a  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  pontoknak a halmaza, melyeknél  $Q(\mathbf{z})$  minimális.

**2.3. Definíció.** Egy  $Q$  pozitív definit kvadratikus forma *tökéletes*, ha a minimális vektorai által egyértelműen meghatározott, azaz pontosan a  $\mathbf{z}_i \in M(Q)$  minimális vektorok a megoldásai a  $Q(\mathbf{z}) = m(Q)$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$  egyenletnek.

A tökéletes formák  $n \leq 7$  dimenzióra ismertek. Síkban J.L. LAGRANGE [43] foglalkozott a kérdéssel és egy tökéletes formát talált. Térben C.F. GAUSS [26] nevéhez fűződik a szintén egy tökéletes forma. A. KORKINE és G. ZOLOTAREFF [41], [42]-ben 4 és 5-dimenzióban 2, ill. 3 tökéletes formát fedezett fel. A 7 különböző tökéletes formát 6-dimenzióban E.S. BARNES [3] találta meg. K.C. STACEY [54] vizsgálta a 7-dimenziós tökéletes formákat, de a 33-ból egyet elhagyott, melyet J.H. CONWAY- N.J.A SLOANE [9]-ben kiegészített, végül D.O. JAQUET-CHIFFELLE [40] bizonyította ezek teljességét. J. MARTINET 8-dimenzióban 10916-nál több tökéletes formát talált. A tökéletes formák listája megtalálható például J.H. CONWAY- N.J.A SLOANE [9]-beli cikkében, valamint C. BATUT és J. MARTINET [45], [4] munkáiban.

**2.14. Tétel.** (D.O. JAQUET-CHIFFELLE [40]) *Az A. függelékben felsorolt 7-dimenziós tökéletes formák Gram-mátrixainak listája teljes.*

Az  $L_7$  meghatározásánál alapvető szerepet játszik G.F. VORONOI tökéletes kvadratikus formák minimumára vonatkozó alábbi tétele:

**2.15. Tétel.** (G.F. VORONOI [68]) *Minden pozitív definit  $Q(\mathbf{x})$  kvadratikus formához létezik, olyan  $Q^*(\mathbf{x})$  tökéletes forma, melyre*

$$M(Q) \subseteq M(Q^*).$$

Az alábbiakban a teljesség kedvéért néhány egyszerű lemmát igazolunk.

**2.16. Lemma.** *Ha az  $\mathbf{m}$  minimális vektor hossza  $m$ , koordinátái valamely rácsbázisban  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , valamint  $D = \det(G)$  és  $D_i$  a rácsbázis  $G$  Gram-mátrixának  $a_{ii}$  eleméhez tartozó aldeterminánusa, akkor  $|x_i| \leq m \sqrt{\frac{D_i}{D}}$ .*

Megjegyezzük, hogy a lemma teljes indukcióval is könnyen igazolható, de mi egy egyszerű geometriai bizonyítást adunk rá.

**Bizonyítás:** Tekintsük először azt az esetet, ha  $m = 1$ . Az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n$  vektorok a  $\Lambda$  rácsnak egy  $(n-1)$ -dimenziós rétegét határozzák meg, jelölje ezt  $\Lambda_{n-1}^{(0)}$ . A  $\Lambda_{n-1}^{(0)}$  rétegnek az  $\mathbf{a}_i$  vektor  $j$ -szeresével vett eltoltját jelölje  $\Lambda_{n-1}^{(j)}$ , két szomszédos réteg távolságát  $d$ , így az egység hosszú minimális vektor legfeljebb az  $\frac{1}{d}$ -edik rétegbe mutat. Tehát

$$|x_i| \leq \frac{1}{d}.$$

Mivel a két szomszédos réteg távolsága megegyezik az alapparallelepipedonnanak az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n$  vektorok által meghatározott  $(n-1)$ -dimenziós alaplaphoz tartozó magasságával, így  $d = \sqrt{\frac{D}{D_i}}$ . Tehát kaptuk, hogy

$$|x_i| \leq \sqrt{\frac{D_i}{D}}.$$

Ha a  $\Lambda$  rácsban a minimális vektor hossza nem 1, akkor az  $\frac{1}{m}$  arányú hasonlóság egy olyan rácsba viszi  $\Lambda$ -t, melyben  $m = 1$ . Az  $m$  arányú hasonlóság  $D$ -t  $m^{2n}$ -szeresébe,  $D_i$ -t  $m^{2n-2}$  szeresébe viszi. Tehát összességében azt kaptuk, amit állítottunk, hogy

$$|x_i| \leq m \sqrt{\frac{D_i}{D}}.$$

Tehát igazoltuk a lemmát.

Lineáris algebrából közismert, hogy egy elemi bázistranszformáció mátrixa unimoduláris. Mivel a  $\Lambda$  rács  $G$  Gram-mátrixának egy  $U$  unimoduláris mátrixszal vett konjugáltja a  $\Lambda$  rács egy új bázisban felírt Gram mátrixát szolgáltatja, így teljesül a következő alapvető lemma:

**2.17. Lemma.** *A  $\Lambda$  rács bázisának egy elemi bázistranszformációja ekvivalens, azzal ha a  $G$  Gram mátrix  $i$ -edik sorának  $c$ -szeresét hozzáadjuk a  $j$ -edik sorhoz és a kapott mátrixban  $i$ -edik oszlop  $c$ -szeresét hozzáadjuk a  $j$ -edik oszlophoz.*

**2.18. Tétel.**  *$L_7$  egyenlő 1-gyel, azaz minden 7-dimenziós euklideszi  $\Lambda$  rácsnak van olyan bázisa, melyben a  $\Lambda$  rács minimális vektorainak maximális koordinátája legfeljebb 1.*

**Bizonyítás:** G.F.VORONOI 2.15 tétele alapján elegendő csak a tökéletes kvadratikus formákhoz tartozó rácsokat vizsgálni, hiszen ha ezek minimális vektorai felírhatók a kívánt módon, akkor ennek részhalmazából álló minimális vektorok is. A 2.14 tétel alapján az összes 7-dimenziós tökéletes kvadratikus forma és ezek Gram-mátrixa ismert. Ezek nagy számára való tekintettel csak egy esetet igazolunk. A többi bizonyítása hasonló és megtalálható a B. függelékben.

Tekintsük a kiválasztott tökéletes kvadratikus formának megfelelő  $\Lambda$  rács alábbi  $G$  Gram-mátrixát:

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ha ennek a mátrixnak képezzük az inverzét, a főátlóban pont a  $\frac{D_i}{D}$  hányadosok állnak.



$$G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{133}{180} & \frac{-77}{180} & \frac{-77}{180} & \frac{83}{180} & \frac{-67}{180} & \frac{-67}{180} & \frac{1}{2} \\ \frac{-77}{180} & \frac{133}{180} & \frac{13}{180} & \frac{-67}{180} & \frac{83}{180} & \frac{23}{180} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-77}{180} & \frac{13}{180} & \frac{133}{180} & \frac{-67}{180} & \frac{23}{180} & \frac{83}{180} & \frac{-1}{2} \\ \frac{83}{180} & \frac{-67}{180} & \frac{-67}{180} & \frac{133}{180} & \frac{-77}{180} & \frac{-77}{180} & \frac{1}{2} \\ \frac{-67}{180} & \frac{83}{180} & \frac{23}{180} & \frac{-77}{180} & \frac{133}{180} & \frac{13}{180} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-67}{180} & \frac{23}{180} & \frac{83}{180} & \frac{-77}{180} & \frac{13}{180} & \frac{133}{180} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Látjuk, hogy a főátlóban lévő elemek az utolsó kivételével mind  $\frac{133}{180}$ . Ha a hatodik sort hozzáadjuk a hetedikhez, majd a hatodik oszlopot a hetedikhez minden főátlóbeli elem  $\frac{133}{180}$  lesz, azaz  $\frac{D_i}{D} = \frac{133}{180}$ , ahol  $i = 1, 2, \dots, 7$ . Ez a 2.17 lemma alapján megfelel egy elemi bázistranszformációnak és az eredeti  $G$  mátrixban ennek egy inverz bázistranszformáció felel meg. Másrészt mivel a minimális vektor hosszának négyzete 4, így  $m = 2$ . Tehát

$$|x_i| \leq 2\sqrt{\frac{133}{180}} = 1,719\dots$$

minden  $i$ -re. Így a 2.16 lemma alapján a fenti rács bármely minimális vektorának koordinátája  $-1, 0, 1$ . Mivel a B. függelékben mind a 33 tökéletes kvadratikusan formának megfelelő rácsra hasonló igazolható, így bizonyítottuk a tételt.

A B. függelékben a számolás menete a következő:  $g_1, g_2, \dots, g_{33}$  jelöli a tökéletes formák Gram-mátrixait, majd ezek inverzét,  $\text{inv}g_1, \text{inv}g_2, \dots, \text{inv}g_{33}$ . A 2.17 lemma alapján végrehajtott elemi bázistranszformáció eredményét  $\text{inv}1g_1, \text{inv}1g_2, \dots, \text{inv}1g_{33}$ , ill. ha több transzformációra van szükség értelemszerűen,  $\text{inv}1, \text{inv}2, \dots$  előtag jelöli. A következő sorban kiszámítjuk az  $m\sqrt{\frac{D_i}{D}}$ -k közül a maximális értékűt, mely minden esetben ki-

sebb 2-nél. Végül megadjuk az eredeti Gram-mátrix transzformáltját is:  $\mathbf{tg}1$ ,  $\mathbf{tg}2, \dots, \mathbf{tg}33$ .

Megjegyezzük, hogy a [2]-beli eredmény alapján a rácsok megengedett bővítéseiből megkaphatók a tökéletes rácsok. Valójában mi is könnyen megkaphattuk volna a tökéletes rácsokat, mint ahogy például  $E_6$ -ot megkaptuk. Így a 6-dimenziós eset bizonyítása, habár hosszadalmasabb, elemibb ismereteket használ fel, de a fenti kapcsolatra jobban rámutat. 7-dimenzióban nyilván a megengedett bővítések nagyobb száma miatt, célszerű volt a bizonyítás során ezt az egyszerűbb utat követnünk, mely azonban mélyebb eredményeket használ.

## 3. fejezet

# Rácsok Dirichlet-Voronoi cellái

### 3.1. Előzmények

G.L.DIRICHLET [15] és G.F.VORONOI [68] vezették be a Dirichlet-Voronoi cella fogalmát, melyet magasabb dimenzióban Voronoi politópnak, Voronoi cellának is neveznek. A következőkben röviden a DV cella elnevezést használjuk.

**3.1. Definíció.** Tekintsünk egy  $L$  diszkrét ponthalmazt az  $\mathbb{E}^n$   $n$ -dimenziós euklideszi térben. Tetszőleges  $P_i \in L$  pont DV cellája azon pontok halmaza, melyek legalább olyan közel vannak  $P_i$ -hez, mint tetszőleges más  $P_j \in L$  ponthoz, azaz

$$DV(P_i) = \{x \in \mathbb{E}^n : \text{dist}(x, P_i) \leq \text{dist}(x, P_j) \text{ bármely } j\text{-re}\}.$$

Abban az esetben, ha az  $L$  ponthalmaz rácsot alkot, bármely két DV cella egymás eltoltja és maguk a cellák és azok  $(n-1)$ -dimenziós lapjai is centrál-szimmetrikus konvex testek. Rácsok DV cellái kövezést alkotnak, azaz uniójuk fedi a teret és belső pontjaik kölcsönösen diszjunktak. A szomszédos DV cellák lap-lap mentén csatlakoznak egymáshoz. Az elkövetkezőkben csak rá-

csok DV celláját vizsgáljuk. Egy  $n$ -dimenziós rácsot  $\Lambda^n$ -nel jelölünk. A  $P \in \Lambda^n$  rácspont DV celláját  $DV^n(P)$  jelöli. A paralelotóp következő definíciójából adódóan a DV cella egy speciális paralelotóp.

**3.2. Definíció.** Egy  $\mathcal{P}$  konvex politópot, melynek eltolt példányai fedik a teret és belső pontjaik diszjunktak, valamint az eltolt példányaik lap-lap mentén csatlakoznak paralelotópnak nevezünk.

A fedő paralelotópok centrumai egy  $n$ -dimenziós rácsot alkotnak. DV cellákhoz kapcsolódó problémákról lásd [8], [29], [32], [33].

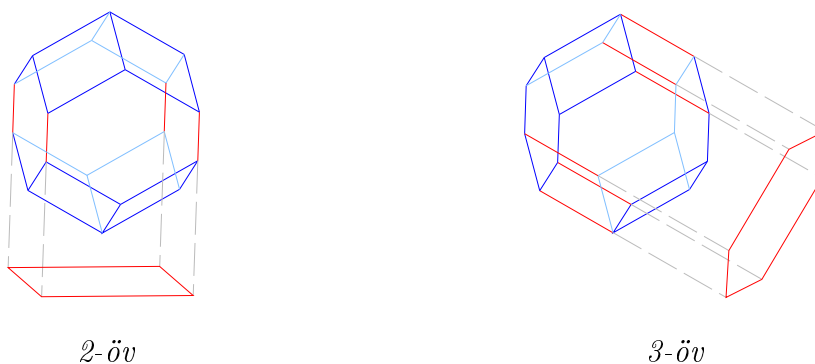
B.A. VENKOV és később P. MCMULLEN a következő fontos tételt bizonyította paralelotópokra. A.D. ALEKSANDROV [1]-ben Venkov bizonyítását egyszerűsítette.

**3.1. Tétel.** (B.A. VENKOV [66], P. MCMULLEN [47]) *A  $\mathcal{P}$  politóp, akkor és csak akkor paralelotóp, ha*

(i)  *$\mathcal{P}$  centrálszimmetrikus*

(ii)  *$\mathcal{P}$  minden  $(n-1)$ -dimenziós lapja is centrálszimmetrikus*

(iii)  *$\mathcal{P}$ -nek bármely  $(n-2)$ -dimenziós lap mentén vett 2-dimenziós merőleges vetülete paralelogramma vagy centrálszimmetrikus hatszög (3.1 ábra).*



3.1. ábra.

A centrálszimmetrikus hatszögnek és a paralelogrammának a fenti (iii) alapján keletkező élei  $\mathcal{P}$  bizonyos  $(n-1)$ -dimenziós lapjainak a vetületei. Ezek az  $(n-1)$ -dimenziós lapok úgynevezett 2- ill. 3-övet alkotnak (3.1 ábra).

A  $\mathcal{P}$  paralelotóp  $(n-2)$ -dimenziós egymással (kölcönösen) párhuzamos lapjai az  $(n-2)$ -dimenziós lapoknak egy zónáját alkotják. Ez a zóna zárt, ha ennek a zónának a  $\mathcal{P}$  paralelotóp bármely  $(n-1)$ -dimenziós lapjával vagy nincs közös  $(n-2)$ -dimenziós lapja vagy kettő van. Venkov (iii) feltétele azt mondja, hogy paralelotóp esetén minden zóna zárt és azok a lapok, melyeknek az  $(n-2)$ -dimenziós vetülete a paralelogrammának vagy a centrálszimmetrikus hatszögnek az oldalai, definíció szerint egy 2 vagy 3-övet határoznak meg. Mivel Venkov (ii) feltétele miatt a  $\mathcal{P}$  paralelotóp minden  $(n-1)$ -dimenziós lapja centrálszimmetrikus, így az  $(n-2)$ -dimenziós zárt zónát úgy is megkaphatom, hogy kiválasztok egy tetszőleges  $(n-2)$ -dimenziós lapot ezt tükrözöm a hozzá csatlakozó valamely  $(n-1)$ -dimenziós lap középpontjára, majd a kapott tükörképet a hozzá csatlakozó másik  $(n-1)$ -dimenziós lap középpontjára és így tovább. Tehát a 2-, ill. 3-övet is megkaphatom így és ezen esetben az egymáshoz csatlakozó 2, ill. 3 lap és a  $\mathcal{P}$  paralelotóp középpontjára vonatkozó tükörképei alkotják a megfelelő övet.

B.A. VENKOV vezette be az  $X^k$   $k$ -dimenziós altér irányában nem nulla kövérségű paralelotóp fogalmát. A  $\mathcal{P}$  paralelotóp nem nulla kövérségű  $X^k$  mentén, ha a  $\mathcal{P} \cap (X^k + \mathbf{a})$  metszet  $k$ -dimenziós vagy üres az  $\mathbf{a}$  vektor bármely eltoltjára. A  $\mathcal{P}$  paralelotóp egymással (kölcönösen) párhuzamos lapjai  $k$ -lapoknak egy zónáját alkotják. A  $k$ -lapok zónája zárt, ha  $\mathcal{P}$  minden  $(k+1)$ -lapja a zónának vagy 2 vagy 0  $k$ -lapját tartalmazza. Nyilvánvaló, hogy a  $\mathcal{P}$  paralelotóp  $X^k$  mentén akkor és csak akkor nem nulla kövérségű ha  $\mathcal{P}$ -nek  $X^k$ -val párhuzamos  $k$ -lapjai zárt zónát alkotnak. A  $\mathcal{P}$  paralelotóp bármely  $k$ -lapjának a zónája zárt, ha  $k=n-1$  vagy  $k=n-2$ . Így ezekben az esetekben

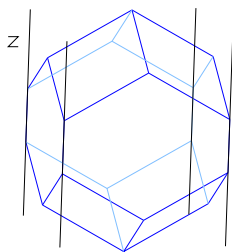
$X^k$  mentén mindegyik paralelotóp nem nulla kövérségű, mely  $k = n - 2$ -re ekvivalens Venkov fenti tételének (iii) feltételével. A következőkben ezeket a fogalmakat  $k = 1$  esetén használjuk.

A  $\mathcal{P}$  paralelotóp  $(n - 1)$ -lapjait  $F_i$ -vel vagy  $F_i(n - 1)$ -gyel,  $F_i$  lapvektorát  $f_i$ -vel, meghatározóvektorát  $t_i$ -vel jelöljük. Ha  $\mathcal{P}$  és  $\mathcal{P}_i$  paralelotópok  $F_i$   $(n - 1)$ -lap mentén szomszédosak, akkor a két paralelotóp középpontját összekötő vektort nevezzük  $F_i$  meghatározóvektorának.

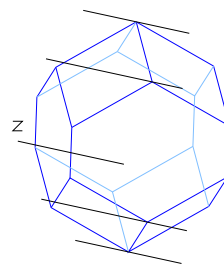
**3.2. Tétel.** (B.A. VENKOV [67]) *Legyen  $\mathcal{P}$  egy  $X^k$  irányban nem nulla kövérségű  $n$ -dimenziós paralelotóp. Akkor*

- (i)  $\mathcal{P}$ -nek az  $X^k$  irányú vetülete egy  $(n - k)$ -dimenziós paralelotóp
- (ii)  $X^k$ -val párhuzamos  $F_i$   $(n - 1)$ -lapokhoz tartozó  $t_i$  rácsvektorok egy  $(n - k)$ -dimenziós rácsot generálnak, mely az  $X^k$  kiegészítő  $X^{n-k}$  altérben fekszik.

$k=1$  esetén az  $X^k$   $k$ -altér egy egyenes. Ennek az egyenesnek az irányát egy  $\mathbf{z}$  vektor segítségével megadhatjuk. Így a  $\mathcal{P}$  paralelotóp  $\mathbf{z}$  irányú  $z$  kövérsége egyenlő a  $\mathbf{z}$ -vel párhuzamos egyenesek  $\mathcal{P}$ -vel vett metszetei közül a minimális hosszúságúval. Ha ez a minimális hossz nulla, akkor a  $\mathcal{P}$  paralelotóp  $\mathbf{z}$  irányban nulla kövérségű. A  $\mathbf{z}$  irányú és minimális  $z$  hosszúságú szakaszt jelöljük



$z$  irányban nem nulla kövérségű



$z$  irányban nulla kövérségű

3.2. ábra.

$S(z)$ -vel. V. GRISHUKHIN bebizonyította, hogy a  $\mathcal{P}$  paralelotóp  $\mathbf{z}$  irányban

akkor és csak akkor nem nulla kövérségű, ha  $\mathcal{P}$ -nek van  $\mathbf{z}$ -vel párhuzamos zárt él-zónája és  $\mathcal{P}$  előállítható az  $S(z)$  szakasz és egy  $\mathbf{z}$  irányban nulla kövérségű  $\mathcal{P}'$  paralelotóp Minkowski összegeként, azaz  $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \oplus S(z)$ . Így teljesül a következő tétel, mely előtt egy definícióra lesz szükségünk.

**3.3. Definíció.** Az  $\mathbb{E}^d$  térben fekvő  $d$ -dimenziós *zonotóp*  $n$  egyenes szakasz-nak a Minkowski-összege, más szóval egy  $n$ -dimenziós kocka vagy paralelepipedon merőleges vetülete a  $d$ -dimenziós altérre.

Zonotópokra vonatkozó további eredmények [46]-ban találhatók.

**3.3. Tétel.** (V. GRISHUKHIN [28]) *A következő állítások közül bármely paralelotópra pontosan egy teljesül:*

- (i) *vagy zonotóp*
- (ii) *vagy minden irányban nulla kövérségű paralelotóp*
- (iii) *vagy egy minden irányban nulla kövérségű paralelotópnak és egy zonotópnak a Minkowski összege.*

A  $\mathcal{P} \oplus S(z)$  Minkowski összeg nem szükségszerűen paralelotóp. V. GRISHUKHIN következő tétele szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy ez az összeg mikor lesz paralelotóp.

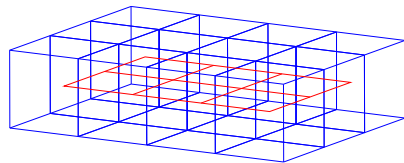
**3.4. Tétel.** (V. GRISHUKHIN [27]) *A  $\mathcal{P}$  paralelotópra a lenti állítások ekvivalensek:*

- (i) *a  $\mathcal{P} \oplus S(z)$  Minkowski összeg paralelotóp*
- (ii) *a  $\mathbf{z}$  vektor merőleges a  $\mathcal{P}$  paralelotóp minden 3-övének legalább egy lapvektorára.*

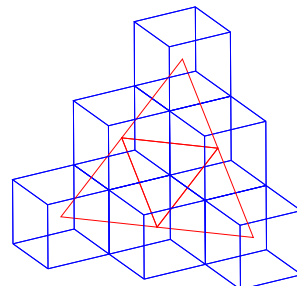
### 3.2. Rácsok DV celláinak merőleges vetületei

Legyen adott  $\Lambda^n$   $n$ -dimenziós rács. Tekintsük a  $\Lambda^n$  rács  $P$  ponton átmenő  $(n-1)$ -dimenziós  $H$  síkkal vett síkmetszetét. Az így kapott  $\Lambda^n \cap H$  rácsot jelöljük  $\Lambda^{n-1}$ -gyel, ha  $(n-1)$ -dimenziós rács.

**3.4. Definíció.** Ha a  $\mathcal{P}$  paralelotóp kitöltéshez tartozó  $\Lambda^n$  rácsnak a  $\Lambda^{n-1}$   $(n-1)$ -dimenziós részrácsa rendelkezik az alábbi tulajdonsággal:  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup\{\mathcal{P} + \lambda_i \mid \lambda_i \in \Lambda^{n-1}\}$  2 ívszerű komponensből áll, akkor az  $\bigcup\{\mathcal{P} + \lambda_i \mid \lambda_i \in \Lambda^{n-1}\} := [\Lambda^{n-1}(\mathcal{P})]$  halmazt *paralelotóp rétegek* az  $\Lambda^{n-1}$  rácsot a réteget meghatározó részrácsnak nevezzük.



*paralelotóp réteg  $(n-1)$ -dimenziós  
csatlakozó lapokkal  $n=3$ -ra*



*paralelotóp réteg  $(n-2)$ -dimenziós  
csatlakozó lapokkal  $n=3$ -ra*

3.3. ábra. Paralelotóp rétegek

**3.5. Definíció.** Legyen  $\mathcal{P}, \mathcal{P}_i \in [\Lambda^{n-1}(\mathcal{P})]$ . A  $\mathcal{P}$  paralelotópnak egy másik  $\mathcal{P}_i$  paralelotóppal közös  $(n-1)$  vagy  $(n-2)$ -lapjait *csatlakozó lapoknak* nevezzük, ha ezek a  $\mathcal{P}$  paralelotóp laphálójára vonatkozólag maximális közös lapok.

Megjegyezzük, hogy  $(n-3)$  vagy annál kisebb dimenziós maximális közös lap nincs. Tegyük fel indirekt, hogy van ilyen  $M$  lap. Nyilván a  $[\Lambda^{n-1}(\mathcal{P})]$



réteghez tartozó  $\mathcal{P}_j$  paralelotópok között vannak olyanok, melyek tartalmazzák az  $M$  lapot, így  $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_j \supseteq M$ . Ezek között a  $\mathcal{P}_j$ -k között kell lenni olyannak, melynek  $\mathcal{P}$ -vel vett metszete  $(n-1)$  vagy  $(n-2)$ -dimenziós, különben nem alkotnának réteget. Tehát ez az  $(n-1)$  vagy  $(n-2)$ -dimenziós lap tartalmazza  $M$ -et, így az nem maximális közös lap.

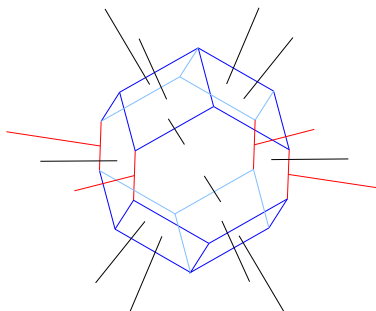
G. HORVÁTH Á. [35]-ben bebizonyította, hogy ha a  $\mathcal{P}$  és  $\mathcal{P}_i$  paralelotópok közös lapja  $k$ -dimenziós, ahol  $0 \leq k \leq n-1$ , akkor ez a lap a  $PP_i$  felezőpontjára nézve centrálszimmetrikus, ahol a  $P$  és  $P_i$  rácspontok a  $\mathcal{P}$  és  $\mathcal{P}_i$  paralelotópok középpontjai. Így ha  $\dim(\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_i) = n-2$ , akkor  $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_i$  csatlakozó lap centrálszimmetrikus és pontosan négy paralelotóp tartalmazza. A  $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_i$  csatlakozó lap középpontjára vonatkozólag a  $\mathcal{P}$  és  $\mathcal{P}_i$  paralelotópok középpontosan szimmetrikusak. Röviden összefoglalva a  $\mathcal{P}$  paralelotóp csatlakozó lapjai  $(n-1)$  és  $(n-2)$ -dimenziósak, melyekhez egy másik  $\mathcal{P}_i$  paralelotóp csatlakozik, ahol  $\mathcal{P}_i \in [\Lambda^{n-1}]$ .

**3.6. Definíció.** A  $\mathcal{P}$  paralelotóp  $\mathbf{z}$  irányú *árnyékhatára*  $\mathcal{P}$ -nek azokból az  $\mathbf{x}$  határpontjaiból áll, melyekre az  $\{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{z} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  egyenes  $\mathcal{P}$ -nek egy támasz egyenese. (Azaz az  $\{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{z} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  egyenesnek nincs olyan pontja, mely  $\mathcal{P}$ -nek belső pontja).

Jól ismert, hogy egy konvex politóp árnyékhatára a  $\mathbf{z}$ -vel párhuzamos zárt  $(n-1)$  és  $(n-2)$ -dimenziós lapjainak az uniója.

**3.7. Definíció.** Ha  $\mathcal{P}$  egy DV cella, akkor minden  $(n-1)$ -dimenziós  $F$  laphoz társíthatunk egy rácsvektort, mely a  $\mathcal{P}_i$  DV cella középpontjába mutat, ahol  $F = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_i$ , így ez a vektor az  $F$  lap egy meghatározó vektora. Másrészt DV cella esetén ez a vektor merőleges az  $F$  lapra, így ez a  $\overrightarrow{PP_i}$  vektor egyben  $F$  lap egy speciális normálvektora. Ezt a speciális normálvektort az egységes tárgyalás kedvéért  $F$  általánosított lapvektorának nevezzük. Legyen most  $G$

egy  $(n-2)$ -dimenziós lap és tegyük fel, hogy egy másik  $\mathcal{P}_i$  DV cellára  $G = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_i$ . Ez a  $G$  lap egy 2-övet határoz meg  $\mathcal{P}$ -n. A  $G$  laphoz is társíthatjuk  $\Lambda^n$ -nek egy rácsvektorát mégpedig a  $G$  lapot tartalmazó két  $(n-1)$ -dimenziós lap meghatározó vektorainak (DV celláról szólva általánosított lapvektorainak) az összegét (azaz  $\overrightarrow{PP_i} = \overrightarrow{PP_j} + \overrightarrow{PP_k}$ ). Ezt a vektort a  $G$  laphoz tartozó általánosított lapvektornak nevezzük. Megjegyezzük, hogy ha  $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_i$  egy 3-



3.4. ábra. Általánosított lapvektorok

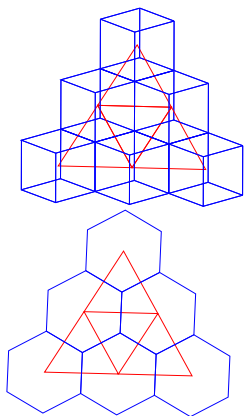
övet határoz meg abban az esetben nem társítunk az  $(n-2)$ -dimenziós vagy az annál alacsonyabb dimenziós laphoz általánosított lapvektort.

### 3.2.1. A 3.5 tétel és bizonyítása

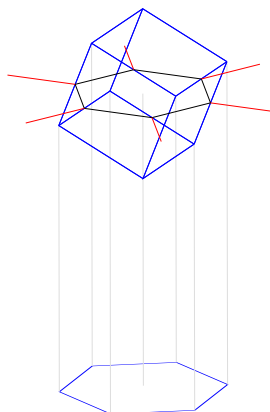
**3.5. Tétel.** ([65]) *A  $DV^n(P)$  cellára és  $\mathbf{z}$  vektorra a következő állítások ekvivalensek:*

- (i)  *$DV^n(P)$  cella  $\mathbf{z}$  irányú merőleges vetülete a  $\mathbf{z}$ -re merőleges  $(n-1)$ -dimenziós  $H$  síkra egy  $\Lambda^{n-1}$  rács  $(n-1)$ -dimenziós  $DV^{n-1}(P)$  cellája, ahol  $\Lambda^{n-1} = \Lambda^n \cap H$ .*
- (ii) *Az  $\mathbf{z}$  vektor merőleges minden 2 és 3-övnek legalább egy általánosított lapvektorára.*

(iii) A  $\mathbb{R}^n \setminus [\Lambda^{n-1}(\text{DV}^n(P))]$  két ívszerűen összefüggő komponensből áll. (A paralelotóp réteg definíciója alapján  $[\Lambda^{n-1}(\text{DV}^n(P))] = \bigcup \{\text{DV}^n(P) + \lambda_i \mid \lambda_i \in \Lambda^{n-1}\}$ )



(i) és (iii) kapcsolata



(i) és (ii) kapcsolata

3.5. ábra.

Megjegyezzük, hogy ha a (ii) tulajdonság nem teljesül, attól a DV cellának a  $H$ -ra vett merőleges vetülete lehet szintén DV cella, de ebben az esetben sem (i) sem (iii) nem teljesül. Például a szabályos hatszög alapú hasábnak az egyik oldallapjára merőleges  $\mathbf{z}$  irányú vetülete téglalap, de (i) és (iii) nem teljesül.

**Bizonyítás:** (iii)  $\Rightarrow$  (i) Mivel  $\mathbb{R}^n \setminus [\Lambda^{n-1}(\text{DV}^n(P))]$  két ívszerű komponensből áll, ezért  $[\Lambda^{n-1}(\text{DV}^n(P))]$  DV cella réteg  $H$  hipersíkra vett merőleges vetülete teljesen lefedi  $H$ -t.

Tekintsük a  $\text{DV}^n(P)$  összes csatlakozó  $(n-1)$  és  $(n-2)$ -lapját, az ezekhez csatlakozó DV cellákat jelölje  $\text{DV}^n(P_i)$ .

Ha  $\text{DV}^n(P)$  és  $\text{DV}^n(P_i)$  egy  $(n-1)$ -dimenziós lap mentén csatlakozik, akkor ennek a lapnak síkja elválasztja a két DV cellát és merőleges  $H$ -ra,

mert merőleges  $PP_i$ -re. Így a közös  $(n-1)$ -lap merőleges vetülete a  $H$ -ra  $(n-2)$ -dimenziós lap.

Ha  $DV^n(P)$  és  $DV^n(P_i)$  egy  $(n-2)$ -dimenziós lap mentén csatlakozik, de  $(n-1)$ -dimenziós lap mentén nem, akkor a  $PP_i$  szakaszfelező merőleges  $(n-1)$ -dimenziós hipersíkja elválasztja a két DV cellát, másrészt a közös  $(n-2)$ -dimenziós lapot tartalmazza. Ez a hipersík merőleges a  $H$ -ra. Így a DV cella ezen  $(n-2)$ -dimenziós lapjának a vetülete legalább  $(n-3)$ -dimenziós lesz. Nem lehet az  $(n-2)$ -dimenziós lap vetülete  $(n-3)$ -dimenziós lap, mert ebben az esetben az  $(n-2)$ -dimenziós lap affin burka merőleges lenne  $H$ -ra így a rá illeszkedő bármely  $(n-1)$ -dimenziós lapja  $DV^n(P)$ -nek, szintén megad egy  $H$ -beli  $P_j$ -t, amire  $DV^n(P) \cap DV^n(P_j) \supset DV^n(P) \cap DV^n(P_i)$ , tehát az  $(n-2)$ -dimenziós lap nem volt csatlakozó.

Ha  $DV^n(P)$ -hez egy másik  $DV^n(Q)$  DV cella  $(n-2)$ -dimenziósnál alacsonyabb dimenziós lap mentén csatlakozik, akkor ezt az  $(n-2)$ -dimenziósnál alacsonyabb lapot biztosan tartalmazza a fenti  $(n-1)$ , ill.  $(n-2)$ -dimenziós lapok valamelyike, különben a  $[\Lambda^{n-1}(DV^n(P))]$  réteghez tartozó DV cellák merőleges vetületei nem fednék le  $H$ -t.

Tehát a DV cellákat elválasztják  $H$ -ra merőleges  $(n-1)$ -dimenziós hipersíkok, melyek a csatlakozó lapokat tartalmazzák. Másrészt a réteghez tartozó DV cellák merőleges vetületei lefedik  $H$ -t, így a réteghez tartozó DV cellák merőleges vetületei egyrétűen és hézagmentesen lefedik a  $H$  síkot. Nyilván a DV cellák egybevágóak és azonos állásúak tehát merőleges vetületeik is egybevágóak.

Most már csak azt kell belátni, hogy  $DV^n(P)$  merőleges vetülete megegyezik a  $P$  pont  $H$  síkban lévő DV cellájával, azaz  $DV^{n-1}(P)$ -vel.

Először belátjuk, hogy ha  $X \in DV^n(P)$ , akkor  $X' \in DV^{n-1}(P)$ , ahol  $X'$  az  $X$  pont  $H$  síkra vett merőleges vetülete. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel

hogy  $X \in DV^n(P)$ , de  $X'$  nem eleme a  $DV^{n-1}(P)$ -nek. Ebből az következik, hogy  $X' \in DV^{n-1}(Q)$  valamely  $Q \in \Lambda^{n-1}$ -re, azaz  $X'Q < X'P$ . Mivel  $XX' \perp X'Q$  és  $XX' \perp X'P$ , ezért  $XQ < XP$ , de ez ellentmondás, hiszen  $X \in DV^n(P)$ .

Másrészt belátjuk, hogy  $X' \in DV^{n-1}(P)$ , akkor  $\exists X$ , hogy  $X \in DV^n(P)$  és  $XX' \perp H$ . Mivel a DV cellák merőleges vetülete hézagmentesen kitölti a  $H$  síkot, ezért  $\exists X, Q$  pár, hogy  $X \in DV^n(Q)$  és  $XX' \perp H$ . Ha  $Q \neq P$ , akkor  $XP > XQ$ . Másrészt  $X'P < X'Q$  és  $XX' \perp X'Q$  és  $XX' \perp X'P$ , ezért  $XP < XQ$ , ez ellentmondás. Tehát állításunkat bizonyítottuk.

**Következmény:** A fenti  $(n-1)$ , ill.  $(n-2)$ -dimenziós lapok, azaz a csatlakozó lapok vetületei adják  $DV^{n-1}(P)$   $(n-2)$ -dimenziós lapjait.

**Megjegyzés:** Mivel az  $(n-1)$ , ill.  $(n-2)$ -dimenziós csatlakozó lapok a  $DV^n(P)$  és  $DV^n(P_i)$  celláknak közös lapja, így a DV cella centrálszimmetriája miatt  $PP_i$  áthalad a csatlakozó lap középpontján (lásd: [35]), tehát a rá illeszkedő  $H$  sík is. Így  $[\Lambda^{n-1}(DV^n(P))]$  DV cella réteghez tartozó DV cellák csatlakozó lapjait metszi  $H$  és az  $(n-1)$ -csatlakozó lap esetén merőleges is rá.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) A  $DV^{n-1}(P)$  cella  $(n-2)$ -dimenziós lapjai és  $\mathbf{z}$  meghatároznak  $(n-1)$ -dimenziós síkokat, melyekre illeszkedik  $DV^n(P)$  cella  $(n-1)$ , ill.  $(n-2)$ -dimenziós lapja. Ezek a lapok a  $\mathbf{z}$  irányú árnyékhatár lapjai.

Először vizsgáljuk azt, ha  $DV^n(P)$ -nek  $(n-1)$ -lapja illeszkedik erre a síkra. Mivel  $PP_i$  merőleges  $DV^{n-1}(P)$  cella  $(n-2)$ -lapjára, így  $DV^n(P)$  erre illeszkedő  $(n-1)$ -lapjára is. Tehát kaptuk, hogy  $\mathbf{z}$  merőleges ennek a lapnak a normálvektorára.

Másrészt nézzük azt, ha  $DV^n(P)$ -nek  $(n-2)$ -lapja illeszkedik erre a síkra, de  $(n-1)$ -lap nem.

Ebben az esetben az  $(n-2)$ -lap nem lehet 3-öv része. Valóban ekkor ugyanis az  $(n-2)$ -laphoz két másik DV cella csatlakozik  $DV^n(P_1)$  és  $DV^n(P_2)$ .

Mivel DV cellákról van szó, így az  $(n-2)$ -lap minden  $X$  pontjára csak  $P$ ,  $P_1$  és  $P_2$  pontokra teljesül, hogy  $|XP| = |XP_1| = |XP_2|$  és más  $P_j$  rácspontokra nem. Ha az  $(n-2)$ -laphoz csatlakozó másik poliéder  $P_i$ , akkor  $P_i = P_1$  vagy  $P_i = P_2$  lehet csak, mert ezt a lapot csak 3 DV cella tartalmazza. Így viszont,  $\dim(P_i \cap P) = n-1$ , ami ellentmondás.

Ebből következik, hogy az  $(n-2)$ -lap 2-öv része, így az  $(n-2)$ -laphoz három másik DV cella csatlakozik  $DV^n(P_1)$ ,  $DV^n(P_2)$  és  $DV^n(P_3)$ , ahol  $DV^n(P)$ -nek  $DV^n(P_1)$ -gyel és  $DV^n(P_3)$ -mal van közös  $(n-1)$ -lapja. Mivel DV cellákról van szó, így az  $(n-2)$ -lap minden  $X$  pontjára csak  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  és  $P_3$  pontokra teljesül, hogy  $|XP| = |XP_1| = |XP_2| = |XP_3|$  és más  $P_j$  rácspontokra nem. Másrészt az  $(n-2)$ -lap  $X$  pontjára  $|XP| = |XP_i|$ , tehát  $P_i = P_2$ , mely azt jelenti,  $DV^n(P)$ -nek és  $DV^n(P_2)$ -nek az  $(n-2)$ -lap a maximális közös lapja.

Megjegyezzük, hogy ha egy DV cella esetén az  $(n-2)$ -lap 2-öv része, akkor centrálszimmetrikus és a rá illeszkedő  $(n-1)$ -lapok merőlegesek egymásra [35].

Jelöljük  $DV^n(P)$  és  $DV^n(P_i)$  közös  $(n-2)$ -lapját  $G(n-2)$ -vel, a rá illeszkedő két  $(n-1)$ -lapot  $F_1$ -gyel és  $F_2$ -vel, ezek meghatározó vektorait  $\overrightarrow{PP_1}$  és  $\overrightarrow{PP_3}$ -mal. Mivel  $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_3} = \overrightarrow{PP_i}$  és  $\overrightarrow{PP_i} \perp \mathbf{z}$ , így  $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_3} \perp \mathbf{z}$ . (Megemlítjük, hogy  $\overrightarrow{PP_i} \perp G(n-2)$  és  $G(n-2)$  középpontja egybeesik  $PP_i$  felezőpontjával.)

Tehát azt kaptuk, hogy az árnyékhatár  $(n-1)$  és  $(n-2)$ -lapjainak (ezen lapok vetületei adják  $DV^{n-1}(P)$   $(n-2)$ -lapjait) lapvektorai merőlegesek  $\mathbf{z}$ -re. Mivel az árnyékhatár dimenziója  $(n-2)$ , valamely elemét biztos metszi minden 2 vagy 3-öv, így minden 2 és 3-övben van olyan lapvektor, mely merőleges  $\mathbf{z}$ -re. Valóban az árnyékhatár valamely elemét biztos metszi minden 2 vagy 3-öv, hiszen az árnyékhatár két részre bontja a paralelotóp felszínét. Ha a 2 vagy 3-öv valamely lapját tartalmazza az árnyékhatár, igazoltuk az állítást. Ha nem akkor a 2 vagy 3-öv lapjainak a fele az egyik, fele a másik

részben fekszik. Két  $(n-1)$ -lap metszete, mivel 6v része  $(n-2)$ -dimenziós lap, melynek teljes egészében az árnyékhatárban kell lenni, különben lenne olyan pontja az  $(n-2)$ -dimenziós lapnak, mely csak az egyik részhez tartozik, így nem lenne a metszet  $(n-2)$ -dimenziós. Ezzel állításunknak ezt a részét beláttuk.

(i)  $\Rightarrow$  (iii) A fenti bizonyításban láttuk, hogy az árnyékhatár minden  $(n-1)$  és  $(n-2)$ -lapjához csatlakozik egy másik  $DV^n(P_i)$  DV cella, valamint az (i) feltételből adódik, hogy a vetület egyrétűen és hézagmentesen kitölti H-t, tehát az  $\mathbb{R}^n \setminus [\Lambda^{n-1}(DV^n(P))]$  két ívszerűen összefüggő komponensből áll.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Válasszuk a H  $(n-1)$ -dimenziós síkot úgy, hogy a  $DV^n(P)$  cella középpontjára illeszkedjen és merőleges legyen  $\mathbf{z}$ -re. Mivel  $\mathbf{z}$  merőleges minden 3-6vnek legalább egy lapvektorára, így V. GRISHUKHIN tétele miatt  $DV^n(P) \oplus S(z)$  paralelotóp, melynek a H-ra való merőleges vetülete B.A. VENKOV tétel szerint szintén paralelotóp és ennek a lapvektorai generálják a vetületi paralelotóphoz tartozó rácsot. Tehát azt kell belátnunk, hogy ez a paralelotóp a  $\Lambda^{n-1}$  rács DV cellája.

A  $DV^n(P) \oplus S(z)$  paralelotóp  $\mathbf{z}$ -vel párhuzamos  $(n-1)$ -lapjainak lapvektorai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők a  $DV^n(P)$  általánosított lapvektorainak. Ennél a megfeleltetésnél  $DV^n(P)$   $\mathbf{z}$  irányú árnyékhatárának lapvektorai a nekik megfelelő  $DV^n(P) \oplus S(z)$ -beli lapvektorokkal megegyező H-beli vektorokra vetítődnek. (ii) szerint  $DV^n(P)$  vizsgált lapvektorai H-ba esnek, így maguk a vetületek. Tehát  $DV^n(P) \oplus S(z)$ -beli vizsgált lapvektorok vetületei éppen a  $DV^n(P)$ -beli (H-beli) vizsgált lapvektorok. Ezek feszítik ki  $\Lambda^{n-1}$  rácsot. Ha egy ilyen lapvektor  $(n-1)$ -laphoz tartozott, merőleges erre a lapra, így H-beli merőleges vetületére is. Ha általánosított volt, akkor most merőleges a megfelelő  $(n-2)$ -lap vetületére, mert  $(G(n-2), \mathbf{z})$  hipersík meg-

egyezik  $(G(n-2)|_H, \mathbf{z})$  hipersíkkal, ahol  $G(n-2)|_H$  a  $G(n-2)$  lap  $H$ -ra való vetülete. Ezért a vetület cella meghatározó vektorai a lapvektorai, így DV cella. Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

### 3.2.2. A 3.5 tétel alkalmazása gyökrácsokra

Legyen  $Z_n = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$  egy  $n$ -dimenziós kockarács, ahol  $x_i \in \mathbb{Z}$  és az  $\mathbf{e}_i$  vektorok kölcsönösen merőleges egységvektorok. Tekintsük a  $K^n = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i \quad -\frac{1}{2} \leq \alpha_i \leq \frac{1}{2} \right\}$   $n$ -dimenziós kockát. A bevezetésnek megfelelően az  $A_n$  gyökrács definíciója:

$$A_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

Az  $A_n$  rács egy bázisa  $[-\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \dots, -\mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_n]$  (lásd: [8], [34]).

**3.6. Tétel.** ([65]) *A  $Z_n$   $n$ -dimenziós kockarács DV cellájának  $(\pm \mathbf{e}_1 \pm \dots \pm \mathbf{e}_n)$  irányú merőleges vetülete az  $A_{n-1}$  gyökrács DV celláját adja.*

**Bizonyítás:** Tekintsük a  $\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i$  testátlóra merőleges  $H$  hipersíkot, mely átmegy a kocka középpontján. Mivel  $H$  átmegy a kocka középpontján és merőleges a kocka testátlójára, így  $H$  metszi a kocka összes  $(n-1)$ -dimenziós lapját, de egyiket se a középpontján. Könnyen látható, hogy a  $H$  sík bizonyos  $(n-2)$ -dimenziós lapok középpontjain halad át és mivel kockáról van szó, ezekhez az  $(n-2)$ -dimenziós lapokhoz illeszkedő  $(n-1)$ -dimenziós lapok merőlegesek egymásra. Így az árnyékhatár minden  $(n-2)$ -dimenziós lapjához tartozó 2-öv két szomszédos lapvektorának az összege  $H$ -ban fekszik és mivel a kockában csak 2-öv van a 3.5 tétel (ii) feltétele teljesül, így a kocka  $G_i(n-2)$  lapjainak a  $H$  síkra vett merőleges vetülete a  $\Lambda^{n-1}$  rács  $P$  ponthoz tartozó DV cellájának hiperlapjait adja. Tehát csak azt kell belátni, hogy a



$\Lambda^{n-1}$  rács megegyezik  $A_{n-1}$  gyökráccsal. A  $\Lambda^{n-1}$  rács megegyezik  $Z_n \cap H$ -val. Mivel a  $H$  sík merőleges a  $\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i$  testátlóra, így a  $\Lambda^{n-1}$  rács egy bázisa  $\{\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-1} = \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{n-1}\}$ , mely pont az  $A_{n-1}$  gyökrács egy bázisa. Ezzel állításunkat beláttuk.

Ha a  $K^n$  kocka bázisvektoraira egy affinitást alkalmazunk, mely a bázisvektorokat a  $\mathcal{P}$  paralelepipedon bázisvektoraiba viszi a 3.6 tétel alapján a következő állítást kapjuk.

**3.7. Következmény.** *Ha  $\mathcal{P}$  egy olyan paralelepipedon, melyre  $\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i \quad -\frac{1}{2} \leq \alpha_i \leq \frac{1}{2} \right\}$ , akkor  $\mathcal{P}$  paralelepipedon  $\mathbf{i}$  irányú vetülete a  $H$  síkra egy parallelotóp, ahol  $\mathbf{i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i$  és  $H$  az  $\{\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-1} = \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{n-1}\}$  bázisú  $\Lambda'$  rács által meghatározott hipersík.*

Ha a 3.5 tételben az  $(i)$  feltétel teljesül, akkor  $(ii)$  is, így V. GRISHUKHIN tétele miatt  $DV^n(P) \oplus S(z)$  parallelotóp. Azonban abból, hogy  $DV^n(P) \oplus S(z)$  egy parallelotóp, nem következik az  $(i)$  feltétel. Ahhoz, hogy a vetület is  $(i)$ -nek megfelelő DV cella legyen, elegendő a vetítésnek a  $\mathbf{z}$  irányát azok között a  $\mathbf{z}$  irányok között keresni, melyre a  $DV^n(P) \oplus S(z)$  egy parallelotóp. A bevezetés alapján a  $D_n$  gyökrács definíciója:

$$D_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n : x_1 + \dots + x_n \text{ páros}\}.$$

A  $D_n$  rács egy bázisa  $[-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_{n-1} - \mathbf{e}_n]$  (lásd: [8], [34]). Jelölje  $DV^n(D_n)$  a  $D_n$  rács origó középpontú DV celláját. Ennek a DV cellának a lapvektorai  $\mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j$  a szokásos  $[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n]$  bázisban, ahol  $1 \leq i < j \leq n$ . A  $DV^n(D_n)$  cellának a csúcsai  $\pm \mathbf{e}_i$  és  $\frac{1}{2}(\pm \mathbf{e}_1 \pm \dots \pm \mathbf{e}_n)$ , ahol  $\frac{1}{2}(\pm \mathbf{e}_1 \pm \dots \pm \mathbf{e}_n)$  az origó középpontú egységkockának a csúcsai. Látható, hogy a DV cellának az élei  $\pm \mathbf{e}_i$  és  $\frac{1}{2}(\pm \mathbf{e}_1 \pm \dots \pm \mathbf{e}_n)$ . Az is nyilvánvaló, hogy minden  $(n-1)$ -lap egy  $(n-1)$ -dimenziós bipiramis, melynek alapja egy  $(n-2)$ -dimenziós kocka.

A  $DV^n(D_n)$  cellának minden  $(n-2)$ -dimenziós lapja egy  $(n-3)$ -dimenziós kocka alapú gúla. Tehát ezek az  $(n-2)$ -lapok nem centrálszimmetrikusak, így a  $DV^n(D_n)$  cellában nincsenek 2-övek [35], azaz  $DV^n(D_n)$  cella minden öve 3-öv. A  $DV^n(D_n)$  cella minden 2-lapja háromszög, így minden irányban nulla kövérségű. V. GRISHUKHIN [28]-ban bebizonyította, hogy  $DV^n(D_n) \oplus S(z)$  akkor és csak akkor parallelotóp ha  $\mathbf{z}$  párhuzamos  $DV^n(D_n)$  valamely élével. Mivel  $DV^n(D_n)$  cellában minden öv 3-öv, a 3.5 tétel (ii) feltétele teljesül, így a  $DV^n(D_n)$  cella  $\mathbf{z}$  irányú merőleges vetülete a  $\Lambda^{n-1}$  rács DV cellája, ahol  $\mathbf{z}$  párhuzamos  $DV^n(D_n)$  valamely élével. Így a következő tételt bizonyíthatjuk:

**3.8. Tétel.** ([65]) *A  $DV^n(D_n)$  cellának a  $\pm \mathbf{e}_i$  irányú merőleges vetülete a  $DV^{n-1}(D_{n-1})$  cella és a  $(\pm \mathbf{e}_1 \pm \dots \pm \mathbf{e}_n)$  irányú vetülete a  $DV^{n-1}(A_{n-1})$  cella.*

**Bizonyítás:** Elegendő megmutatni, hogy a  $D_n \cap H = D_{n-1}$ , ahol a  $H$  hipersík merőleges az  $\mathbf{e}_n$  vektorra és  $D_n \cap H = A_{n-1}$ , ahol  $H$  merőleges  $(\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n)$ -re. Nyilvánvaló, hogy  $\mathbf{e}_n$  merőleges  $-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_{n-2} - \mathbf{e}_{n-1}$  vektorokra, melyek  $D_{n-1}$  egy bázisát alkotják. Így ezen  $(n-1)$  vektor által generált  $H$  merőleges  $\mathbf{e}_n$ -re. Mivel  $-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_{n-2} - \mathbf{e}_{n-1}$  valamint  $\mathbf{e}_{n-1} - \mathbf{e}_n$  együtt a  $D_n$  egy bázisát alkotják,  $D_n \cap H$  a fenti  $D_{n-1}$  rács.

Ha  $H$  merőleges az  $(\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n)$  vektorra a bizonyítás teljesen hasonló. Ez a vektor merőleges  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \dots, \mathbf{e}_{n-1} - \mathbf{e}_n$  vektorokra, melyek  $A_{n-1}$  egy bázisát alkotják. Ezek a vektorok a  $-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$  vektorral együtt  $D_n$  bázisa, így  $D_n \cap H$  a fenti  $A_{n-1}$  rács, ahol  $H$  az  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \dots, \mathbf{e}_{n-1} - \mathbf{e}_n$  vektorok által generált rács. Tehát bizonyítottuk állításunkat.

### 3.3. Az $E_8$ rács DV cellája

Az előző fejezetnek megfelelően  $\mathcal{P} \oplus S(z)$ -vel jelöljük a  $\mathbf{z}$  irányban nulla kövérségű  $n$ -dimenziós  $\mathcal{P}$  paralelotópnak és a  $\mathbf{z}$  vektornak a Minkowski összegét. A bevezetésben mondottak alapján az így kapott  $\mathbf{z}$  irányban nem nulla kövérségű  $\mathcal{P} \oplus S(z)$  paralelotópot  $\mathcal{P}$  kihúzottjának,  $\mathcal{P}$ -t pedig  $\mathcal{P} \oplus S(z)$  összenyomottjának nevezzük. A továbbiakban legyen az origó  $\mathcal{P}$  centruma.

Ha a  $\mathcal{P} \oplus S(z)$  paralelotóp  $\mathbf{z}$  irányban nem nulla kövérségű, akkor az árnyékhatár csupa  $(n-1)$ -lapból áll, melyet B.A. VENKOV a  $\mathbf{z}$ -vel párhuzamos lapoknak nevezett. Ennek általánosításaként tekintsük a következő fogalmakat. Az általánosított lapvektor mintájára definiálható az általánosított meghatározó vektor.

**3.8. Definíció.** Az árnyékhatár  $(n-2)$ -lapjai, melyek nem tartoznak árnyékhatárbeli  $(n-1)$ -laphoz tartozhatnak 2- vagy 3-övhöz is. Ha 2-övhöz tartozik egy ilyen  $(n-2)$ -lap, akkor centrálszimmetrikus és középpontja egy rács felezőpont. Azt a  $\Lambda^n$ -beli  $O$  kezdőpontú rácsvektort, melynek ez a felezőpontja *általánosított meghatározó vektornak* nevezzük. Ez a 2-öv 2 valódi meghatározó vektorának az összege vagy különbsége. 3-övhöz tartozó  $(n-2)$ -lapnak nincs általánosított meghatározó vektora.

**3.9. Definíció.** A  $\mathbf{z}$  irányú árnyékhatár valódi és általánosított meghatározó vektorai által kifeszített rácsot  $\mathbf{z}$  irányú *Venkov-rácsnak* nevezzük és  $\Lambda_{\mathbf{z}}$ -vel jelöljük.

Az alábbiakban felhasználjuk a következő tételt, mely a paralelotópok kihúzhatósága és vetülete között teremt kapcsolatot a Venkov-rács fogalmát is használva.

**3.9. Tétel.** (G. HORVÁTH Á. [36]) *A  $\mathcal{P}$  paralelotópra a következők ekvivalensek:*

(i)  $\mathcal{P} \oplus S(z)$  paralelotóp

(ii) A  $\mathbf{z}$  irányhoz tartozó  $\Lambda_z$  Venkov-rács  $(n-1)$ -dimenziós és  $\mathcal{P}|_{\mathbf{z}}$  paralelotópja a  $[\Lambda_z]$  hipersíknak, a  $\Lambda_z$  rácstra, mint eltolásrácstra nézve.

Az alábbi lemmákban a paralelotópok kihúzhatósága és meghatározó vektoraik koordinátái közötti kapcsolatot vizsgáljuk.

**3.10. Lemma.** *Ha a  $\mathcal{P}$  paralelotóp  $\mathbf{z}$  irányban kihúzható, akkor van olyan  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  bázisa a rácsnak, melyben a  $[\Lambda_z] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}]$  és a  $\Lambda_z$  Venkov-rácshoz nem tartozó meghatározó vektorok  $n$ -edik koordinátái  $\pm 1$ .*

(Azaz ha  $\mathcal{P}$  paralelotóp  $\mathbf{z}$  irányban kihúzható, akkor a Venkov-rács primitív  $(n-1)$ -dimenziós részrácsa  $\Lambda$ -nak és minden más meghatározó vektor  $\pm 1$   $n$ -edik koordinátákkal rendelkezik egy alkalmas  $\mathbf{e}_n$  bázissá kiegészítő vektor esetén.)

**Bizonyítás:** Ha  $\mathcal{P}$  paralelotóp  $\mathbf{z}$  irányban kihúzható, akkor a 3.9 tétel alapján a  $\Lambda_z$  Venkov-rács  $(n-1)$ -dimenziós és primitív, azaz megegyezik  $\Lambda$  és  $H$  hipersíkjának metszetével, így  $\Lambda_z$  egy bázisa kiegészíthető  $\Lambda$  egy bázisává. Tegyük fel, hogy a  $\Lambda_z$ -hez nem tartozó meghatározó vektorok között van olyan, melynek az  $n$ -edik koordinátája 2. Ekkor ez a meghatározó vektor a  $H$ -val párhuzamos 2. rétegbe mutat. A meghatározó vektorhoz tartozó  $F$  lap középpontja az 1. rétegben, a hozzá csatlakozó  $\mathcal{P}_i$  paralelotóp középpontja a 2. rétegben van. Toljuk el  $\mathcal{P}_i$ -t úgy, hogy középpontja az 1. rétegben levő rácspont legyen. Az eltoltat vesszővel jelöljük. Így  $F'$  középpontja  $H$ -ban van. Megjegyezzük, hogy a rács rétege és a paralelotóp réteg (3.4 definíció) különböző fogalmak. Indirekt feltevésből kiindulva igazoljuk, hogy a  $\Lambda_z$  rácshoz tartozó paralelotópok nem alkotnak paralelotóp réteget és ez ellentmond majd annak, hogy a  $\Lambda_z$ -hez tartozó  $n$ -dimenziós paralelotópok vetületei  $\Lambda_z$  hipersíkjának  $(n-1)$ -paralelotópjai. Valóban  $F'$  lap  $K'$  középpontja nem lehet  $\Lambda_z$ -beli paralelotóp belső pontjának, ill. valamely sapka (definíciót lásd:

[36]) pontjának  $\mathbf{z}$  irányú vetülete, mert akkor  $K'$ -re vonatkozó szimmetria miatt egy másik  $\Lambda_z$ -beli paralelotóp belső pontjának, ill. valamely sapka pontjának is vetülete lenne, mely ellentmond az egyrétű kitöltésnek. Tehát csak  $\mathbf{z}$  irányú árnyékhatár egy pontjának vetülete lehet. De szintén a  $K'$ -re vonatkozó szimmetria miatt egy másik  $\Lambda_z$ -beli paralelotóp egy pontjának is  $K'$  lesz a vetülete, ahol a két vetített pont a másik paralelotópnak nem pontja, hiszen  $K'$  a két pontot elválasztja. Ha  $(n-1)$ -lap egy belső pontjának vetülete, akkor ennek a lapnak a meghatározó vektora  $\Lambda_z$ -beli. Ez ellentmondás, mert a vetített  $K^*$  pont tükörképe  $K'$ -re nem tartozhat ezen közös laphoz (mert  $K'$  nem tartozik hozzá), így az  $(n-1)$ -lap tükörképe  $K'$ -re egy másik  $(n-1)$ -lap a  $\Lambda_z$ -hez illeszkedő paralelotópok lapjai közül. Mindkét lap középpontja  $H$ -ban van és egymás  $\mathbf{z}$  irányú eltoltjai ezért megegyeznek. Nem lehet  $(n-2)$ -lap pontjának vetülete sem. Ha ez 3-öv része, akkor  $\mathbf{z}$  irányban nem kihúzható. Ha 2-öv része akkor, ehhez az  $(n-2)$ -laphoz tartozó rácsvektor egy általánosított meghatározó vektor, így egy másik  $\Lambda_z$ -beli paralelotóp is csatlakozik hozzá, mely nem lehetséges. Tehát összességében azt kaptuk, hogy a 2. rétegbe nem mutat meghatározó vektor. Hasonlóan igazolható, hogy kettőnél nagyobb rétegbe mutató meghatározó vektor sem fordulhat elő, így ha  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ -et úgy választjuk meg, hogy  $[\Lambda_z] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}]$  és  $e_n$  az 1. rétegbe mutat, azzal bizonyítottuk a lemmát.

**3.11. Lemma.** *Ha van olyan bázis, melyben a  $\mathcal{P}$  paralelotóp meghatározó vektorainak koordinátái  $0, \pm 1$  és  $\mathcal{P}$  paralelotóp egy DV cella affin képe, akkor létezik  $\mathbf{z}$  irány, hogy  $\mathcal{P} \oplus S(z)$  szintén paralelotóp.*

**Bizonyítás:** Válasszunk ki a feltételeknek eleget tevő bázisból  $n-1$  vektort. Ezek egy  $(n-1)$ -dimenziós részrácst alkotnak, melynek a hipersíkját  $H$ -val jelöljük. Mivel minden meghatározó vektor koordinátája  $0, \pm 1$ , a  $\mathcal{P}$  paralelotóp meghatározó vektorai a  $H$  hipersíkkal párhuzamos két szomszédos

rétegbe mutatnak.

Tekintsük a  $\mathcal{P}$  paralelotóp 3-öveit. Belátjuk, hogy minden 3-övnek legalább egy meghatározó vektora  $H$ -ba esik. Valóban, hiszen ha legalább 2 meghatározó vektor a szomszédos rétegekbe esik, akkor vagy az összegük (ellentétes rétegek esetén) vagy a különbségük (azonos szomszédos réteg esetén)  $H$ -ba esik. Tehát mind a 3 meghatározó vektor nem mutathat szomszédos rétegbe, legalább egy biztos  $H$ -beli. Mivel a  $\mathcal{P}$  paralelotóp egy DV cella affin képe,  $\mathcal{D}$ -ben a meghatározó vektorok megegyeznek a lapvektorokkal. Így ha választjuk a  $H'$ -re merőleges  $\mathbf{z}'$  irányt, akkor  $\mathbf{z}'$  merőleges minden 3-övnek legalább egy lapvektorára, ahol vesszővel az affin képet jelöltük. A 3.4 tétel alapján létezik a  $\mathcal{D} \oplus S(\mathbf{z}')$  paralelotóp. A fenti affinitás inverzét alkalmazva erre a paralelotópra a  $\mathcal{P} \oplus S(\mathbf{z})$  paralelotóp is létezik.

Megjegyezzük, hogy a 3.9 tétel alapján és a fenti feltételek teljesülése esetén a  $\mathcal{P}$  paralelotóp  $\mathbf{z}$  irányú vetülete  $\Lambda_{\mathbf{z}}$  Venkov-rács paralelotópja. Ha a paralelotóp helyett DV cellát tekintünk, akkor belátható, hogy a vetület is DV cella, azaz igaz a következő lemma.

**3.12. Lemma.** *Ha van olyan bázis, melyben a  $\mathcal{D}$  DV cella meghatározó vektorainak koordinátái  $0, \pm 1$ , akkor létezik  $\mathbf{z}$  irány, hogy  $\mathcal{D}$  cella  $\mathbf{z}$  irányú vetülete a  $\Lambda_{\mathbf{z}}$  rács DV cellája.*

**Bizonyítás:** Az előző lemmához hasonlóan az alkalmas bázisból kiválasztunk  $n - 1$  vektort. Ezek egy  $(n - 1)$ -dimenziós részrácst alkotnak, melynek a hipersíkját  $H$ -val jelöljük. Mivel minden meghatározó vektor koordinátája  $0, \pm 1$ , a  $\mathcal{D}$  meghatározó vektorai a  $H$  hipersíkkal párhuzamos két szomszédos rétegbe mutatnak.

A fentiekhez hasonlóan minden 3-övnek legalább egy meghatározó vektorra  $H$ -ba esik. Tekintsük most a 2-öveket is. Ha pontosan egy lap meghatározó vektora mutat szomszédos rétegbe, akkor értelemszerűen a másik  $H$ -ban van.

Ha mindkét meghatározó vektor szomszédos rétegbe mutat, akkor a különbségük vagy az összegük, azaz egy 2-övhöz tartozó általánosított meghatározó vektor  $H$ -beli. Ha választjuk a  $H$ -ra merőleges  $\mathbf{z}$  irányt, akkor mivel DV cella esetén a meghatározó vektorok megegyeznek a lapvektorokkal, a  $\mathbf{z}$  merőleges minden 2-, ill. 3-övhöz legalább egy általánosított lapvektorára. A 3.5 tétel alapján  $\mathcal{D}$  DV cella  $\mathbf{z}$  irányú vetülete a  $\Lambda_{\mathbf{z}}$  Venkov-rács síkjára, ennek a rácsnak egy DV cellája.

A továbbiakban gyökrácsok DV celláit vizsgáljuk, így szükségünk lesz a következő tételre és következményére.

**3.13. Tétel.** (J.H.CONWAY, N.J.A.SLOANE [8]) Valamely  $\Lambda$  gyökrács origó középpontú DV cellája a fundamentális szimplex véges tükrözés csoportnál vagy  $W(\Lambda)$  Weyl csoportnál vett képeinek az uniója.

A fundamentális szimplex origót nem tartalmazó lapjának  $W(\Lambda)$  Weyl csoportnál vett képei a DV cella  $(n-1)$ -dimenziós lapjait alkotják. Így a fenti tétel következményeként adódik:

**3.14. Tétel.** (J.H.CONWAY, N.J.A.SLOANE [8]) Gyökrácsok esetén a DV cella meghatározó vektorai megegyeznek a rács minimális vektoraival.

**3.15. Tétel.** *Az  $E_8$  rács kivételével a gyökrácsok  $\mathcal{D}$  DV celláira (és azok  $\mathcal{P}$  affin képeire) van olyan  $\mathbf{z}$  irány, hogy  $\mathcal{D} \oplus S(\mathbf{z})$  ( $\mathcal{D} \oplus S(\mathbf{z}')$ ) parallelotóp.*

Megjegyezzük, hogy tétel jelentőségét pont az adja, hogy az  $E_8$  rács DV cellája esetén nincs olyan irány, melyre kihúzható.

**Bizonyítás:** A 2.3 tétel alapján a  $Z_n, A_n, D_n, E_6, E_7$  gyökrácsok esetén van olyan bázis, melyben ezen rácsok minimális vektorainak koordinátái  $0, \pm 1$ . Mivel gyökrácsok esetén a 3.14 tétel alapján a meghatározó vektorok megegyeznek a minimális vektorokkal, így a 3.11 lemma szerint a fenti

gyökrácsok DV celláihoz, ill. ezek affin képeihez létezik  $\mathbf{z}$  irány, melyre a paralelotópok kihúzottjai is paralelotópok.

A következőkben belátjuk, hogy az  $E_8$  rács DV cellája nem kihúzható, azaz nincs olyan  $\mathbf{z}$  irány, melyre  $DV(E_8) \oplus S(z)$  paralelotóp. A 2.3 tétel alapján az  $E_8$  rács esetén nincs olyan bázis, melyben minden minimális vektor koordinátája  $0, \pm 1$ . Így a 3.14 tételt is felhasználva bármely bázis esetén van olyan meghatározó vektor, melynek koordinátái között van egynél nagyobb. Feltéve, hogy valamely  $DV(E_8)$  DV cella valamely  $\mathbf{z}$  irányban kihúzható, a  $\mathbf{z}$  irányhoz tartozó  $\Lambda_{\mathbf{z}}$  Venkov-rács  $(n-1)$ -dimenziós, hipersíkja  $H$ . Válasszuk meg úgy a bázist, hogy a  $[\Lambda_{\mathbf{z}}] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_7]$  ekkor az 8-adik koordináta a 3.10 lemma szerint nem lehet 1-nél nagyobb abszolút értékű. Tehát az a meghatározó vektor, melynek van egynél nagyobb abszolút értékű koordinátája  $\Lambda_{\mathbf{z}}$ -nek eleme. A  $DV(E_8)$  DV cella  $\Lambda_{\mathbf{z}}$ -hez tartozó meghatározó vektorai erre a 7-dimenziós rácsra vonatkozólag is minimális vektorok, mivel a minimum nem csökkenhet, mert az eredetinek egy részrácsát tekintettük. A 2.18 tétel alapján bármely 7-dimenziós rács esetén választható, úgy bázis, hogy a minimális vektorok koordinátái, azaz  $\Lambda_{\mathbf{z}}$ -ben fekvő meghatározó vektorainak koordinátái  $0, \pm 1$ . Mely ellentmond annak, hogy  $\Lambda_{\mathbf{z}}$ -ben van olyan meghatározó vektor, melynek koordinátája nagyobb egynél. Így nincs olyan  $\mathbf{z}$  irány, melyre  $DV(E_8) \oplus S(z)$  paralelotóp.

A fenti tétel analógja vetületre most már könnyen igazolható:

**3.16. Tétel.** *Az  $E_8$  rács kivételével a gyökrácsok  $\mathcal{D}$  DV celláira van olyan  $\mathbf{z}$  irány, hogy  $\mathcal{D}$  cella  $\mathbf{z}$  irányú vetülete a  $\Lambda_{\mathbf{z}}$  rács DV cellája.*

**Bizonyítás:** A fentiekhez hasonlóan a 2.3 tétel alapján a  $Z_n, A_n, D_n, E_6, E_7$  gyökrácsok esetén van olyan bázis, melyben ezen rácsok minimális vektorainak koordinátái  $0, \pm 1$ . Mivel gyökrácsok esetén a 3.14 tétel alapján a meghatározó vektorok megegyeznek a minimális vektorokkal, így a 3.12

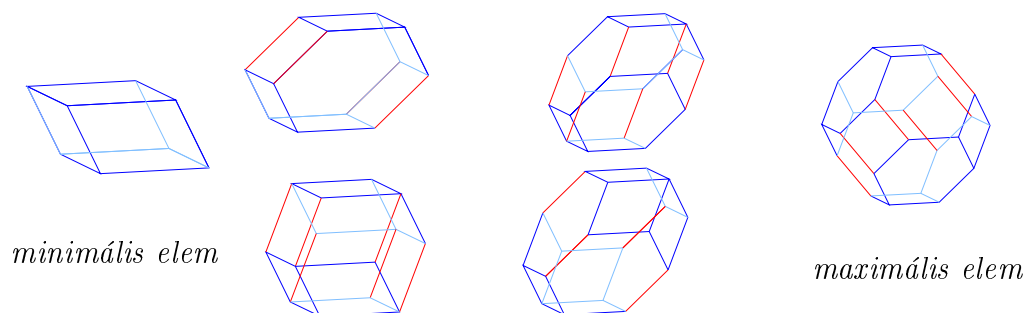


lemma szerint a fenti gyökrácsok DV celláihoz létezik  $\mathbf{z}$  irány, melyre  $\mathcal{D}$  cella  $\mathbf{z}$  irányú vetülete a  $\Lambda_{\mathbf{z}}$  rács DV cellája.

Mivel az  $E_8$  rács DV cellájára a 3.15 tétel alapján nincs olyan  $\mathbf{z}$  irány, melyre kihúzható, így a 3.4 tétel szerint nincs olyan  $\mathbf{z}$  irány, mely a DV cella minden 3-övének legalább egy lapvektorára merőleges. Így a 3.5 tétel (ii) feltétele nem teljesül, tehát nincs olyan  $\mathbf{z}$  irány, melyre a DV cella vetülete a  $\Lambda_{\mathbf{z}}$  rács DV cellája.

A következőkben röviden áttekintjük, hogyan kapcsolódnak eddigi eredményeink a paralelotópok osztályozásához. Már az ókorban ismert volt a két síkbeli paralelotóp, a centrálszimmetrikus hatszög (primitív), parallelogramma (nem primitív). E.S. FEDOROV [20]-ban leírta az 5 kombinatorikusan különböző 3-dimenziós paralelotópot, melyek közül a csonkolt oktaéder primitív, a többi nem primitív, a nyújtott oktaéder, a rombdodekaéder, a hatszög alapú hasáb és a kocka. B.N. DELONE [14]-ben 51 különböző típusú 4-dimenziós paralelotópot talált. A hiányzó 52.-et M.I. SHTOGRIN találta meg [53]-ban. Ezek közül 17 zonotóp és a többi 35 a szabályos 24-cella valamint ennek Minkowski összege valamely zonotóppal. A fentiek közül 3 primitív. S.S. RYSHKOV és E.P. BARANOWSKII [52]-ben 221 primitív 5-dimenziós paralelotópot talált, melyet P. ENGEL és V. GRISHUKHIN [18]-ban még eggyel egészített ki. P. ENGEL [16] és [17]-ben számítógép segítségével 179372 kombinatorikusan különböző 5-dimenziós paralelotópot talált.

A bevezetőben tárgyaltaknak megfelelően egy részben rendezést vezethetünk be a paralelotópok kombinatorikus típusain a zárt élzónák összenyomásával. Az ott definiált maximális elem geometriailag olyan, mely triviálistól eltérő módon, tovább már nem húzható ki, azaz nincs olyan paralelotóp, melynek az összenyomottja lenne. Minimális elem, melyet már nem lehet tovább összenyomni. 3-dimenzióban maximális elem a primitív csonkolt okta-



3.6. ábra. Parallelotópok parciális rendezése

éder, melynek összenyomásával meg lehet kapni az összes parallelotópot. Minimális elem a kocka (lásd: [10] vagy [39]). 4-dimenzióban 4 maximális elem van, de közülük csak 3 primitív. Ezek összenyomásával 2 minimális elemhez jutunk, melyekből viszont kihúzás segítségével kapható meg az összes parallelotóp ([7], [60], [28]). Nyilván a 3 primitívből csak összenyomással nem lehet az összes parallelotópot megkapni.

P. ENGEL az 5-dimenziós parallelotópokat primitívekből összenyomással, majd a kapott minimális elemek kihúzásával kapta meg.

Sajnos általában ilyen módon nem kapható, meg az összes parallelotóp, hiszen a 3.15 tétel alapján az  $E_8$  rács DV cellája nem húzható ki semelyik irányba, de másrészt bármely irányban nulla kövérségű, tehát össze se nyomható. *Így létezik nem primitív maximális elem, mely egyben minimális is és semely módon nem kapható meg primitív elemből.*

Megjegyezzük, hogy a fentiek szorosán kapcsolódnak a Voronoi-sejtéshez. G.F. VORONOI a következő kérdést fogalmazta meg: Vajon minden parallelotóp egy DV cella affin képe-e? G.F. VORONOI [68] és [69]-ben bizonyította a sejtést azokban az esetekben mikor a parallelotóp primitív. O.K. ZSITOMIRSZKIJ [71]-ben kiterjesztette G.F. VORONOI bizonyítását  $(n-2)$ -primitív parallelotópokra, azaz mikor a parallelotóp minden öve 3-öv. P. MCMULLEN [46]-ban bizonyította a sejtést azokra a parallelotópokra, melyek zonotópok.

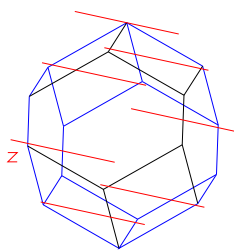
R.M. ERDAHL egy másik bizonyítást adott erre [19]-ben.

Az alábbi két tételt igazolás nélkül közöljük, egyrészt terjedelmi korlátok miatt, másrészt mivel a témát megnyugtatóan még nem zárja le és további vizsgálatokat igényel.

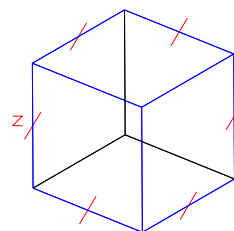
**3.17. Tétel.** *Ha  $\mathcal{P} \oplus S(z)$  paralelotóp egy  $\mathcal{D} \oplus S(z')$  DV cella affin képe, akkor  $\mathcal{P}$  paralelotóp is egy  $\overline{\mathcal{D}}$  DV cella affin képe.*

A tétel megfordítását csak bizonyos feltétel esetén sikerült igazolni, így szükségünk lesz az alábbi definícióra.

**3.10. Definíció.** A  $\mathcal{P}$  paralelotópnak két  $\mathbf{z}'$  és  $\mathbf{z}''$  irányú kihúzása  $\mathcal{P} \oplus S(z')$ ,  $\mathcal{P} \oplus S(z'')$  paralelotópokká ekvivalens, ha a  $\mathbf{z}'$  és  $\mathbf{z}''$  irányú árnyékhatárok megegyeznek, így  $\Lambda_{z'} = \Lambda_{z''}$  (és  $\mathbf{z}'$  és  $\mathbf{z}''$  irányokkal teljesül a 3.9 tétel második feltétele.) Egy  $\mathbf{z}$  irányú kihúzás *szabadsági foka*  $k_z$  a vele ekvivalens kihúzások irányai által meghatározott altér dimenziója. Ha  $\mathbf{z}$  irányban nem húzható ki a paralelotóp, akkor legyen  $k = 0$ .



$$k_z = 1$$



$$k_z = 3$$

3.7. ábra. A  $\mathbf{z}$  irányú kihúzás szabadsági foka

**3.18. Tétel.** *Ha a  $\mathcal{P}$  paralelotópot egy  $L$  affinitás a  $\mathcal{D}$  DV cellába viszi és ha létezik a  $\mathcal{P} \oplus S(z)$  paralelotóp, ahol  $k_z = 1$ , akkor  $\mathcal{P} \oplus S(z)$  paralelotóp egy  $\overline{\mathcal{D}} \oplus S(z')$  DV cella affin képe.*

Tehát összefoglalva a fentiek alapján azok a paralelotópok, melyek primitív**ből**, ill. O.K. ZSITOMIRSZKIJ [71]-beli eredménye alapján  $(n-2)$ -primitív paralelotópokból a 3.17 tétel miatt összenomással, majd ezekből a 3.18 tétel miatt egyértelmű kihúzással megkaphatók, eleget tesznek a Voronoi sejtésnek, azaz DV cellák affin képei. Az eddigiek és V. GRISHUKHIN 3.3 tétele alapján elegendő csak az  $(n-2)$ -primitív paralelotóp**ból** nem megkapható, minden irányban nulla kövérségű paralelotópok valamint a minden irányban nulla kövérségű paralelotópokból egyértelmű kihúzások sorozatával nem megkapható paralelotópokra igazolni a Voronoi-sejtést, annak igazolásához.

## 4. fejezet

# $\langle p, q \rangle$ pontrendszerek vizsgálata

### 4.1. Előzmények

Legyenek  $p, q \geq 1$  egészek. Egy állandó görbületű térben a  $\Sigma$  ponthalmaz  $\langle p, q \rangle$  pontrendszert alkot, ha  $\exists r, R > 0$  úgy, hogy tetszőleges  $r$  sugarú nyílt gömb  $\Sigma$ -nak legfeljebb  $p$  pontját és tetszőleges  $R$  sugarú zárt gömb  $\Sigma$ -nak legalább  $q$  pontját tartalmazza.

**4.1. Definíció.** Jelölje  $r_p$  a  $r$  sugarak szuprémumát és  $R_q$  a  $R$  sugarak infimumát adott  $\langle p, q \rangle$  pontrendszerre. A  $\frac{r_p}{R_q}$  hányadost a  $\langle p, q \rangle$  pontrendszer tömörségének nevezzük.

Feladatunk a  $\langle p, q \rangle$  pontrendszerek változtatása mellett a  $\sup \frac{r_p}{R_q}$  értékének, valamint annak a pontrendszernek, ill. pontrendszereknek a meghatározása, ahol a maximális tömörség előáll. Jelöljük  $\kappa(n, p, q)$ -val a  $\sup \frac{r_p}{R_q}$ -t, ahol  $n$  a tér dimenziója. Más szóval, olyan pontrendszereket vizsgálunk, melyeknek a tömörsége maximális, úgyhogy fennállnak a következő tulajdonságok: azok a  $r$  sugarú nyílt gömbök, melyeknek a középpontjai a pontrendszer pontjai  $p$ -szeres elhelyezést, az ugyanilyen középpontú  $R$  sugarú zárt gömbök  $q$ -szoros fedést alkotnak.

Az alapproblémát B.N. DELONE [13] fogalmazta meg  $(r, R)$  pontrendszerekre, ez a fenti terminológia szerint  $p = 1$ ,  $q = 1$  eset. HORVÁTH J. [37] vizsgálta először a problémát  $p, q > 1$  esetekben. Röviden ismertetjük a témában elért eddigi eredményeket. A feladatot síkban  $p = 1$ ,  $q = 1$  esetben S.S. RYSHKOV [51] és FEJES TÓTH L. [23], térben BÖRÖCZKY K. [5] oldotta meg. Az  $\langle 1, 1 \rangle$  pontrendszer maximális tömörsége 0,866... az euklideszi síkban és 0,775... a térben. HORVÁTH J. [38] oldotta meg a problémát  $\langle 1, 1 \rangle$  pontrendszer esetén 4 és 5-dimenzióban rácsszerű esetben. Síkban nem feltétlenül rácsszerű esetben a  $\langle 2, 1 \rangle$  pontrendszer maximális tömörsége, valamint térben rácsszerű esetben a  $\langle 2, 2 \rangle$  pontrendszer maximális tömörsége ismert [37]. Továbbá csak rácsszerű és síkbeli esetekben van megoldva a feladat az összes  $p, q \leq 5$  valamint az  $\langle 1, 6 \rangle$ ,  $\langle 3, 6 \rangle$ ,  $\langle 4, 6 \rangle$  és  $\langle 6, 6 \rangle$  pontrendszerekre [37], [56], [58], [72]. Ekkor nagyon sok esetben a maximális tömörséget a szabályos háromszög által generált rács, azaz  $A_2$  rács adja HORVÁTH J. [37] és H. TEMESVÁRI Á. [56], valamint H. TEMESVÁRI Á., VÉGH A. [58] alapján. Ez adta a kiindulópontot a további vizsgálatokhoz. A következőkben elsőként  $p = 1$  és  $q > 1$  esetén nem feltétlenül rácsszerű eseteket vizsgálunk magasabb dimenziókban. Ezek megoldásai kapcsolódnak az előző fejezetekben vizsgált gyökrácsokhoz. Majd síkbeli rácsszerű esetekkel foglalkozunk.

## 4.2. Alacsony dimenziós esetek 48-dimenzióig

### 4.2.1. Az $A_n$ rács

#### Lemmák

Adott  $q > 1$  egész esetén szeretnénk megtalálni a lehető legkisebb  $R$  sugarat és az egység sugarú  $n$ -dimenziós gömböknek azt az optimális elrendezését,

mikor a) azok elhelyezést alkotnak, tehát  $p = 1$ , és b) ha mindegyik gömböt egy  $R$  sugarúval helyettesítjük, akkor ezek  $q$ -szoros fedést alkotnak. Az eredeti gömbök középpontjainak kétszeres fedése érdekében a  $R$  sugárnak legalább 2-nek kell lennie. Így teljesül a következő egyszerű lemma:

**4.1. Lemma.** *Ha  $q > 1$  tetszőleges pozitív egész és  $n$  a dimenzió, akkor  $\kappa(n,1,q) \leq \frac{1}{2}$ .*

A következőkben olyan rácsokat fogunk vizsgálni, mikor a fenti egyszerű korlát éles.

Legyen  $B(O,r)$  egy  $r$  sugarú  $O$  középpontú nyílt és  $\bar{B}(O,r)$  egy zárt gömb. Jelölje  $\mathcal{P}^n$  az  $n$ -dimenziós szabályos szimplex által kifeszített paralelepipedont. Tegyük fel, hogy  $\mathcal{P}^n$  élének a hossza 1. Tekintsük az alábbi  $n$ -dimenziós ferdeszögű koordinátarendszert, legyen  $(0, \dots, 0)^T$  az  $n$ -dimenziós szabályos szimplex egy csúcsa, és a többi csúcsok legyenek  $(1, 0, \dots, 0)^T$ ,  $(0, 1, \dots, 0)^T, \dots, (0, 0, \dots, 1)^T$ . Ily módon az  $A_n$  rács egy bázisát adtuk meg. Így az  $\mathbf{x}$  vektor euklideszi hossza nem más, mint  $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^T G \mathbf{x}$ , ahol  $G$  az  $A_n$  rács Gram-mátrixa. A  $\mathcal{P}^n$  paralelepipedon csúcsai az  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  pontok, ahol  $x_i \in \{0, 1\}$ . A  $\mathcal{P}^n$   $(n-1)$ -dimenziós lapjai  $(n-1)$ -dimenziós paralelepipedonok. Jelölje  $\mathcal{P}_{k,l}^{n-1}$  a  $\mathcal{P}^n$  paralelepipedonnak azokat a lapjait, melyeknek csúcsai eleget tesznek az  $x_k = l$  feltételnek, ahol  $l \in \{0, 1\}$  és  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Továbbá jelölje  $H_i^{n-1}$  azt az  $(n-1)$ -dimenziós hipersíkot, melynek normálvektora  $(1, 1, \dots, 1)^T$  és melyre  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = i$ . Ez a hipersík  $\mathcal{P}^n$ -nek azokat a csúcsait tartalmazza, melyeknek  $i$  db nem nulla koordinátája van. Legyen  $R_{i,i+1}^n$  a  $\text{conv}((\text{vert} \mathcal{P}^n \cap H_i^{n-1}) \cup (\text{vert} \mathcal{P}^n \cap H_{i+1}^{n-1}))$  konvex burka, valamint  $R_{j,j+1}^{n-1} = R_{i,i+1}^n \cap \mathcal{P}_{k,l}^{n-1}$ , ahol  $j$  az  $i, k, l$  értékektől függ. Az  $R_{j,j+1}^{n-1}$  testek az  $R_{i,i+1}^n$  testnek azok a lapjai, melyek nem a  $H_i^{n-1}$  hipersíkok valamelyikében fekszenek.

**4.2. Lemma.** *Ha  $n \leq 7$  és  $R_{i,i+1}^n$ -nek az  $R_{j,j+1}^{n-1}$ -lapjait a  $\bar{B}(X,1)$  gömbök  $q$ -szor fedik, ahol  $X \in \text{vert}(R_{j,j+1}^{n-1})$ , akkor az  $R_{i,i+1}^n$  testet is  $q$ -szor fedik a csúcsai körül írt egység sugarú gömbök.*

**Bizonyítás:** A feltételek szerint az  $R_{i,i+1}^n$  testnek azokat a lapjait, melyek nem a  $H_i^{n-1}$  hipersíkok valamelyikében fekszenek,  $q$ -szor fedik a csúcsaik körül írt gömbök.

A következőkben bizonyítjuk, hogy  $R_{i,i+1}^n \cap H_i^{n-1} \cong R_{i-1,i}^{n-1}$ , így  $R_{i,i+1}^n$ -nek azokat a lapjait, melyek a  $H_i^{n-1}$  hipersíkban fekszenek, szintén  $q$ -szor fedik a csúcsaik körül írt gömbök.

Valóban, legyen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

egy párhuzamos vetítés, mely a  $H_1^{n-1}$  hipersíkot  $\mathcal{P}_{n,0}^{n-1}$  lap hipersíkjába viszi. Tekintsük most az  $R_{0,1}^n$   $n$ -dimenziós szabályos szimplexet. Az  $S_1 := \text{conv}(R_{0,1}^n \cap H_1^{n-1})$  és  $S_2 := \text{conv}(R_{0,1}^n \cap \mathcal{P}_{n,0}^{n-1})$  halmazok  $(n-1)$ -dimenziós szabályos szimplexek, melyeknek van közös élük, így azok egybevágóak. Az  $L|_{H_1^{n-1}} : H_1^{n-1} \rightarrow \mathcal{P}_{n,0}^{n-1}$  transzformáció bijektív és  $L(S_1) = S_2$ . Így  $L$  egybevágóság. Mivel  $H_1^{n-1} \parallel H_i^{n-1}$ ,  $L|_{H_i^{n-1}} : H_i^{n-1} \rightarrow \mathcal{P}_{n,0}^{n-1}$  leképezés is egybevágóság. Jelölje  $H_i^{n-2}$  a  $\mathcal{P}_{n,0}^{n-1} \cap H_i^{n-1}$ -t. Ha  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)^T \in R_{i,i+1}^n \cap H_i^{n-1}$ , akkor

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in H_i^{n-2} \subseteq \mathcal{P}_{n,0}^{n-1}.$$



Ha  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)^T \in R_{i,i+1}^n \cap H_i^{n-1}$ , akkor

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in H_{i-1}^{n-2} \subseteq \mathcal{P}_{n,0}^{n-1}.$$

Mivel  $\text{conv}((\text{vert}\mathcal{P}_{n,0}^{n-1} \cap H_{i-1}^{n-2}) \cup (\text{vert}\mathcal{P}_{n,0}^{n-1} \cap H_i^{n-2}))$  megegyezik  $R_{i-1,i}^{n-1}$ -vel és  $\mathcal{P}_{n,0}^{n-1} \cap H_{i-1}^{n-1} \cong \mathcal{P}_{n,1}^{n-1} \cap H_i^{n-1}$ -vel, az  $L$  egybevágósági transzformáció  $R_{i,i+1}^n \cap H_i^{n-1}$ -t  $R_{i-1,i}^{n-1}$ -be képezi, melyet  $q$ -szor fednek a csúcsaiba rajzolt gömbök.

Így  $R_{i,i+1}^n$ -nek a lapjai kongruensek valamely  $R_{j,j+1}^{n-1}$ -vel. Mivel  $R_{j,j+1}^{n-1} \subset \subset \mathcal{P}_{n,0}^{n-1}$   $q$ -szor fedett, a fentiek értelmében  $R_{i,i+1}^n$  összes lapja szintén  $q$ -szor fedett a  $\bar{B}(X,1)$  gömbök által, ahol az  $X$  pont a megfelelő lapon fekszik. Legyen a  $B_{i,i+1}^n \in R_{i,i+1}^n$  pont olyan, hogy  $|B_{i,i+1}^n X| \leq 1$ ,  $R_{i,i+1}^n$  összes  $X$  csúcsára. Ebben az esetben  $B_{i,i+1}^n \in B(X,1)$  az összes  $X$  pontra, ahol  $X \in \text{vert}R_{i,i+1}^n$ . Tehát  $\text{conv}\{B_{i,i+1}^n, L_{i,j}^{n-1}\}$ , ahol  $L_{i,j}^{n-1}$  jelöli az  $R_{i,i+1}^n$  test  $j$ -edik lapját, az összes  $j$  esetén  $q$ -szor fedett, így  $R_{i,i+1}^n$  szintén  $q$ -szor fedett.

Be kell még látnunk, hogy léteznek ilyen fentieknek megfelelő  $B_{i,i+1}^n$  pontok. Ha feltesszük, hogy a  $B_{i,i+1}^n$  pont  $R_{i,i+1}^n$  test csúcsaitól egyenlő távolságra fekszik, akkor  $B_{i,i+1}^n$  koordinátáira  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \alpha$  egyenlőség teljesül. A  $H_i^{n-1}$  hipersíkban  $R_{i,i+1}^n$  csúcsai reprezentálhatók  $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ponttal, ahol  $x_1 = x_2 = \dots = x_i = 1$  és  $x_{i+1} = x_{i+2} = \dots = x_n = 0$ . Így

$$\begin{aligned} g_i(\alpha) &:= |B_{i,i+1}^n X_i|^2 = \\ &= (\alpha - 1, \alpha - 1, \dots, \alpha - 1, \alpha, \dots, \alpha) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \dots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \alpha - 1 \\ \vdots \\ \alpha - 1 \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= (\alpha - 1)^2 \left( \frac{1}{2} i(i+1) \right) + \alpha^2 \left( \frac{1}{2} (n-i)(n-i+1) \right) + \alpha(\alpha - 1)i(n-i).$$

Hasonló módon

$$\begin{aligned} g_{i+1}(\alpha) &:= |B_{i,i+1}^n X_{i+1}|^2 = \\ &= (\alpha - 1)^2 \left( \frac{1}{2} (i+1)(i+2) \right) + \alpha^2 \left( \frac{1}{2} (n-i-1)(n-i) \right) + \alpha(\alpha - 1)(i+1)(n-i-1). \end{aligned}$$

A  $g_i(\alpha) = g_{i+1}(\alpha)$  egyenlőségből következik, hogy  $\alpha = \frac{i+1}{n+1}$ , így

$$g_i \left( \frac{i+1}{n+1} \right) = g_{i+1} \left( \frac{i+1}{n+1} \right) = \frac{(i+1)(n-i)}{2(n+1)}.$$

Az  $n \leq 7$  esetben a  $g_i(\alpha) = g_{i+1}(\alpha) \leq 1$  egyenlőség fennáll az összes  $i$  esetén, ahol  $0 \leq i \leq n$ , amint állítottuk. Q.e.d.

Megjegyzés: A 4.2 lemmában  $n \leq 7$  esetben  $q$ -szoros fedésre és speciális  $R_{i,i+1}^n$  testre G. HORVÁTH Á. [33] tételéhez hasonló állítást bizonyítunk. A fent nevezett tétel azt állítja, hogy egy alapparallelepipedon  $n$ -dimenziósan fedett (a csúcsaihoz tartozó DV cellák által tekintettel az általa generált rácsra), ha  $(n-1)$ -dimenziósan is fedett.

### Tömörség meghatározása

**4.3. Tétel.** ([63])  $\kappa(n,1,q) = \frac{1}{2}$ , ha  $n = 2,3,4$  és  $q \leq n+1$  vagy  $n = 5,6,7$  és  $q \leq 5$  és ezekben az esetekben az  $A_n$  rács maximális tömörséget szolgáltat.

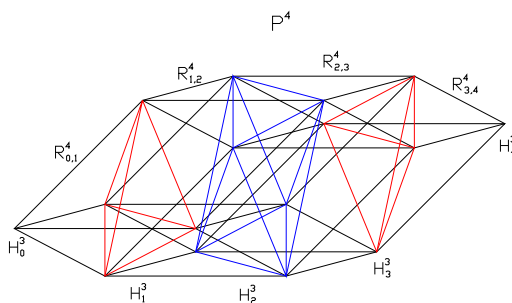
**Bizonyítás:** A 4.1 lemmából következik, hogy  $\kappa(n,1,q) \leq \frac{1}{2}$ . Így elegendő megmutatni, hogy létezik olyan pontrendszer, melyre  $\kappa(n,1,q) = \frac{1}{2}$ . Tekintsük az  $A_n$  gyökrácsot. Válasszuk meg úgy a bázist, hogy a szabályos szimplex egy csúcsból kiinduló élei legyenek a bázisvektorok. Így az alapparallelepipedont jelölje  $\mathcal{P}^n$ . Választhatjuk a bázisvektorokat és így a parallelepipedon éleit egység hosszúnak. Könnyen látható, hogy a  $B(X, \frac{1}{2})$  gömbök, ahol  $X \in A_n$  1-szeres elhelyezést adnak. Megmutatjuk, hogy a  $\bar{B}(X,1)$  gömbök, ahol  $X \in A_n$  és  $n \leq 7$ ,  $q$ -szoros fedést biztosítanak a fenti  $q$  értékekre.

A 2-dimenziós esetben  $\mathcal{P}^2$  csúcsai értelemszerűen  $(0,0)^T$ ,  $(1,0)^T$ ,  $(0,1)^T$ ,  $(1,1)^T$ . A  $(1,0)^T$ ,  $(0,1)^T$  pontokon áthaladó egyenes két szabályos háromszögre vágja  $\mathcal{P}^2$ -t. Ezek a háromszögek 3-szor fedettek, következésképpen  $\mathcal{P}^2$  és így  $\mathbb{E}^2$  is.

A 3-dimenziós esetben először a 4.2 lemmát alkalmazzuk. A  $R_{0,1}^3$  és  $R_{2,3}^3$  testek szabályos tetraéderek, a  $R_{1,2}^3$  egy szabályos oktaéder, melynek lapjai szabályos háromszögek. Ezeket a 2-dimenziós eset alapján 3-szor fedik a csúcsaikba írt gömbök, így magukat a testeket is. Tehát  $\mathcal{P}^3$  és  $\mathbb{E}^3$  is 3-szor fedett. A szabályos tetraéder nyilvánvalóan 4-szer fedett. Legyen  $A_1 (1,0,0)^T$ ,  $A_2 (0,1,0)^T$ ,  $A_3 (0,0,1)^T$ ,  $C_1 (1,1,0)^T$ ,  $C_2 (1,0,1)^T$ ,  $C_3 (0,1,1)^T$ ,  $D (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$ .  $A_i \in H_1^2$  és  $C_i \in H_2^2$ , ahol  $i = 1,2,3$ . Belátjuk, hogy a  $C_1C_2C_3$  háromszög 4-szer fedett  $A_i$ ,  $C_i$ , ahol  $i = 1,2,3$  középpontú egység sugarú gömbök által. A  $C_1C_2C_3$  háromszöget 3-szor fedi a  $\bar{B}(C_i,1)$ , ahol  $i = 1,2,3$ , így elegendő megmutatni, hogy a  $C_1C_2C_3$  háromszöget még egyszer fedik a  $\bar{B}(A_i,1)$  gömbök, ahol  $A_i \in H_1^2$ . A  $|C_1A_1| = |C_2A_1| = |DA_1| = 1$  egyenlőségek miatt a  $C_1C_2D$  háromszöget fedi a  $\bar{B}(A_1,1)$  gömb. Hasonlóan a  $\bar{B}(A_2,1)$  és a  $\bar{B}(A_3,1)$  gömbök is fedik a megfelelő  $C_1C_3D$  és  $C_2C_3D$  háromszögeket. Hasonlóan igazolható, hogy az  $R_{1,2}^3$  oktaéder összes lapja 4-szeresen fedett, így a 4.2 lemmából adódóan maga az  $R_{1,2}^3$  oktaéder is 4-szeresen fedett, tehát  $\mathcal{P}^3$  és  $\mathbb{E}^3$  is.

A 4-dimenziós esetben a bizonyítás gondolata hasonló. Az  $R_{0,1}^4$  és  $R_{3,4}^4$  tetraéderek nyilvánvalóan 5-ször fedettek. Az  $R_{1,2}^4 \cong R_{2,3}^4$  testek 3-dimenziós lapjai tetraéderek és oktaéderek, melyek a fentiek alapján 4-szer fedettek. A rács szimmetriája miatt elegendő csak azt megmutatni, hogy a  $\mathcal{T} \in H_1^3$  tetraéder és az  $\mathcal{O} \in H_2^3$  oktaéder 5-ször fedett. Legyen  $A_1 (1,0,0,0)^T$ ,  $A_2 (0,1,0,0)^T$ ,  $A_3 (0,0,1,0)^T$ ,  $A_4 (0,0,0,1)^T$ ,  $C_{1,2} (1,1,0,0)^T$ ,  $C_{1,3} (1,0,1,0)^T$ ,  $\dots$ ,  $C_{3,4} (0,0,1,1)^T$ ,  $D_1 (0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$ ,  $D_2 (\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$ ,  $D_3 (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})^T$ ,  $D_4 (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0)^T$ ,  $K (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ .  $C_{i,j} = C_{j,i}$ , nyilvánvalóan.  $\mathcal{T} := \text{conv}\{A_i : i =$

$= 1,2,3,4\}$  és  $\mathcal{O} := \text{conv}\{C_{i,j} : i \neq j, i, j = 1,2,3,4\}$ . A  $\bar{B}(A_i,1)$  gömbök, ahol  $i = 1,2,3,4$  fedik a  $K$  pontot és a  $C_{i,j}$  háromszöget, ahol  $i \neq j$ . A  $\bar{B}(A_k,1)$ ,  $\bar{B}(A_l,1)$  és  $\bar{B}(A_m,1)$  gömbök fedik a  $C_{l,k}C_{m,k}D_n$ ,  $C_{l,k}C_{l,m}D_n$  and  $C_{l,m}C_{k,m}D_n$  háromszögeket, ahol  $k, l, m, n \in \{1,2,3,4\}$  és  $k, l, m, n$  különbözők. Így a  $\bar{B}(A_i,1)$  gömbök, ahol  $i = 1,2,3,4$ , fedik az  $\mathcal{O}$  oktaédert. Tehát az  $\mathcal{O}$  oktaéder 5-ször fedett. A  $\mathcal{T}$  tetraédert fedi a  $\bar{B}(X,1)$  gömb, ahol  $X = (0,0,0,0)^T$ . A  $B_{1,2}^4$  pontot is fedi a  $\bar{B}(A_i,1)$  gömbökön kívül, ahol  $i = 1,2,3,4$  a  $\bar{B}(X,1)$  gömb, ahol  $X = (0,0,0,0)^T$ , így  $R_{1,2}^4$  test 5-ször fedett a megfelelő gömbökkel. Ily módon a  $\mathcal{P}^4$  és  $\mathbb{E}^4$  is 5-ször fedett.

4.1. ábra.  $\mathcal{P}^4$  felbontása

Az  $n=5,6,7$ -dimenziós esetekben a 4.2 lemmából valamint az  $R_{j,j+1}^{n-1}$  testek 5-szörös fedettségéből következik, hogy  $R_{i,i+1}^n$  és így  $\mathcal{P}^n$  és  $\mathbb{E}^n$  is 5-ször fedett. Q.e.d.

#### 4.2.2. A $D_n$ , az $E_7$ , az $E_8$ és további rácsok

##### Lemmák

H.S.M. COXETER [11] jelöléseit követve  $\alpha_n$  jelöli az  $n$ -dimenziós szabályos szimplexet,  $\beta_n$  az  $n$ -dimenziós keresztpolitópot,  $h\gamma_n$  pedig azt a testet, melyet a következőképpen definiálunk: legyen  $h\gamma_n =$

$= \text{conv}(\{x \in \{0,1\}^n \mid \sum x_i \equiv 0 \pmod{2}\})$ , azaz az  $n$ -dimenziós kocka csúcsai közül „váltakozva” elhagyunk ill. megtartunk egyet, majd az így keletkező ponthalmaznak vesszük a konvex burkát. H.S.M. COXETER ezt a testet fél-kockának nevezte. Röviden összefoglaljuk  $h\gamma_n$ -nek azokat a tulajdonságait, melyeket a későbbiekben használunk. A szokásos bázist választva, a definíció szerint, csúcsainak halmaza:  $\{x \in \{0,1\}^n \mid \sum x_i \equiv 0 \pmod{2}\}$ . Nyilvánvalóan ebben az esetben éleinek hossza  $\sqrt{2}$ .  $h\gamma_n$ -nek  $2n$  db  $h\gamma_{n-1}$  és  $2^{n-1}$  db  $\alpha_{n-1}$   $(n-1)$ -dimenziós lapja van. Továbbá felhasználjuk, hogy  $h\gamma_3 \cong \alpha_3$  és  $h\gamma_4 \cong \beta_4$  (lásd: [11]).

Az alábbiakban a fenti testek fedettségét vizsgáljuk olyan gömbökkel, melyeknek sugara megegyezik az élek hosszával, középpontja pedig a test csúcsa.

**4.4. Lemma.** *A  $\beta_n$  keresztpolitópot  $n \geq 3$  esetben  $(n+1)$ -szer fedik a keresztpolitóp élével megegyező sugarú és a csúcsai körül rajzolt gömbök.*

Megjegyezzük, hogy a lemma a fenti oktaéderre vonatkozó állítás általánosítása és bizonyítása is hasonló.

**Bizonyítás:** Legyenek a  $\beta_n$  keresztpolitóp csúcsai:  $(\pm 1, 0, 0, \dots, 0)^T$ ,  $(0, \pm 1, 0, \dots, 0)^T$ ,  $\dots$ ,  $(0, 0, \dots, 0, \pm 1)^T$ . Így élének a hossza  $\sqrt{2}$ . A  $\beta_n$  keresztpolitóp lapjai  $\alpha_{n-1}$  szabályos szimplexek, így ezek  $n$ -szer fedettek a  $\sqrt{2}$  sugarú, csúcs középpontú gömbökkel. Mivel ezek a gömbök az  $\mathbf{0}$  origót is mind fedik, így a  $\text{conv}(\mathbf{0}, \text{vert}(\alpha_{n-1}))$   $n$ -dimenziós szimplexeket is mind  $n$ -szer fedik a  $\bar{B}(X, \sqrt{2})$  gömbök, ahol  $X \in \text{vert}(\alpha_{n-1})$ . Tehát a  $\beta_n$  keresztpolitópot is  $n$ -szer fedik a  $\bar{B}(X, \sqrt{2})$  gömbök, ahol  $X \in \text{vert}(\beta_n)$ .

A továbbiakban a plusz egyszeres fedést bizonyítjuk. Jelöljük például azt az  $\alpha_{n-1}$  szimplexet, melynek csúcsai  $A_1(1, 0, 0, \dots, 0)^T$ ,  $A_2(0, 1, 0, \dots, 0)^T$ ,  $\dots$ ,  $A_n(0, 0, \dots, 0, 1)^T$  pontok,  $\alpha_{n-1}^+$ -szal, a maradék, azaz az  $-A_1, -A_2, \dots, -A_n$  csúcsok alkotta szimplexet  $\alpha_{n-1}^-$ -szal. Belátjuk, hogy a  $\bar{B}(X, \sqrt{2})$  gömbök, ahol  $X \in \text{vert}(\alpha_{n-1}^+)$  együttesen még egyszer lefedik az  $\alpha_{n-1}^-$  szimplex

lapot. Az  $A_i$ , ahol  $i = 1, 2, \dots, n$ , középpontú  $\sqrt{2}$  sugarú gömb fedi  $\alpha_{n-1}^-$  – összes csúcsát a  $-A_i$  kivételével, így az általuk meghatározott  $\alpha_{n-2}^i$   $(n-2)$ -dimenziós szimplexet is. Legyen  $B(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n})$  az  $\alpha_{n-1}^-$  szimplex középpontja. A  $B$  pont távolsága az  $A_i$  csúcsoktól:

$$|\overrightarrow{A_i B}| = \sqrt{1 + \frac{3}{n}}.$$

Akkor lesz az  $|\overrightarrow{A_i B}| \leq \sqrt{2}$ , ha

$$\sqrt{1 + \frac{3}{n}} \leq \sqrt{2},$$

azaz ha  $n \geq 3$ . Tehát ebben az esetben a  $B$  pontot fedik az  $A_i$  középpontú  $\sqrt{2}$  sugarú gömbök. Így a  $\text{conv}(B, \text{vert}(\alpha_{n-2}^i))$  szimplexet az  $A_i$  középpontú  $\sqrt{2}$  sugarú gömb fedi  $i = 1, 2, \dots, n$  esetén. Tehát az  $\alpha_{n-1}^-$  szimplex összes  $\alpha_{n-2}^i$  lapját és a  $B$  pontot fedik legalább egyszer az  $A_i$  középpontú gömbök, így magát az  $\alpha_{n-1}^-$  szimplexet is együtt fedik az  $A_i$  középpontú gömbök. Hasonlóan igazolható, hogy a  $\beta_n$  keresztpolitóp összes többi  $\alpha_{n-1}$  lapja is  $(n+1)$ -szer fedett és mivel a csúcsai körül rajzolt gömbök mind fedik az origót is, így a  $\beta_n$  keresztpolitópot is  $(n+1)$ -szer fedik a  $\sqrt{2}$  sugarú, csúcsai körül rajzolt gömbök.

**4.5. Lemma.** *A  $h\gamma_5$  testet 6-szor fedik az élével megegyező sugarú, csúcsai körül rajzolt gömbök.*

**Bizonyítás:** A fentiek alapján a  $h\gamma_5$  fél-kockának 10  $h\gamma_4$  és 16  $\alpha_4$  lapja van. Mivel  $h\gamma_4 \cong \beta_4$ , a 4.4 lemma alapján  $h\gamma_4$ -et 5-ször fedik a csúcsai körül rajzolt  $\sqrt{2}$  sugarú gömbök. Hasonlóan az  $\alpha_4$  szabályos szimplexet is 5-ször fedik a csúcsai körül rajzolt gömbök. Mivel minden gömb fedi a  $h\gamma_5$  középpontját is, így  $h\gamma_5$  testet is 5-ször fedik a csúcsai körül rajzolt  $\sqrt{2}$  sugarú gömbök.

A bizonyítás lényegi részét annak igazolása képezi, hogy egy adott laphoz nem tartozó csúcsok körül rajzolt gömbök együttesen még egyszer fedik az adott lapot és a test középpontját is, így  $h\gamma_5$  ténylegesen 6-szor fedett. Szokásos bázisban a  $h\gamma_5$  csúcsai:  $A_0(0,0,0,0,0)^T$ ,  $A_{12}(1,1,0,0,0)^T$ ,  $A_{13}(1,0,1,0,0)^T$ ,  $A_{14}(1,0,0,1,0)^T$ ,  $A_{23}(0,1,1,0,0)^T$ ,  $A_{24}(0,1,0,1,0)^T$ ,  $A_{34}(0,0,1,1,0)^T$ ,  $A_{15}(1,0,0,0,1)^T$ ,  $A_{25}(0,1,0,0,1)^T$ ,  $A_{35}(0,0,1,0,1)^T$ ,  $A_{45}(0,0,0,1,1)^T$ ,  $A_1(0,1,1,1,1)^T$ ,  $A_2(1,0,1,1,1)^T$ ,  $A_3(1,1,0,1,1)^T$ ,  $A_4(1,1,1,0,1)^T$ ,  $A_5(1,1,1,1,0)^T$ . Tekintsük a  $h\gamma_5$  10  $h\gamma_4$  lapja közül azt, melynek csúcsai:  $A_0$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{14}$ ,  $A_{23}$ ,  $A_{24}$ ,  $A_{34}$ ,  $A_5$ . Ennek középpontja  $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T$ . Erről a  $h\gamma_4$  lapról belátjuk, hogy a többi csúcs körül rajzolt gömbök még egyszer fedik. Mivel  $h\gamma_4$  lapjai 3-szimplexek,  $h\gamma_4$ -et további 16 különböző 4-szimplexekre tudjuk szétbontani az alábbi módon. Könnyen látható, hogy az  $A_0BA_{12}A_{13}A_{14}$  4-szimplex minden csúcsát, így magát a szimplexet is fedi az  $A_{15}$  középpontú gömb. Ezt az esetet is tartalmazó általános leíráshoz bevezetjük az  $I$  indexhalmazt. Legyen  $I = \{12,13,14,23,24,34\}$ . Tekintsük azt a négy  $A_0BA_iA_jA_k$  szimplexet, ahol  $i, j, k \in I$  és  $i, j, k$ -nak van közös számjegye, melyet  $l$ -lel jelölünk. Ebben az esetben az  $A_{15}$  középpontú  $\sqrt{2}$  sugarú gömb fedi ezt a szimplexet. Valóban hiszen a fenti  $A_i, A_j, A_k$  csúcsoknak egyik koordinátája közös  $A_{15}$ -tel, így különbségükben kettő 1 koordináta szerepel, tehát távolságuk  $\sqrt{2}$ .

Hasonlóan tekintsük azt a négy  $A_5BA_iA_jA_k$  szimplexet, ahol  $i, j, k \in I$  és  $i, j, k$  egyike se tartalmazza az  $l$  számjegyet, ahol  $l \in \{1,2,3,4\}$ . Ebben az esetben az  $A_l$  középpontú  $\sqrt{2}$  sugarú gömb fedi ezt a szimplexet. Valóban hiszen a fenti  $A_i, A_j, A_k$  csúcsoknak kettő közös koordinátája van  $A_l$ -lel, így különbségükben kettő 1 koordináta szerepel, tehát távolságuk  $\sqrt{2}$ .

A fennmaradó 8 3-szimplexet további részekre kell bontani, ezért legyenek  $B_1(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T$ ,  $B_2(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T$ ,  $B_3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)^T$ ,  $B_4(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)^T$  és

$C_1(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T$ ,  $C_2(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T$ ,  $C_3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0)^T$ ,  $C_4(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0)^T$ . Tekintsük azt a négy  $A_0BA_iA_jA_k$  szimplexet, ahol  $i, j, k \in I$  és  $i, j, k$  egyike se tartalmazza az  $l$  számjegyet, ahol  $l \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Ezen szimplexek mindegyike három  $A_0BB_lA_mA_n$  és egy  $BB_lA_iA_jA_k$  szimplexre bontható, ahol  $l$  fent definiált és  $m, n \in \{i, j, k\}$ . Jelölje  $p$  az  $m$  és  $n$  közös számjegyet. Ebben az esetben a fenti  $A_0BB_lA_mA_n$  szimplexeket az  $A_{p5}$  középpontú, a  $BB_lA_iA_jA_k$  szimplexet az  $A_l$  középpontú  $\sqrt{2}$  sugarú gömb fedi.

Tekintsük azt a négy  $A_5BA_iA_jA_k$  szimplexet, ahol  $i, j, k \in I$  és  $i, j, k$ -nak van közös számjegye, melyet  $l$ -lel jelölünk. Ezen szimplexek mindegyike három  $A_5BC_lA_mA_n$  és egy  $BC_lA_iA_jA_k$  szimplexre bontható, ahol  $l$  fent definiált és  $m, n \in \{i, j, k\}$ . Jelölje  $p$  azt a számjegyet, melyet  $m$  és  $n$  egyike se tartalmaz és  $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Ebben az esetben a fenti  $A_5BC_lA_mA_n$  szimplexeket az  $A_p$  középpontú, a  $BC_lA_iA_jA_k$  szimplexet az  $A_{l5}$  középpontú  $\sqrt{2}$  sugarú gömb fedi. Tehát összességében ez a  $h\gamma_4$  lap 6-szor fedett. Hasonlóan igazolható, hogy az összes  $h\gamma_4$  is 6-szor fedett.

A következőkben belátjuk, hogy az  $\alpha_4$  szabályos szimplex lapok is 6-szor fedettek. Tekintsük például az  $A_0A_{15}A_{25}A_{35}A_{45}$  szimplexet. Ez a csúcsai körül rajzolt gömbök segítségével 5-ször fedett. Belátjuk, hogy a csúcsaihoz nem tartozó gömbök is fedik még egyszer. A  $B(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5})^T$  középpontját az  $A_5$  csúcs kivételével  $h\gamma_5$  összes csúcsa körül rajzolt  $\sqrt{2}$  sugarú gömb fedi. Ezt az  $\alpha_4$  szabályos szimplexet 5 részsimplexre bontjuk, a lapjai és a  $B$  középpont felhasználásával. Tekintsük a  $BA_{15}A_{25}A_{35}A_{45}$  részsimplexet. Középpontja  $C(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1)^T$  segítségével további négy  $BCA_{i5}A_{j5}A_{k5}$  részre bontjuk, ahol  $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$  páronként különbözők. A kimaradó számot jelöljük  $l$ -lel. Ebben az esetben az  $A_l$  középpontú  $\sqrt{2}$  sugarú gömb fedi a fenti részt. Tehát a négy gömb együttesen fedi a  $BA_{15}A_{25}A_{35}A_{45}$  részsimplexet is.

A fennmaradó négy  $BA_0A_{i5}A_{j5}A_{k5}$  részsimplexet egységesen kezel-



jük, ahol  $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$  páronként különbözők. A kimaradó számot jelöljük  $l$ -lel. Legyenek  $C_1(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})^T$ ,  $C_2(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})^T$ ,  $C_3(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})^T$ ,  $C_4(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4})^T$ . A fenti  $BA_0A_{i5}A_{j5}A_{k5}$  részsziimplexet további négy részre bontjuk  $C_l$  segítségével, így a következő részeket kapjuk:  $BC_lA_0A_{j5}A_{k5}$ ,  $BC_lA_0A_{i5}A_{k5}$ ,  $BC_lA_0A_{i5}A_{j5}$ ,  $BC_lA_{i5}A_{j5}A_{k5}$ , melyeket rendre az  $A_{jk}$ ,  $A_{ik}$ ,  $A_{ij}$ ,  $A_l$  középpontú  $\sqrt{2}$  sugarú gömbök fednek. Így azt kaptuk, hogy az  $\alpha_4$  szabályos szimplex lapok is 6-szor fedettek.

Összességében tehát azt kaptuk, hogy  $h\gamma_5$  fél-kockának mind a  $h\gamma_4$ , mind az  $\alpha_4$  lapjait 6-szor fedik a  $h\gamma_5$  csúcsai körül rajzolt  $\sqrt{2}$  sugarú gömbök, melyek mind fedik a középpontját is, így magát a  $h\gamma_5$  fél-kockát is.

### Tömörség

A tétel kimondása előtt megadjuk az L-felbontás definícióját, mivel a bizonyítás kiindulópontját a  $D_n$  rács L-felbontása adja. Mint közismert az L-felbontás szoros kapcsolatban van a DV-cella felbontással és így a kvadratikus formákkal is (részletesen lásd: pl. [29], [8]).

**4.2. Definíció.** Tekintsük a  $\Sigma$  diszkrét ponthalmazt  $\mathbb{R}^n$ -ben. Azt a kompakt konvex politópot, melynek csúcsai a  $\Sigma$  ponthalmaz pontjai L-politópoknak nevezzük, ha létezik olyan gömb, melynek határa az L-politóp összes csúcsát tartalmazza, de belsejében  $\Sigma$ -nak egyetlen pontja sincs. Az L-politópok rendszere  $\mathbb{R}^n$ -nek egy konvex kövezését adja, melyet  $\Sigma$  L-felbontásának nevezünk.

**4.6. Tétel.**  $\kappa(n, 1, q) = \frac{1}{2}$ , ha  $n = 3, 4, 5$  és  $q \leq n + 1$  vagy  $n = 6, 7, 8$  és  $q \leq 6$  és ezekben az esetekben a  $D_n$  rács maximális tömörséget szolgáltat.

Megjegyezzük, hogy ez az eredmény felülmúlja az  $A_n$  rács segítségével elért eredményünket, de azt mégsem teszi feleslegessé két okból sem. Egyrészt a legtöbb esetben ez egy újabb pontrendszert szolgáltat, mely esetén a

tömörség maximális, persze távol állunk attól, hogy az összes pontrendszert megadjuk (lásd síkbeli esetet is). Másrészt viszont nagyon fontos következményt fogunk bizonyítani mind az  $A_7$ , mind a  $D_8$  rács esetén.

**Bizonyítás:** A  $D_n$  rács L-felbontása [8] alapján két különböző fajta testből áll: egyrészt  $h\gamma_n$ -ből, másrészt  $\beta_n$ -ből. Ezen testek élének a hossza a rács minimális vektorának hossza  $m$ . Tehát csak ezeknek a testeknek a megfelelő fedettségét kell belátni ahhoz, hogy a  $D_n$  rács középpontú  $m$  sugarú gömbök  $q$ -szorosán fedjék a teret.

Tekintsük először az  $n = 3$  esetet. Ekkor  $h\gamma_3 \cong \alpha_3$ , mely 4-szer fedett, valamint a 4.4 lemma alapján  $\beta_3$  is 4-szer fedett, így  $\mathbb{E}^3$  is, ahol a fedő gömbök középpontjai  $D_3$  rácspontjai.

Az  $n = 4$  esetben  $h\gamma_4 \cong \beta_4$ , így szintén a 4.4 lemma alapján  $\beta_4$  5-ször fedett, így  $\mathbb{E}^4$  is.

Az  $n = 5$  esetén  $h\gamma_5$  a 4.5 lemma alapján, míg  $\beta_5$  a 4.4 lemma alapján 6-szor fedett, így  $\mathbb{E}^5$  is.

Tekintsük az  $n = 6, 7, 8$  eseteket. Nyilvánvalóan  $\beta_n$  ezekben az esetekben legalább 6-szor fedett. A  $h\gamma_n$  6-szoros fedettségét indukcióval bizonyítjuk. Az  $n = 5$  esetén a 4.5 lemma alapján teljesül az állítás. Mivel  $h\gamma_n$   $(n-1)$ -lapjai  $h\gamma_{n-1}$  és  $\alpha_{n-1}$ , az indukciós feltevés alapján, valamint, hogy  $\alpha_n$  szimplex  $(n+1)$ -szer fedett, 6-szor fedettek, így ha van olyan belső pontja  $h\gamma_n$ -nek, melyet a csúcsai körül rajzolt gömbök mind fednek, akkor  $h\gamma_n$  is 6-szor fedett. Ilyen pont sajnos csak 8-dimenzióig létezik, mégpedig a  $\gamma_n$  kocka középpontja. Tehát állításunkat igazoltuk.

**4.7. Tétel.**  $\kappa(7, 1, q) = \frac{1}{2}$ , ha  $q \leq 10$  és  $\kappa(8, 1, q) = \frac{1}{2}$ , ha  $q \leq 12$  és ezekben az esetekben az  $E_7$ , ill.  $E_8$  rács maximális tömörséget szolgáltat.

**Bizonyítás:** A 4.2 lemma bizonyítása során láttuk, hogy csak  $n \leq 7$  esetben szolgáltatta a maximális tömörséget az  $A_n$  rács. Az  $n > 7$  esetben az  $A_n$

rács  $\mathcal{P}^n$  alapparallelepipedonjának a középpontját egyik csúc körül rajzolt egység sugarú gömb se fedte. Az  $n = 7$  esetben az  $A_7$  rács  $\mathcal{P}^7$  parallelepipedonjának a  $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$  középpontja pont egységnyi távolságra van a  $P$  pontoktól, ahol  $P \in H_3$  vagy  $P \in H_4$  és  $P \in \mathcal{P}^7$ . Ezen  $P$  pontok száma 70. Ha tekintjük az  $A_7^+ = A_7 \cup (K + A_7)$  rácsot, mely megengedett bővítése az  $A_7$  rácsnak, akkor ennek a minimális vektorai egyrészt  $A_7$  minimumai: a fenti  $\mathbf{a}_i$  bázisvektorok, ahol  $i = 1, 2, \dots, 7$  és ezek ellentettjei, az  $\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j$  vektorok, ahol  $i, j \in \{1, 2, \dots, 7\}$  és páronként különbözők, valamint a fenti 70 különböző  $\overrightarrow{PK}$  vektor. Több minimális vektor nem is lehet, hiszen a bázisvektorok és ellentettjeik száma 14, a fenti  $\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j$  vektorok száma 42, így összesen 126 minimális vektor van, mely 7 dimenziós rács esetén a lehető legtöbb és csak az  $E_7$  rács esetén áll fenn [8]. Így  $E_7 \cong A_7^+ = A_7 \cup (K + A_7)$ , tehát az  $E_7$  középpontú gömbök legalább kétszer olyan sűrűn fedik a teret, mint az  $A_7$  középpontúak, azaz sikerült legalább 10-szeres fedettséget bizonyítani az  $E_7$  rács segítségével.

A másik eset bizonyítása egyszerűbb, hiszen közismert [8], hogy  $D_8^+ = E_8$ , így az  $E_8$  középpontú gömbök legalább kétszer olyan sűrűn fedik a teret, mint a  $D_8$  középpontúak, azaz legalább 12-szer. Q.e.d.

A nevezetes rácsok közül 8-dimenzióig az  $E_6$  rácsról nem szóltunk. Az 1. fejezetben láttuk, hogy az  $E_6$  rács is előállítható, mint egy másik rács 3-indexű megengedett bővítése. Sajnos ezzel a konstrukcióval sem sikerült a  $D_6$  segítségével elért eredményt túlszárnyalni. Megjegyezzük még, hogy az eddigi rácsok esetén azt nem bizonyítottuk, hogy többszörös fedettség nem lehetséges, így lehetséges, hogy a vizsgált rácsok más  $\langle p, q \rangle$ -pontrendszerre is a maximális tömörséget adják. A következő tételben szereplő rácsok esetén csak 2-szeres fedettséget bizonyítunk. Nyilvánvalóan látszik, hogy a legtöbb esetben többszörös fedettség is fennáll és 8-dimenzióig a legtöbb esetben

többszörös fedettséget is igazoltunk, de magasabb dimenziókban ez további kutatást igényel.

A következőkben J.H. CONWAY-N.J.A. SLOANE [8] alapján bevezetjük a laminált rács fogalmát és ismertetjük néhány tulajdonságát.

**4.3. Definíció.** Legyen a  $\Lambda_0$  rács egy pont. Az  $n \geq 1$  esetben tekintsük az összes olyan rácsot, melynek minimuma 2 és melynek van legalább egy  $\Lambda_{n-1}$  részrácsa. Ezek közül a  $\Lambda_n$  *laminált rács* egy olyan rács, melynek a determinánsa minimális.

Megjegyezzük, hogy az eddigiekben is beszéltünk a rács rétegeiről, de a fenti definíció alapján a laminált rács egy speciális rács, mely amellettt hogy az összes többi rácshoz hasonlóan rétegekből is felépíthető, további feltételeket is kielégít. Az egyes rétegeket  $\Lambda_{n-1}^{(i)}$ -vel jelöljük. Ekkor  $\Lambda_n = \dots \cup \Lambda_{n-1}^{(-1)} \cup \Lambda_{n-1}^{(0)} \cup \Lambda_{n-1}^{(1)} \dots$ . A szomszédos rétegek távolsága legyen  $d_{n-1}$ . Jelölje  $h_{n-1}$  a  $\Lambda_{n-1}^{(i)}$  rácspontoktól a hipersíkjában lehető legnagyobb távolságra lévő pont távolságát, azaz a DV-cella legtávolabbi csúcsának és a középpontjának a távolságát. Ekkor  $n \leq 48$  dimenzióig  $d_{n-1}^2 + h_{n-1}^2 = 4$  teljesül [8]. Ez azt jelenti, hogy geometriailag a laminált rácsok  $n \leq 48$  dimenzióig úgy épülnek fel az eggyel alacsonyabb dimenziós  $\Lambda_{n-1}^{(i)}$  rácsokból, mint rétegekből, hogy a  $\Lambda_{n-1}^{(i+1)}$  réteg egy rácspontjának a merőleges vetülete a  $\Lambda_{n-1}^{(i)}$  rács rácspontjaitól lehető legtávolabbi lévő pontba esik. Általánosan ez nincs bizonyítva, de elég erős a sejtés, hogy ez minden dimenzióban teljesül (lásd: [8]). A továbbiakban tekintsük az  $n \leq 48$  dimenziós  $\Lambda_n$  laminált rácsokat. Vegyük a  $\Lambda_{n-1}^{(i)}$  DV-cella felbontását. Mivel rácsról van szó a DV-cellák egybevágóak, így elegendő csak egyet vizsgálni. Jelöljük a  $P$  ponthoz tartozó DV-cellát  $DV^{n-1}(P)$ -vel. Vetítsük ezt a cellát a  $\Lambda_{n-1}^{(i+1)}$  rétegbe. A vetületet jelölje  $DV^{n-1}(P)'$ . A  $DV^{n-1}(P)'$  cellák, ahol a  $P \in \Lambda_{n-1}^{(i)}$  a  $\Lambda_{n-1}^{(i+1)}$  rács által generált  $(n-1)$ -dimenziós hipersíknak is egy cella felbontását adják. A  $P$  középpontú kettő egység sugarú gömbök tel-

jesen fedik a  $DV^{n-1}(P)'$  cellát, hiszen a  $P$  ponttól a  $DV^{n-1}(P)$  legtávolabbi csúcsa  $h_{n-1}$  távolságra van és a két réteg távolsága  $d_{n-1}$ , így a  $DV^{n-1}(P)'$  cella legtávolabbi csúcsa kettő egység távolságra van. Tehát a  $P$  középpontú gömbök fedik a  $DV^{n-1}(P)$  és a  $DV^{n-1}(P)'$  által meghatározott egyenes hasábot. Mivel ez minden  $P$  pontra teljesül, így a  $\Lambda_{n-1}^{(i)}$  rács pontjai körül rajzolt 2 egység sugarú gömbök legalább egyszer fedik a  $\Lambda_{n-1}^{(i)}$ , ill.  $\Lambda_{n-1}^{(i+1)}$  rácsok által meghatározott hipersíkokkal közrezárt sávot. Hasonlóan a  $\Lambda_{n-1}^{(i+1)}$  rács pontjai körül rajzolt 2 egység sugarú gömbök is legalább egyszer fedik ezt a sávot. Tehát legalább 2-szer fedett minden sáv, így az  $n$ -dimenziós tér is. Nyilvánvaló, hogy az egység sugarú gömbök elhelyezést alkotnak, így teljesül a következő tétel:

**4.8. Tétel.**  $\kappa(n,1,2) = \frac{1}{2}$ , ha  $n \leq 48$  és ezekben az esetekben a  $\Lambda_n$  laminált rács maximális tömörséget szolgáltat.

A következő tételben összefoglaljuk a magasabb dimenziókban nem feltétlenül rácsszerű esetben elért eddigi eredményeinket. A maximális tömörséget persze mint fentebb láttuk mindig rács esetén realizáltuk.

**4.9. Tétel.**  $\kappa(n,1,2) = \frac{1}{2}$ , ha  $n \leq 48$ ;

$\kappa(n,1,3) = \frac{1}{2}$ , ha  $2 \leq n \leq 8$ ;

$\kappa(n,1,4) = \frac{1}{2}$ , ha  $3 \leq n \leq 8$ ;

$\kappa(n,1,5) = \frac{1}{2}$ , ha  $4 \leq n \leq 8$ ;

$\kappa(n,1,6) = \frac{1}{2}$ , ha  $5 \leq n \leq 8$ ;

$\kappa(n,1,7) = \kappa(n,1,8) = \kappa(n,1,9) = \kappa(n,1,10) = \frac{1}{2}$ , ha  $n = 7, 8$  és

$\kappa(8,1,11) = \kappa(8,1,12) = \frac{1}{2}$ .

### 4.3. Pontrendszerek síkban

A következőkben néhány síkbeli eredményt ismertetünk több okból is. Egyrészt mert kiindulópontjai voltak a magasabb dimenziós eseteknek. Másrészt, hogy lássuk síkban rácsszerű esetben sem egyszerű a maximális tömörség meghatározása, valamint azon rácso ill., általános pontrendszerek megadása, mely esetén a tömörség maximális. Ehhez kapcsolódóan néhány fogalmat vezetünk be.

Egy  $\Lambda$  rács Minkowski szerint redukált, ha  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  bázisvektorai eleget tesznek a következő egyenlőtlenségeknek:

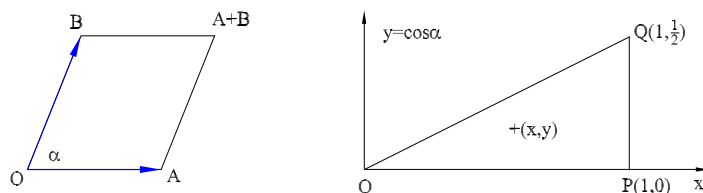
$$|\mathbf{a}| \leq |\mathbf{b}| \leq |\mathbf{b} - \mathbf{a}|, (AOB)\angle \leq \frac{\pi}{2}.$$

Bevezetve az  $x = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$ ,  $\alpha = (AOB)\angle$ ,  $y = \cos \alpha$  jelöléseket, a következő fentiekkel ekvivalens egyenlőtlenségeket kapjuk:

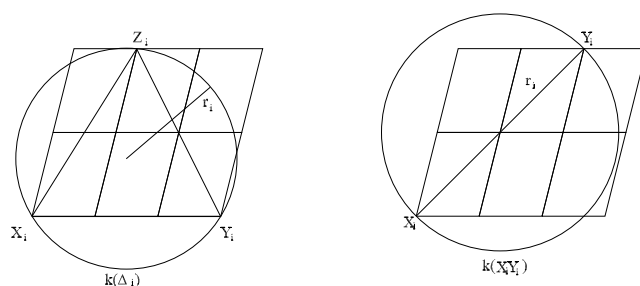
$$0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{x}{2}.$$

Bármely rács esetén megválaszthatók a bázisvektorok úgy, hogy a fenti feltételeknek eleget tegyenek. Így minden Minkowski redukált rácshoz hozzárendelhetünk egy  $(x, y)$  rendezett számpárt és minden  $(x, y) \neq (0, 0)$  rendezett számpárnak (hasonlóság erejéig) megfeleltethetünk egy Minkowski redukált rácsot. Így a Minkowski redukált rácso és az  $OPQ$  háromszög  $O$ -tól különböző pontjai között hasonlóság erejéig egy-egy értelmű megfeleltetés létesíthető, ahol  $O(0, 0)$ ,  $P(1, 0)$ ,  $Q(1, \frac{1}{2})$ .

A nem kollineáris  $O, X, Y$  rácspontok által meghatározott háromszöget  $\Delta_i$ -vel, a  $\Delta_i$  köré írt zárt körlemez  $k_i(\Delta_i)$ -vel, határát  $\bar{k}_i$ -vel, sugarát elhelyezés esetén  $r_i$ -vel, fedés esetén  $R_i$ -vel jelöljük. Az  $X_i Y_i$  átmérőjű zárt körlemez  $k_i(X_i Y_i)$ -vel, határát  $\bar{k}_i$ -vel, sugarát  $r_i$ -vel ill.,  $R_i$ -vel jelöljük. Az  $r_i$  sugarú köröknek egy rácsszerű  $p$ -szeres elhelyezését  $L(\Lambda, r_i)$ -vel jelöljük.



4.2. ábra.



4.3. ábra.

Tekintsük a  $\Delta_i$  rácsháromszög köré írt  $k_i(\Delta_i)$  kört, ill. az  $X_i Y_i$  szakasz fölé írt  $k_i(X_i Y_i)$  kört, mely  $p$ -szeres elhelyezést alkot. Ez a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

**p1**  $\Delta_i$  nem tompaszögű

**p2**  $k_i(\Delta_i)$ , ill.  $k_i(X_i Y_i)$  zárt körlemez legalább  $p+1$  rácspontot tartalmaz

**p3** a  $\Delta_i$  köré, ill.  $X_i Y_i$  fölé rajzolt nyílt körlemez legfeljebb  $p-2$ , ill.  $p-1$  rácspontot tartalmaz

H. TEMESVÁRI Á., HORVÁTH J., N. N. YAKOVLEV bizonyították [57]-ben, hogy ha adott rács esetén  $k_i$  minimális sugarú a **p1**, **p2**, **p3** tulajdonságokkal rendelkező rácskörök között, akkor  $L(\Lambda, r_i)$   $p$ -szeres körelhelyezés és  $r > r_i$

esetén  $L(\Lambda, r)$  nem alkot  $p$ -szeres elhelyezést. Az ilyen tulajdonságú kört  $k_i^p$ -vel, sugarát  $r_i^p$ -vel jelöljük. Tehát ebben az esetben  $r_p = \sup r = r_i^p$ .

Így az  $OPQ$  háromszögnek létezik olyan felosztása  $H_i^p$  tartományokra, melyre a következők teljesülnek: 1. A teljes  $H_i^p$  tartományhoz megadható egy fenti tulajdonságokkal bíró  $k_i^p$  kör, ill. ezt meghatározó rácsháromszög vagy rácsszakasz. 2. Bármely két tartománynak nincs közös belső pontja és bármely  $O$ -tól különböző pont legalább egy tartományhoz tartozik. 3. A tartományok és a határgörbék száma is véges. 4. A határgörbékre  $r_i^p = r_j^p$  teljesül.

Hasonlóan ha a  $\Delta_i$  rácsháromszög köré írt  $k_i(\Delta_i)$  kör  $q$ -szoros fedést alkot, akkor a következő tulajdonságok teljesülnek:

**q1**  $\Delta_i$  nem tompaszögű

**q2**  $k_i(\Delta_i)$  zárt körlemez legalább  $q+2$  rácspontot tartalmaz

**q3** a  $\Delta_i$  köré rajzolt nyílt körlemez legfeljebb  $q-1$  rácspontot tartalmaz

H. TEMESVÁRI Á. [55]-ben igazolta, hogy ha adott rács esetén  $k_i$  maximális sugarú a **q1**, **q2**, **q3** tulajdonságokkal rendelkező rácskörök között, akkor  $L(\Lambda, R_i)$   $q$ -szoros körfedés és  $R < R_i$  esetén  $L(\Lambda, R)$  nem alkot  $q$ -szoros fedést. Az ilyen tulajdonságú kört  $k_i^q$ -vel, sugarát  $R_i^q$ -vel jelöljük. Tehát ebben az esetben  $R_q = \inf R = R_i^q$ .

Így az  $OPQ$  háromszögnek létezik olyan felosztása  $H_i^q$  tartományokra, melyre a következők teljesülnek: 1. A teljes  $H_i^q$  tartományhoz megadható egy fenti tulajdonságokkal bíró  $k_i^q$  kör, ill. ezt meghatározó rácsháromszög. 2. Bármely két tartománynak nincs közös belső pontja és bármely  $O$ -tól különböző pont legalább egy tartományhoz tartozik. 3. A tartományok és a határgörbék száma is véges. 4. A határgörbékre  $R_i^q = R_j^q$  teljesül.

Tehát ha tekintjük a  $H_i^p \cap H_j^q = H_{ij}$  halmazt és az így adódó felosztást, akkor az  $\frac{r_p}{R_q}$  meghatározásához meg kell adni az  $\frac{r_i^p}{R_j^q}$  hányados maximumát a



$H_{ij}$  tartományon és ezen maximumok közül kell kiválasztani a legnagyobbat. Mivel  $\frac{r_i^p}{R_j^q}$  körsugarak hányadosa csak  $x$  és  $y$  függvénye, így feladatunk véges tartományon kétváltozós függvények maximumának a meghatározása. Ha, mint a későbbiekben látni fogjuk, a rácsokra bizonyos rácstranzformációkat hajtunk végre a maximum a határgörbék mentén adódik, így csak egyváltozós függvények maximumát kell vizsgálnunk.

Ezt a módszert követve, ill. felhasználva [61], [62]-ben szereplő  $k_i^p$  és  $k_i^q$  lehetséges rácskörökre vonatkozó tételeket [58]-ban meghatároztuk  $\langle p, q \rangle$  pontrendszerek tömörségét a következő esetekben:  $p = 5$  és  $q = 1, 2, 3, 4$  értékekre H. TEMESVÁRI Á.,  $p = 1, 2, 3, 4$  és  $q = 5$  értékekre VÉGH A. Ezt az alábbi tételben foglaljuk össze, ahol  $\kappa(p, q)$  jelöli a maximális tömörséget és zárójelben megadtuk azt a rácsot  $((x, y)$  jellemzőivel), mely esetén a maximális tömörség fellép:

**4.10. Tétel.** (H. TEMESVÁRI Á., VÉGH A. [58])

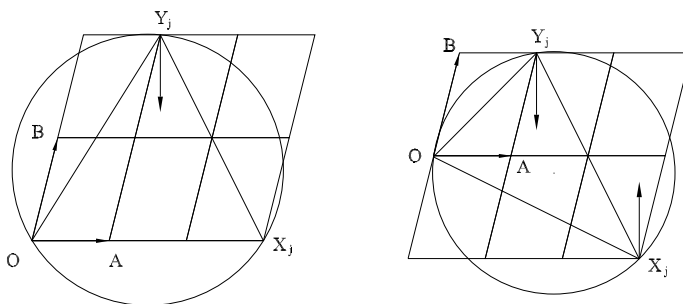
$$\begin{aligned} \kappa(1,5) &= \sqrt{\frac{1}{7}} \left( (x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \right), \\ \kappa(2,5) &= \sqrt{4 \frac{15-2\sqrt{46}}{(18-2\sqrt{46})^2}} \left( (x, y) = \left(\sqrt{14-2\sqrt{46}}, 0\right) \right), \\ \kappa(3,5) &= \sqrt{\frac{7}{16}} \left( (x, y) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \right), \\ \kappa(4,5) &= \sqrt{\frac{4}{7}} \left( (x, y) = \left(\sqrt{\frac{1}{12}}, 0\right) \text{ vagy } (x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \right), \\ \kappa(5,1) &= \sqrt{\frac{7}{2}} \left( (x, y) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \right), \\ \kappa(5,2) &= \frac{\sqrt{7}}{2} \left( (x, y) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \right), \\ \kappa(5,3) &= \frac{3\sqrt{2}}{4} \left( (x, y) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \text{ vagy } (x, y) = \left(1, \frac{1}{8}\right) \right), \\ \kappa(5,4) &= \sqrt{\frac{9(1+\bar{y})}{2(5+4\bar{y})}} \left( (x, y) = (1, \bar{y}) \right), \text{ ahol } \bar{y} \text{ a } 68y^3 - 3y^2 - 66y + 5 = 0 \text{ egyenlet} \\ &\text{megoldása az } y \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ intervallumon.} \end{aligned}$$

A következőkben az általános módszer adta lehetőségeket kihasználva, az  $\langle 1, q \rangle$  és  $\langle 3, q \rangle$ , ahol  $q \in \mathbb{Z}^+$ , pontrendszerek esetén leszűkítjük azoknak a rácsoknak a halmazát, melyek esetén a tömörség maximális lehet. Bevezetjük

a szintegyenes fogalmát.  $O$ -szintegyenesnek nevezzük az  $\mathbf{a}$  bázisvektor irányú  $O$  ponton átmenő rácsegyenest.  $j$ -szintegyenesnek nevezzük a  $j\mathbf{b}$  vektor végpontján áthaladó  $\mathbf{a}$ -val párhuzamos rácsegyenest.

**4.11. Lemma.** *Legyen  $t_1$  olyan rácstranzformáció, mely az  $O$ -szintegyenest fixen hagyja,  $B$ -t pedig az  $O$ -szintegyenes irányába, arra merőlegesen mozgatja. Ha egy tetszőleges  $\Delta_i$  hegyesszögű rácsháromszög köré írt kör sugara  $R_i$ , akkor a  $t_1$  tranzformáció alkalmazása során  $|\mathbf{a}|$  állandó és  $R_i$  csökken.*

**Bizonyítás:** Ha a  $\Delta_i$  háromszögnek van kettő olyan csúcsa, mely azonos szintegyenesen van, akkor a háromszöget el lehet úgy tolni, hogy egyik csúcsa  $O$ -ba essen másik pedig az  $O$ -szintegyenesre. Mivel  $\Delta_i = OXY$  hegyesszögű, így a  $t_1$  alkalmazása során  $Y$  a  $\Delta_i$  háromszög belsejébe kerül, így  $R_i$  csökken és  $|\mathbf{a}|$  állandó marad. Ha  $\Delta_i$  rácsháromszög csúcsai különböző szintegyene-



4.4. ábra.

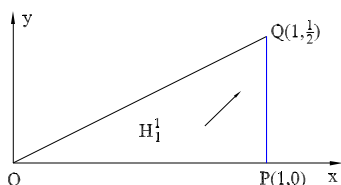
seken vannak, akkor  $\Delta_i$ -t szintén el lehet úgy tolni, hogy egyik csúcsa  $O$ -ba essen és az  $O$ -szintegyenes messe az  $O$ -val szemközti oldalt. Tükrözzük az  $O$ -szintegyenest a  $k(\Delta_i)$  kör középpontjára, így az  $\bar{o}$  egyenest kapjuk. Az  $X$  és  $Y$  pontok nem esnek bele az  $O$ -szintegyenes és a  $\bar{o}$  egyenes által közrezárt sávba és ennek a sávnak a különböző oldalain fekszenek, különben  $\Delta_i$  nem lenne

hegyesszögű. Ha a  $t_1$  transzformációt alkalmazzuk  $Y$  az  $O$ -szintegyenesre merőlegesen,  $X$  az  $\bar{o}$  egyenesre merőlegesen a rácskör belsejébe kerülnek, így  $R_i$  csökken, miközben  $|\mathbf{a}|$  állandó marad. Így bizonyítottuk a lemmát.

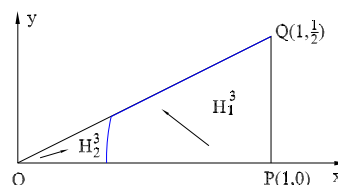
**4.12. Tétel.** ([58]) *Tekintsük azt a  $\langle p, q \rangle$  pontrácsot, ahol  $p = 1$  és  $q \in \mathbb{Z}^+$ . A pontrácsok tömörségeinek szuprémuma csak olyan rácsokra állhat fenn, melyre  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ , azaz  $x = 1$  teljesül.*

**Bizonyítás:** Tekintsük az  $OPQ$  háromszög rácsszerű egyszeres extrémális elhelyezéshez tartozó felosztását. Könnyen látható, hogy a teljes  $OPQ$  háromszögben a  $k(O, A)$  kör minimális sugarú. Valamint tekintsük az  $OPQ$  háromszög rácsszerű  $q$ -szoros extrémális fedéshez tartozó felosztását. A fenti általános módszer alapján a  $\langle p, q \rangle$  pontrács tömörségének szuprémuma megegyezik a rácsszerű extrémális  $p$ -szoros elhelyezéshez, valamint  $q$ -szoros fedéshez tartozó egyesített felosztásban szereplő  $H_{ij}$  tartományokon az  $\frac{r_i}{R_j}$  által meghatározott kétváltozós függvények abszolút maximumával. Tekintsük esetünkben a  $p = 1, q \in \mathbb{Z}^+$ -ra az egyesített felosztást. Bármely  $H_{ij}$  tartományon alkalmazva a 4.11 lemmában adott  $t_1$  transzformációt,  $r_i$  nem változik, hiszen az  $|\mathbf{a}|$  állandó,  $R_j$  viszont a lemma alapján csökken, tehát  $\frac{r_i}{R_j}$  nő. Így két eset lehet. Vagy másik tartománnyal közös határra értünk és ekkor újra az új rácsháromszögre alkalmazzuk a  $t_1$  transzformációt és így tovább növeljük a  $\frac{r_i}{R_j}$  értékét. Vagy az  $OPQ$  háromszög határára értünk. Látható, hogy a  $t_1$  transzformáció alkalmazása során a bázisvektorok által bezárt  $\alpha$  szög csökken, így  $y$  értéke nő, valamint mivel  $|\mathbf{b}|$  csökken, így  $x$  is nő. Tehát az  $OP$  határra nem érhattünk. Mivel az  $OQ$  határon  $|\mathbf{b}| = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$ , így itt is alkalmazható a  $t_1$  transzformáció, míg  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$ -t el nem érjük. Tehát összességében a  $QP$  határra vezet a  $t_1$  transzformáció alkalmazása, ahol  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ , azaz  $x = 1$ . Mivel a  $t_1$  transzformációt alkalmazva  $\frac{r_i}{R_j}$  értéke monoton nőtt, így a tömörség maximális értéke csak  $x = 1$  esetén adódhat. Így

bizonyítottuk az állítást.



Extremális  $\langle 1, q \rangle$  pontrácsok



Extremális  $\langle 3, q \rangle$  pontrácsok

4.5. ábra.

A továbbiakban az  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  vektor végpontját jelölje  $C$ .

**4.13. Lemma.** *Legyen  $t_2$  olyan rácstranzformáció, mely az  $f = OC$  egyenest fixen hagyja,  $B$  rácspontot pedig az  $f$  egyenes irányába, arra merőlegesen mozgatja. Ha egy tetszőleges  $\Delta_i$  hegyesszögű rácsháromszög köré írt kör sugara  $R_i$ , akkor a  $t_2$  tranzformáció alkalmazása során  $|\overline{OC}|$  állandó és  $R_i$  csökken.*

**Bizonyítás:** A  $\Delta_i$  háromszöget el lehet úgy tolni, hogy egyik csúcsa  $O$ -ba essen. Ha eközben egy másik csúcs az  $f$  egyenesre kerül, akkor a  $t_2$  tranzformációt alkalmazva a harmadik csúcs a  $\Delta_i$  háromszög belsejébe esik, hiszen a háromszög hegyesszögű és így  $R_i$  csökken, miközben  $|\overline{OC}|$  állandó marad.

Ha  $\Delta_i = OXY$  rácsháromszög  $X$  és  $Y$  csúcsa sem esik az  $f$  egyenesre, akkor  $\Delta_i$ -t szintén el lehet úgy tolni, hogy egyik csúcsa  $O$ -ba essen és az  $f$  egyenes messe az  $O$ -val szemközti oldalt. A 4.11 lemmához hasonlóan tükrözzük az  $f$  egyenest a  $k(\Delta_i)$  kör középpontjára, így az  $\bar{f}$  egyenest kapjuk. Az  $X$  és  $Y$  pontok nem esnek bele az  $f$  az  $\bar{f}$  egyenesek által közrezárt sávba és ennek a sávnak a különböző oldalain fekszenek, különben  $\Delta_i$  nem lenne hegyesszögű. Ha a  $t_2$  tranzformációt alkalmazzuk,  $Y$  az  $f$  egyenesre merőlegesen,  $X$  az

$\bar{f}$  egyenesre merőlegesen a rácskör középpontjához közelebb kerülnek, így  $R_i$  csökken, miközben  $|\overline{OC}|$  állandó marad. Így bizonyítottuk a lemmát.

**4.14. Lemma.** *A  $t_2$  transzformáció alkalmazása során  $y$  nő, miközben  $x$  vagy csökken vagy  $x = 1$ .*

**Bizonyítás:** Tekintsük először azt az esetet, ha  $x = 1$ . Ekkor  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ . Tehát az  $OBC$  háromszög egyenlőszárú, mely a  $t_2$  transzformáció alkalmazása során szintén egyenlőszárú marad, így  $x$  nem változik, viszont  $\alpha$  csökken, azaz  $y = \cos \alpha$  nő.

Ha  $x \neq 1$ , akkor  $|\mathbf{a}| < |\mathbf{b}|$ . Jelölje  $M$  az  $OBC$  háromszög  $B$ -ből induló magasságának a talppontját. Legyenek  $|\overline{BM}| = m$ ,  $|\overline{CM}| = k$ ,  $|\overline{OM}| = l$ . Ekkor

$$x = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\sqrt{m^2 + k^2}}{\sqrt{m^2 + l^2}} = \sqrt{\frac{m^2 + l^2 - l^2 + k^2}{m^2 + l^2}} = \sqrt{1 + \frac{-l^2 + k^2}{m^2 + l^2}}.$$

Az átalakítás után látható, hogy ha  $m$  csökken, akkor  $k$  és  $l$  állandó volta miatt  $x$  is csökken.

**4.15. Tétel.** ([58]) *Tekintsük azt a  $\langle p, q \rangle$  pontrácsot, ahol  $p = 3$  és  $q \in \mathbb{Z}^+$ . A pontrácsok tömörségeinek szuprémuma csak olyan rácsokra állhat fenn, melyre  $y = \frac{x}{2}$ , ahol  $x \in \left[\sqrt{\frac{1}{7}}, 1\right]$  vagy  $y = \frac{8x^2 - 1}{2x}$ , ahol  $x \in \left[\sqrt{\frac{1}{8}}, \sqrt{\frac{1}{7}}\right]$ .*

**Bizonyítás:** A Tekintsük az  $OPQ$  háromszög rácsszerű 3-szoros extrémális elhelyezéshez tartozó felosztását. [61], ill. [62]-ben bizonyítottuk, hogy a felosztás a következő két tartományból áll:

$$H_1^3 = \left\{ (x, y) \mid x \in \left[ \sqrt{\frac{1}{8}}, \sqrt{\frac{1}{7}} \right], y \in \left[ 0, \frac{8x^2 - 1}{2x} \right] \text{ vagy } x \in \left[ \sqrt{\frac{1}{7}}, 1 \right], y \in \left[ 0, \frac{x}{2} \right] \right\}$$

$$H_2^3 = \left\{ (x, y) \mid x \in \left[ \sqrt{\frac{1}{8}}, \sqrt{\frac{1}{7}} \right], y \in \left[ \frac{8x^2 - 1}{2x}, \frac{x}{2} \right] \text{ vagy } x \in \left[ 0, \sqrt{\frac{1}{8}} \right], y \in \left[ 0, \frac{x}{2} \right] \right\}$$

A  $H_1^3$  tartományon a  $k_1 = k(O, C)$  kör, a  $H_2^3$  tartományon a  $k(O, 3A)$  kör minimális sugarú, ahol  $C$  fent definiált,  $3A$  pedig a  $3\overrightarrow{OA}$  végpontja. Az  $OPQ$

háromszög rácsszerű  $q$ -szoros extrémális fedéséhez tartozó tartományok legyenek  $H_j^q$ -k. A fenti általános módszer alapján a  $\langle p, q \rangle$  pontrács tömörségének szuprémuma megegyezik a rácsszerű extrémális  $p$ -szeres elhelyezéshez, valamint  $q$ -szoros fedéshez tartozó egyesített felosztásban szereplő  $H_{1j}$ , ill.  $H_{2j}$  tartományokon az  $\frac{r_i}{R_j}$  által meghatározott kétváltozós függvények abszolút maximumával.

Egyrészt bármely  $H_{1j}$  tartományon alkalmazva a 4.13 lemmában adott  $t_2$  transzformációt,  $r_i$  nem változik, hiszen az  $|\overline{OC}|$  állandó,  $R_j$  viszont a lemma alapján csökken, tehát  $\frac{r_i}{R_j}$  nő. Hasonlóan a 4.12 tételhez, ha a  $H_{1j}$  tartomány határához érünk a szomszédos tartomány pontjainak megfelelő rácstra alkalmazzuk a  $t_2$  transzformációt, így végül a  $H_1^3$  tartomány határára érünk. A 4.14 lemmából következik, hogy a  $t_2$  transzformáció alkalmazása során  $y$  nő, miközben  $x$  csökken vagy  $x = 1$ . Tehát vagy az  $y = \frac{8x^2-1}{2x}$ , ahol  $x \in \left[\sqrt{\frac{1}{8}}, \sqrt{\frac{1}{7}}\right]$  vagy az  $y = \frac{x}{2}$ , ahol  $x \in \left[\sqrt{\frac{1}{7}}, 1\right]$  határgörbe pontjaihoz értünk.

Másrészt minden  $H_{2j}$  tartományon a  $t_1$  transzformációt alkalmazva a 4.12 tételhez hasonlóan a 4.11 lemma alapján könnyen látható, hogy  $\frac{r_i}{R_j}$  a  $H_2^3$  tartományon a  $y = \frac{8x^2-1}{2x}$ , ahol  $x \in \left[\sqrt{\frac{1}{8}}, \sqrt{\frac{1}{7}}\right]$  határgörbe pontjaiban lehet maximális, hiszen a transzformáció alkalmazása során  $r_i$  állandó,  $R_i$  nő,  $y$  nő,  $x$  nő, így bizonyítottuk az állításunkat.

A fenti két tételben  $\langle 1, q \rangle$  és  $\langle 3, q \rangle$  pontrácsok esetén leszűkítettük azon rácscok halmazát, melyek esetén a tömörség maximális lehet. A [37]-beli eredmény alapján  $\langle 1, q \rangle$  pontrácsra vonatkozó eredmény tovább általánososan nem javítható, hiszen  $\langle 1, 2 \rangle$  pontrács esetén a tömörség mindig maximális, ha  $x = 1$ . Nem rácsszerű esetben további pontrendszerek (Pl. a  $(3, 3, 3, 4, 4)$ , ill. a  $(3, 3, 4, 3, 4)$  mozaik ezek bizonyos affin képei, stb.) esetén is maximális lesz a tömörség. Tehát még síkbeli esetben is az összes  $\langle 1, 2 \rangle$ , ill. az  $\langle 1, q \rangle$  pontrendszerek megadása még inkább nehéz feladat. A magasabb dimenziós esetekről

nem is beszélve. Ezekben az esetekben az összes olyan pontrendszer megadása, mely esetén a tömörség maximális szinte lehetetlennek tűnik. A dolgozatban csak a speciális rácsokhoz kapcsolódóan vizsgáltuk ezt a témakört. A síkbeli eset rövid vizsgálatát a nehézségek bemutatása végett fűztük hozzá.

A fentiekhez szorosan kapcsolódik még, de a dolgozat többi részétől távol esik, hogy a nagyon egyszerű 4.1 lemma hiperbolikus és szférikus geometriában is teljesül és pl. a gömbön a  $(3,4,3,4)$  mozaik, ill. hiperbolikus síkon a megfelelő  $(3,3,3,4,3,4)$  ill. nagyon sok más mozaik maximális tömörséget szolgáltat  $\langle 1,2 \rangle$  és  $\langle 1,3 \rangle$  pontrendszer esetén is. Tehát ezen lemma adta lehetőségek további kutatást igényelnek.

# Irodalomjegyzék

- [1] A.D. Aleksandrov, On filling of space by polytopes, *Vestnik Leningradskogo Univ., Ser. math, phys. and chem.* **9** (1954) 33-43. (in Russian)
- [2] E.P. Baranovskii, S.S. Ryshkov, Derivation of perfect lattices from admissible centerings, *Russian Math. Survey* **40,4** (1985), 155-156.
- [3] E.S. Barnes, The complete enumeration of extreme senary forms, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **249** (1957), 461-506.
- [4] C. Batut, J. Martinet, A Catalogue of Perfect Lattices, <http://www.math.u-bordeaux.fr/~martinet>
- [5] K. Böröczky, Closest packing and loosest covering of the space with balls, *Studia Sci. Math. Hungar.* **21**, 78-89.
- [6] J.W.S. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers*, Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 99, Springer-Verlag, Berlin, 1959.
- [7] J.H.Conway, assisted by R.Y.C. Fung, The Sensual (Quadratic) form *Math. Assoc. Amer.*, The Carus Math. Monographs **26**, 1997.



- [8] J.H.Conway-N.J.Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer-Verlag, 1988.
- [9] J.H.Conway-N.J.Sloane, Low-dimensional lattices III. Perfect forms, *Proc. R. Soc. Lond. A* **418** (1988), 43-80.
- [10] J.H.Conway-N.J.Sloane, Low-dimensional lattices VI. Voronoi reduction of three-dimensional lattices., *Proc. R. Soc. Lond. A* **436** (1992), 55-68.
- [11] H.S.M.Coxeter, *Regular polytopes*, Dover Publications, Inc., New York, 3rd ed.,1973
- [12] H. Davenport, G.L. Watson, The minimal points of a positive definite quadratic form, *Mathematika* **1** (1954), 14-17.
- [13] B.N. Delone, The geometry of positive quadratic forms, *Uspehi Mat. Nauk*, **3**, 16-62.
- [14] B.N. Delone, Sur la partition reguliere de l'espace a 4-dimensions, *Izv. Akad. Nauk SSSR Otdel. Fiz.-Mat. Nauk* **7** (1929) 79-110, 147-164.
- [15] G.L. Dirichlet, Über die Reduktion der positiven Quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen, *J. Reine und Angew. Math.* Vol. **40**, (1850), 209-227.
- [16] P. Engel, Investigations of parallelohedra in  $\mathbf{R}^d$ , in: *Voronoi's impact on Modern Science*, P. Engel and H. Syta (eds), Institute of Mathematics, vol.2,Kyiv 1998, 22-60.
- [17] P. Engel, The contraction types of parallelohedra in  $E^5$ , *Acta Cryst. Sect. A* **56** (2000) 491-496.

- [18] P.Engel, V. Grishukhin, There are exactly 222 L-types of primitive 5-dimensional parallelotopes, *European Journal of Combinatorics*, megjelenés alatt
- [19] R.M Erdhal, Zonotopes, dicings and Voronoi's conjecture on parallelotopes, *European Journal of Combinatorics* **20** (1999) 527-549.
- [20] E.S. Fedorov, Elements of the study of figures, *Zap. Miner. Obsc.* **21** (1885) 1-279.
- [21] L. Fejes Tóth, *Regular Figures*, Pergamon, Oxford, 1964
- [22] L. Fejes Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, 2. Auflage 1972, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York
- [23] L. Fejes Tóth, Close packing and loose covering with balls, *Publ. Math. Debrecen* **23**,323-326.
- [24] R. V. Galiulin, G. P. Litvinskaia, Yu. G.Zagal'skaia, V. S. Kovalenko, On matrix description of crystal classes in Bravais frame, in: *Problems of crystal sciences*, dedicated to N. V. Belov, Ed. B. K. Vainstein, Edition of Moscow University, 1971, 284-288.
- [25] R. V. Galiulin, S. S. Ryshkov, On some basic concepts of geometric crystallography, in: *Problems of crystal sciences*, dedicated to N. V. Belov, Ed. B. K. Vainstein, Edition of Moscow University, 1971, 290-298.
- [26] C.F. Gauss, Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seeber, *J. Reine. Angew. Math.* **20** (1840), 312-320.

- [27] V. Grishukhin, Parallelotopes of non-zero width, *Sb. Math.*, 2004, 195 (5), 669-686.
- [28] M. Deza, V. Grishukhin, Once more about the 52 four-dimensional parallelotope, *arXiv:math.MG/0307171 v1* 11 Jul 2003.
- [29] P.M.Gruber-C.G.Lekkerkerker, *Geometry of numbers*, North-Holland Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo 1987.
- [30] Á.G.Horváth, On the coordinates of minimum vectors in n-lattices, *Studia Sci. Math. Hungarica* **29** (1994), 169-175.
- [31] Á.G.Horváth, Lower bounds of the maximal coordinates of minimum vectors, *4<sup>th</sup> International Congress of Geometry, Congress Proceeding* Thessaloniki (1996), 179-186.
- [32] Á.G.Horváth, On the Dirichlet-Voronoi cells of the unimodular lattices *Geometriae Dedicata* **63**, (1996), 183-191.
- [33] Á.G.Horváth, On Dirichlet-Voronoi cell Part I. Classical problems *Periodica Poly. Math. Ser. Mech. Eng.* Vol. **39**, No.1. (1995), 25-42.
- [34] Á.G.Horváth, On Dirichlet-Voronoi cell Part II. Diagrams *Periodica Poly. Math. Ser. Mech. Eng.* Vol. **41**, No.2. (1997), 95-117.
- [35] Á.G.Horváth, On the boundary of an extremal body, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* Vol. **40**, No. 2. (1999), 331-342.
- [36] Á.G.Horváth, On the connection between the projection and the extension of a parallelotope (submitted)
- [37] J. Horváth, Über die Enge der gitterförmigen k-fachen Packungen, Die Lockerheit der gitterförmigen k-fachen überdeckungen und die k-Enge

- der gitterförmigen Punktmengen, *Beiträge zur Alg. und Geom.* **16**, 139-172.
- [38] J. Horváth,  $\langle p, q \rangle$ -Punktsysteme in der Minkowskischen Ebene, *Beiträge zur Alg. und Geom.* **23**, 43-61.
- [39] S. Janzen, Voronoi-Zellen von Gittern erster Art, *Diplomarbeit, Universität Dortmund*, 2000
- [40] D.O. Jaquet-Chiffelle, Énumération complète des classes de formes parfaites en dimension 7, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **43** (1993), 21-55.
- [41] A. Korkine, G. Zolotareff, Sur les formes quadratiques positives, *Math. Ann.* **6** (1873), 366-390.
- [42] A. Korkine, G. Zolotareff, Sur les formes quadratiques positives, *Math. Ann.* **11** (1877), 242-292.
- [43] J.L.Lagrange, Recherches d'arithmétique, *Nouv. Mém. Acad. Berlin* (1773), 265-312.
- [44] Z. Major, On centering of lattices, *Annales Univ. Sci. Math.* **28**(1985), 165-172. (in Russian)
- [45] J. Martinet, *Perfect lattices in Euclidean spaces*, Grundlehren **327**, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.
- [46] P. McMullen, Space tiling zonotopes, *Mathematica* **22**, (1975), 202-211.
- [47] P. McMullen, Convex bodies which tile space by translation, *Mathematica* **27**, (1980), 113-121.
- [48] H. Minkowski, Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz, *J. Reine Angew. Math.* **129**(1905), 220-274.

- [49] W. Plesken, M. Pohst, Constructing integral lattices with prescribed minimum I. *Math. of Comput.* **45** no. 1(1985) 209-221.
- [50] S.S. Ryshkov, On the problem of determining perfect quadratic forms of several variables, (in Russian) *Trudy Mat. Inst. Steklov* **142**(1976) 215-239, 270-271, English translation: *Proc. of the Steklov Inst. of Math.* 1979(3), 223-259.
- [51] S.S.Ryskov, The polyhedron  $\mu(m)$  and some extremal problems in the geometry of numbers, *Dokl. Akad. Nauk. UdSSR* **194**, 514-517; *English translation:* In *Soviet Math Dokl.* **11**, 1240-1244.
- [52] S.S Ryshkov, E.P. Baranowskii, C-types of  $n$ -dimensional lattices and 5-dimensional primitive parallelohedra (with application to the theory of coverings) *Trudy Math. Institute Steklova* **137** (1976) (in Russian), translated in *Proc. Steklov Inst. Math.* No. 4 (1978)
- [53] M.I. Shtogrin, Regular Dirichlet-Voronoi partitions for the second triclinic group, *Proc. Stekl. Inst. Math.* **123** (1973) 1-127.
- [54] K.C. Stacey, The enumeration of perfect quadratic forms in seven variables, *D. Phil. Dissertation*, Oxford, 1973. (Id. *J. London Math. Soc.* (2) **10** (1975), 97-104.)
- [55] Á.H. Temesvári, Eine Methode zur Bestimmung der dünnsten gitterförmigen  $k$ -fachen Kreisüberdeckungen, *Studia Sci. Math. Hung.*, **23** (1988), 23-35.
- [56] Á.H. Temesvári, Das Maximum der  $\langle p, q \rangle$ -Dicke von Gittern für  $p, q \leq 4$  in der Ebene, *Beiträge zur Alg. und Geom.* **28** 125-138.

- [57] Á.H. Temesvári, J. Horváth, N.N. Yakovlev, A method for finding the densest lattice  $k$ -fold packing of circles, *Mat. Zametki*, **41/5** (1987), 625-636. (orosz), Angol ford.: *Mat. Notes* 41(1987), 349-355.
- [58] Á.H. Temesvári, A. Végh, Über die dicke von  $\langle p, q \rangle$ -punktsystemen in der euklidischen ebene, *Annales Univ. Sci. Budapest* **43** (2000), 79-100.
- [59] Á.H. Temesvári-A. Végh, Die dichteste gitterförmige 10-fache Kreispackung, *BDTF- Tud. Közl. XI., Term. Tud.* **6** (1998), 3-18.
- [60] F. Vallentin, Sphere coverings, lattices and tilings (in low dimensions), Thesis (Dissertation, Technische Universität München), 2003.
- [61] Végh A., Többszörös rácsszerű körelrendezések, *Szakedolgozat*, ELTE, 1998.
- [62] A. Végh, Adott számú rácspontot tartalmazó rácskörök és alkalmazásaik, *BDTF- Tud. Közl. XII., Term. Tud.* (2000), 3-21.
- [63] A. Végh, Investigation of the  $\langle 1, q \rangle$  point systems, *Periodica Math. Hung.* Vol. **45** (1-2), (2002), 161-166.
- [64] A. Végh, The maximum of the smallest maximal coordinate of the minimum vectors in 6-lattices equals 1, *Beit. zur Alg. und Geom.* Vol. **46**(2005), No.1, 151-167.
- [65] A. Végh, On the orthogonal projections of Dirichlet-Voronoi cells of lattices, *Studia Scient. Math. Hung.* (közlésre leadva)
- [66] B.A. Venkov, On a class of Euclidean polytopes, *Vestnik Leningradskogo Univ.* **9**,(1954), 11-31. (in Russian)

- [67] B.A. Venkov, On projecting of parallelohedra, *Mat. Sbornik* **49**,(1959), 207-224. (in Russian)
- [68] G.F. Voronoi, Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques, *J. Reine und Angew. Math.* Vol. **134**, (1908), 198-287.
- [69] G.F. Voronoi, Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques II., *J. Reine und Angew. Math.* Vol. **136**, (1909), 67-181.
- [70] N.V. Zaharova, Centerings of eight-dimensional lattices that preserve a frame of successive minima, *Geometry of positive quadratic forms, Trudy Mat. Inst. Steklov* **152**(1980),97-123, 237(in Russian) Correction: N.V. Novikova, Three admissible centerings of eight-dimensional lattices, Deposited in VINITI, No. 4842-81 Dep., 1981, I. 8 (in Russian)
- [71] O.K.Zhitomirskii, Verschärfung eines Satzes von Voronoi, *Zhurnal Leningradskogo Math. Obshtchestva* **2** (1929) 131-151.
- [72] N.N.Yakovlev, Über die enge gitterförmige 3-fache Packung und die lockere gitterförmige 3-fache Überdeckungen in der Ebene, *Vestn. Mosk. Univ.* Ser. 1. Mat-Meh. No 2., 33-37.

## A. függelék

### 7-dimenziós tökéletes formák Gram mátrixai

$$g^1 := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$g^3 := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$g^2 := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$g^4 := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$



$$g5 := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$g8 := \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$g6 := \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$g9 := \begin{bmatrix} 10 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 8 \\ 3 & 10 & 3 & 3 & 3 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 10 & 3 & 3 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 10 & 3 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 10 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 10 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$g7 := \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$g10 := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

106 A. FÜGGELÉK. 7-DIMENZIÓS TÖKÉLETES FORMÁK GRAM MÁTRIXAI

$$g_{11} := \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 3 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad g_{14} := \begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 6 & -3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$g_{12} := \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 10 \end{bmatrix} \quad g_{15} := \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ -4 & 8 & -4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 8 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -4 & 8 & -4 \\ -4 & 0 & 1 & 1 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$g_{13} := \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 & 3 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 8 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 8 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 8 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 8 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad g_{16} := \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$g17 := \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 6 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \quad g20 := \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$g18 := \begin{bmatrix} 8 & -4 & 3 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 8 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 8 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 8 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \quad g21 := \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 6 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$g19 := \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad g22 := \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

108 A. FÜGGELÉK. 7-DIMENZIÓS TÖKÉLETES FORMÁK GRAM MÁTRIXAI

$$g^{23} := \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 6 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$g^{26} := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$g^{24} := \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -2 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 6 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$g^{27} := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$g^{25} := \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 6 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$g^{28} := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

$$g^{29} := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$g^{30} := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$g^{31} := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$g^{32} := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$g^{33} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

## B. függelék

### Részletes számolások

```
> with(linalg):  
> g1:  
> invg1:=inverse(g1):  
> inv1g1:=(addcol(addrow(invg1,6,7,1),6,7,1)):  
> inv2g1:=(addcol(addrow(inv1g1,5,7,1),5,7,1)):  
> inv3g1:=(addcol(addrow(inv2g1,3,1,1),3,1,1)):  
> inv4g1:=(addcol(addrow(inv3g1,3,2,1),3,2,1)):  
> evalf(sqrt(2*3/2));
```

1.732050808

```
> tg1:=inverse(inv4g1):  
> g2:  
> invg2:=inverse(g2):  
> inv1g2:=(addcol(addrow(invg2,5,6,1),5,6,1)):  
> inv2g2:=(addcol(addrow(inv1g2,5,7,1),5,7,1)):  
> inv3g2:=(addcol(addrow(inv2g2,4,7,1),4,7,1)):  
> evalf(sqrt(3*1));
```

1.732050808

```
> tg2:=inverse(inv3g2):  
> g3:  
> invg3:=inverse(g3):  
> evalf(sqrt(4*2/3));
```

1.632993162

```
> g4:  
> invg4:=inverse(g4):  
> evalf(sqrt(2*7/4));
```

1.870828694

```

> g5:
> invg5:=inverse(g5):
> inv1g5:=(addcol(addrow(invg5,4,6,1),4,6,1)):
> evalf(sqrt(4*3/4));

1.732050808

> tg5:=inverse(inv1g5):

> g6:
> invg6:=inverse(g6):
> inv1g6:=(addcol(addrow(invg6,4,6,1),4,6,1)):
> inv2g6:=(addcol(addrow(inv1g6,4,7,1),4,7,1)):
> evalf(sqrt(6*7/16));

1.620185175

> tg6:=inverse(inv2g6):

> g7:
> invg7:=inverse(g7):
> inv1g7:=(addcol(addrow(invg7,6,7,1),6,7,1)):
> evalf(sqrt(4*133/180));

1.719172928

> tg7:=inverse(inv1g7):

> g8:
> invg8:=inverse(g8):
> inv1g8:=(addcol(addrow(invg8,2,1,-1),2,1,-1)):
> inv2g8:=(addcol(addrow(inv1g8,5,7,1),5,7,1)):
> evalf(sqrt(4*11/12));

1.914854215

> tg8:=inverse(inv2g8):

> g9:
> invg9:=inverse(g9):
> inv1g9:=(addcol(addrow(invg9,6,7,1),6,7,1)):
> inv2g9:=(addcol(addrow(inv1g9,4,7,1),4,7,1)):
> inv3g9:=(addcol(addrow(inv2g9,5,7,1),5,7,1)):
> evalf(sqrt(10*387/1456));

1.630327278

```

```
> tg9:=inverse(inv3g9):
```

```
> g10:
```

```
> invg10:=inverse(g10):
```

```
> evalf(sqrt(4*13/21));
```

1.573591585

```
> g11:
```

```
> invg11:=inverse(g11):
```

```
> inv1g11:=(addcol(addrow(invg11,3,4,1),3,4,1)):
```

```
> inv2g11:=(addcol(addrow(inv1g11,3,5,1),3,5,1)):
```

```
> evalf(sqrt(6*163/280));
```

1.868918711

```
> tg11:=inverse(inv2g11):
```

```
> g12:
```

```
> invg12:=inverse(g12):
```

```
> inv1g12:=(addcol(addrow(invg12,6,7,1),6,7,1)):
```

```
> inv2g12:=(addcol(addrow(inv1g12,5,7,1),5,7,1)):
```

```
> evalf(sqrt(6*3/5));
```

1.897366596

```
> tg12:=inverse(inv2g12):
```

```
> g13:
```

```
> invg13:=inverse(g13):
```

```
> inv1g13:=(addcol(addrow(invg13,5,6,1),5,6,1)):
```

```
> inv2g13:=(addcol(addrow(inv1g13,5,7,1),5,7,1)):
```

```
> evalf(sqrt(8*973/2480));
```

1.771640392

```
> tg13:=inverse(inv2g13):
```

```
> g14:
```

```
> invg14:=inverse(g14):
```

```
> inv1g14:=(addcol(addrow(invg14,6,1,1),6,1,1)):
```

```
> inv2g14:=(addcol(addrow(inv1g14,6,2,1),6,2,1)):
```

```
> evalf(sqrt(6*1507/2584));
```

1.870621823



```

> tg14:=inverse(inv2g14):
> g15:
> invg15:=inverse(g15):
> evalf(sqrt(8*139/394));

1.679980661

> g16:
> invg16:=inverse(g16):
> inv1g16:=(addcol(addrow(invg16,4,7,1),4,7,1)):
> evalf(sqrt(6*43/72));

1.892969449

> tg16:=inverse(inv1g16):
> g17:
> invg17:=inverse(g17):
> inv1g17:=(addcol(addrow(invg17,1,7,1),1,7,1)):
> evalf(sqrt(6*347/658));

1.778801208

> tg17:=inverse(inv1g17):
> g18:
> invg18:=inverse(g18):
> evalf(sqrt(8*222/493));

1.898007924

> g19:
> invg19:=inverse(g19):
> inv1g19:=(addcol(addrow(invg19,6,7,1),6,7,1)):
> inv2g19:=(addcol(addrow(inv1g19,5,7,1),5,7,1)):
> evalf(sqrt(6*27/56));

1.700840129

> tg19:=inverse(inv2g19):
> g20:
> invg20:=inverse(g20):
> evalf(sqrt(6*83/146));

1.846878151

```

```
> g21:
> invg21:=inverse(g21):
> evalf(sqrt(6*51/112));

1.652919494

> g22:
> invg22:=inverse(g22):
> evalf(sqrt(4*94/105));

1.892340451

> g23:
> invg23:=inverse(g23):
> evalf(sqrt(6*79/140));

1.840031056

> g24:
> invg24:=inverse(g24):
> inv1g24:=(addcol(addrow(invg24,5,2,1),5,2,1)):
> evalf(sqrt(6*5699/10808));

1.778698282

> g25:
> invg25:=inverse(g25):
> inv1g25:=(addcol(addrow(invg25,1,7,1),1,7,1)):
> evalf(sqrt(6*399/688));

1.865382311

> g26:
> invg26:=inverse(g26):
> evalf(sqrt(4*2/3));

1.632993162

> g27:
> invg27:=inverse(g27):
> evalf(sqrt(4*13/24));

1.471960145
```

```
> g28:
> invg28:=inverse(g28):
> evalf(sqrt(4*2/3));

1.632993162

> g29:
> invg29:=inverse(g29):
> evalf(sqrt(4*11/19));

1.521771820

> g30:
> invg30:=inverse(g30):
> evalf(sqrt(4*57/98));

1.525296893

> g31:
> invg31:=inverse(g31):
> evalf(sqrt(4*37/60));

1.570562532

> g32:
> invg32:=inverse(g32):
> evalf(sqrt(4*11/21));

1.447493729

> g33:
> invg33:=inverse(g33):
> evalf(sqrt(2*7/8));

1.322875656
```