Lokális tétel és rekurrencia síkbeli Lorentz-folyamatra

című PhD értekezés tézisei

Varjú Tamás

Matematika Intézet, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Témavezető: Szász Domokos

2006

Az alábbiakban a „Lokális tétel és rekurrencia síkbeli Lorentz-folyamatra” című PhD értekezést foglaljuk össze. Bemutatjuk a lorentz-folyamatot, mint a vizsgálat tárgyát, a kérdéseket és azok történeti hátterét, közöljük az eredményeket, majd röviden bepillantunk a bizonyítás stratégiájába.

1. A modell és a kérdések bemutatása

1.1. A Sinai-biliárd, és a Lorentz-folyamat

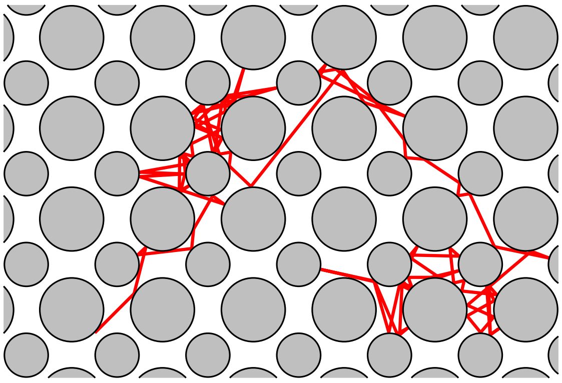
Tekintsünk a lapos síktóruszon véges sok $\mathcal{O}_i$ ütközőt (akadályoknak is szokás hívni) $\mathbb{T}^2 \supset \mathcal{O} = \cup\mathcal{O}_i$ úgy hogy mindegyik ütköző szigorúan konvex, határa pedig $\mathcal{C}^3$-sima. Legyen $n(q)$ a $\partial\mathcal{O}$ határgörbe normálvektora a q pontban, mely legyen az $\mathcal{O}$-ból kifele mutató. A rendszer fázistere:

$$X = \{(q \in \partial\mathcal{O}, v \in \mathbb{R}^2) \mid |v| = 1, \langle v, n(q)\rangle \geq 0\}.$$

A biliárd dinamika $T : X \to X$ egyenes vonalú v sebességvektorú egyenletes mozgás, melyet rugalmas ütközés követ (v-t tükrözzük az ütközéspontbeli érintőegyenesre). Ennek a rendszernek van egy természetes invariáns mértéke: ha l jelöli a $\partial\mathcal{O}$ görbe teljes hosszát, akkor $d\mu = \frac{1}{2l}\langle v, n(q)\rangle\, dqdv$, invariáns valószínűségi mérték, hiszen $\int_X \langle v, n(q)\rangle\, dqdv = 2l$. A normáló konstanst $\frac{1}{2l} = c_\mu$-vel fogjuk jelölni.

Ezt a fázisteret azonosítani fogjuk véges sok henger uniójával $\partial\mathcal{O} \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Ezen dolgozatban ha v egy fázispont sebességvektorát jelöli, akkor azt úgy értjük, hogy $v \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ezen fázistér S_0 határa érintő ütközésekből áll. A dinamika ezen határ ősképeiben, az inverz dinamika ezen határ képeiben szakad. Ezeket $S_i = T^i S_0,\ i \in \mathbb{Z}$ jelöli.



1. ábra. 100 ütközéses Lorentz trajektória-darab kör alakú ütközőkkel és véges horizonttal

A *síkbeli Lorentz folyamat* az előbb leírt tórusz-biliárd természetes $\mathbb{Z}^2$ fedése. Pontosabban: tekintsük a sík $\mathbb{Z}^2$-tel való faktorizálását $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$! Ennek fundamentális tartománya legyen D, ami lehet egy félig nyílt félig zárt négyzet $\mathbb{R}^2$-ben, vagyis $\mathbb{R}^2 = \cup_{z\in\mathbb{Z}^2}(D + z)$, ahol $D + z$ az eltolt fundamentális tartomány.

Felemeljük a síkra az ütközőket (legyen $\tilde{\mathcal{O}} = \Pi^{-1}\mathcal{O}$), és definiáljuk az $\tilde{X}$ fázisteret, és a $\tilde{T}$ dinamikát ugyanúgy, mint a fenti leírásaban. A *szabad út függvényt* $\tilde{\psi} : \tilde{X} \to \mathbb{R}^2$ a következőképpen definiáljuk: $\tilde{\psi}(\tilde{x}) = \tilde{q}(\tilde{T}\tilde{x}) - \tilde{q}(\tilde{x})$. A *diszkrét szabad út függvényt* $\tilde{\kappa} : \tilde{X} \to \mathbb{Z}^2$ pedig így: $\tilde{\kappa}(\tilde{x}) = \iota(\tilde{T}\tilde{x}) - \iota(\tilde{x})$, ahol $\iota(\tilde{x}) = z$ ha $\tilde{x} \in D + z$. Vegyük észre, hogy $\tilde{\psi}$ és $\tilde{\kappa}$ invariánsak a $\mathbb{Z}^2$ csoporthatással szemben, így létezik ψ és κ eredeti X-en definiált függvény, hogy $\tilde{\psi} = \Pi^*\psi$ és $\tilde{\kappa} = \Pi^*\kappa$. Valójában céljainknak inkább egy olyan fundamentális tartomány fog megfelelni, ahol $\partial\tilde{\mathcal{O}} \cap \partial D = \emptyset$. Így κ folytonos függvény.

A Lorentz folyamatot tekinthetjük a tóruszbiliárd feletti ferdeszorzatnak is akár $\tilde{T} : (x, a) \mapsto (Tx, a + \kappa(x))$ ahol $x \in X$ a fázispont a cellán belül, $a \in \mathbb{Z}^2$ pedig a cella-index.

1. Definíció. *[Horizont] A rendszert* véges horizont*únak hívjuk, ha a szabad út függvény korlátos. Egyébként* végtelen horizont*ról beszélünk.*

A modell (fizikai) egyszerűsége ellenére számos interpretációja létezik. Eredetileg egy elektron mozgását volt hivatva leírni egy kristályban [Lor 05], de beszélhetünk gázmodellről is, ahol csak egyetlen részecske mozgását követjük és nem érdekel a többi részecske közötti kölcsönhatás. Ez utóbbi megközelítés nem tudja igazolni a periodicitást, amit technikai feltevésnek tekint.

Amikor [BS 81] (lásd még [BChS 91]) bebizonyították hogy a trajektória gyengén tart a brown-mozgáshoz, akkor ezzel a gázmodellt is igazolták. A brown-mozgás [Brown] alapvetően egy pozitív hőmérsékletű közegben lévő részecske mozgását írja le, ahol a dinamikát a közeg részecskéitől kapott apró lökések vezérlik. Az eredmény bebizonyította, hogy a közeg típusa nem érdekes, még fagyott kristály is lehet mindaddig, amíg sűrűsége nem enged meg akármilyen hosszú szabad repülést.

1.2. A rekurrencia és a lokális tételek kérdésköre

A brown-mozgás legegyszerűbb matematikai mikroszkopikus modellje az egyszerű szimmetrikus bolyongás. A terület híres eredménye a Pólya tétel, amely rekurrenciát állít. Itt rekurrencia alatt azt értjük, hogy a folyamat majdnem biztosan visszatér a konfigurációs tér minden korlátos tartományába. Miután belátták, hogy a síkbeli Lorentz-folyamat diffúzív limesze a wiener-folyamat *rekurrenciájának* kérdése azonnal felvetődött Ya. G. Sinaiban 1979-ben.

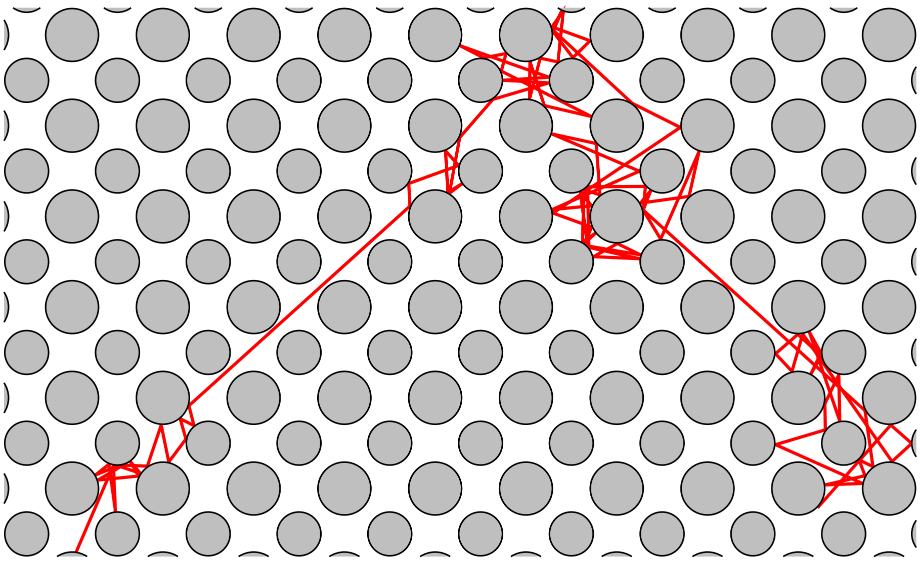
Az első pozitív eredmény [KSz 85]-től származott, ahol a rekurrencia egy gyengébb változatát látták be: a folyamat majdnem biztosan visszatér végtelen sokszor egy visszafogottan (logaritmikusan) növekvő tartománysorozatba. A szerzők a valószínűségszámítási módszert ötvözték a markov-approximációk dinamikai eszközével. A rekurrencia gyengébb formája gyengébb *lokális határeloszlás-tétel*ükön múlt: csak annak valószínűségét tudták kiszámolni, hogy a Lorentz-folyamat n-edik ütközés pillanatában vett pozíciója S_n gyengén növekvű méretű tartományba esik, de azt nem hogy egy rögzített tartományba. Továbbá ezek az eredmények csak véges horizont mellett voltak érvényesek, vagyis ha nincsenek ütközésmentes pályák.

Egy új –és meglepő– megközelítés jelent meg 1998-1999-ben, amikor egymástól függetlenül Schmidt [Sch 98] és Conze [Conze 99] bebizonyították a rekurrenciát. Módszerükben csak a centrális határeloszlás-tételre (CHT) [BS 81] és (absztrakt) ergodelméleti ötletekre támaszkodtak. Megközelítésük lényegesen támaszkodik azokra a megszorításokra, hogy a modell síkbeli és véges a horizontja. Célunk, hogy visszatérjünk a valószínűségszámításidinamikai megközelítéshez és előbb egy valódi lokális centrális határeloszlástételt (LCHT) bizonyítsunk a síkbeli S_n Lorentz-folyamatra.

LCHT-t markov-láncok függvényeire Kolmogorov bizonyított 1949-ben [Kol 49] valószínűségszámítási módszerekkel. 1957-ben Nagaev [Nag 57] – operátor értékű Fourier transzformálttal és perturbáció elmélettel– általános bizonyítást adott LCHT-re szintén markov-láncok függvényeire. Ennek a módszernek a variánsait később újra felfedezték és/vagy alkalmazták: A) Krámli és Szász [KSz 83] hogy LCHT-t bizonyítsanak belső állapotú bolyongásra, B) Guivarch és Hardy [GH 88] Anosov diffeomorfizmusok esetében C) Roussean-Egele, [R-E 83], Morita [Mor 94] és Broise [Bro 96] tágító intervallumleképezésekre és végül D) Aaronson és Denker, [AD 01] Gibbs-Markov leképezésekre.

Magának a rekurrenciának szintén van egy érdekes következménye. Szabadjon először megjegyeznünk, hogy a Lorentz folyamat erős szochasztikus tulajdonságait, mint a korreláció-lecsengést, határeloszlás tételeket stb. csak periódikus ütközőkonfigurációra tudjuk belátni, amikor az Sinai-biliárddá faktorizálható. Ugyanerre az esetre mégis érdekes lenne, hogy a Lorentz-dinakia vajon a faktorizálás nélkül is ergodikus-e (N. B. ebben az esetben az invariáns mérték végtelen!). Simányi egy régi eredménye [Sim 89] a rekurrencia és a végtelen mérték ergodicitását állítja a Lorentz-folyamatra.

1.3. A végtelen horizont esete



2. ábra. 100 ütközéses Lorentz trajektória-darab kör alakú ütközőkkel és végtelen horizonttal

A végtelen horizontú esetről a fizikai irodalomban észrevették hogy anomális diffúzív viselkedést mutat (vö. [FM 84], [BD 85], [Bun 85] és [ZGNR 86]). Annak a lehetősége, hogy a mozgó részecske tetszőlegesen hosszan szabadon repülhet azt okozza, hogy ezek a hosszú szabad repülések dominálják az elmozdulást: a hosszú szabad repülések összege valamivel gyorsabban nő, mint a korlátos tagok összege, ami *szuperdiffúzió*hoz vezet. Mennyiségileg ez a farokviselkedéshez kapcsolható, vagyis ahhoz, hogy hogyan viselkedik a szabad repülés vektor az ütközésmentes pályák környékén.

Bleher 1992-ben részben szigorú, részben heurisztikus cikkében [Bleher] megmutatta, hogy az n-edik ütközéskor vett S_n elmozdulás aszimptotikus viselkedése enyhén szuperdiffúzív, és $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}}$-től várható, hogy nemelfajuló gauß limeszhez tart. Szintén megéri megemlíteni, hogy a diszkrét idejű dinamika nem áll nyilvánvaló kapcsolatban a fizikai idővel, mert kettejük hányadosa (a szabad úthossz) nem korlátos. Bleher azt is megmutatta, hogy fizikai időben is ugyanezt a $\sqrt{t \log t}$ skálázást kell alkalmazni, ha nemelfajuló gauß-limeszt akarunk. Ez az eredménye szigorú, feltéve hogy a globális határeloszlás tétel igaz.

Ebben az esetben azonban még globális határeloszlás tétel sem volt korábban szigorúan bizonyítva. Első célunk tehát a globális tétel, majd – ugyanúgy, mint a végtelen horizont esetében, csak más skálázással– a lokális tétel levezetése, végül a rekurrencia bizonyítása.

2. Eredmények

2.1. Határeloszlás-tételek véges horizontra

Véges horizontú Lorentz-folyamat esetében a diszkrét elmozdulásra $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \kappa \circ T^i$ a következő állítás érvényes:

1. Tétel. *[Lokális tétel, véges horizont] Legyen $k_n \in \mathbb{Z}^2$ olyan sorozat, hogy $\frac{k_n}{\sqrt{n}} \to k \in \mathbb{R}^2$. Ha véges a horizont akkor a következő állítás igaz:*

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \mu\{S_n = k_n\} = \frac{e^{-\frac{1}{2}k\Sigma^{-1}k^T}}{2\pi \det \Sigma}$$

valamilyen nemelfajuló Σ kovariancia-mátrixra.

A nem diszkrét elmozdulásra a következő igaz. Legyen ν_n a $\sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ T^i$ Birkhoff összeg eloszlása.

2. Tétel. *[Folytonos lokális tétel] Legyen $v_n \in \mathbb{R}^2$ olyan sorozat, amire $\frac{v_n}{\sqrt{n}} \to v \in \mathbb{R}^2$. Ha véges a horizont, akkor a következő igaz:*

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \nu_n = \frac{e^{-\frac{1}{2}v\Sigma^{-1}v^T}}{2\pi \det \Sigma} \;\; c_\mu^2 \cdot \sharp \star m_+ \star m_-$$

ahol $\sharp$ a számlálómérték $\mathbb{Z}^2$-en, m_+ az ívhosszmérték a fundamentális tartomány ütközőinek határán $\partial\mathcal{O} \cap D$, m_- pedig egy m_+ eloszlású vektor ellentettjének eloszlása. A konvergenciát a mértékek gyenge topológiájában értjük, és $\star$ pedig a konvolúció jele.

Ezt a két tételt a lokális tétel egy olyan verziójából vezettük le, amely még ennél is többet állít:

3. Tétel. *[Együttes határeloszlás] Legyen $k_n \in \mathbb{Z}^2$ olyan sorozat, melyre $\frac{k_n}{\sqrt{n}} \to k \in \mathbb{R}^2$. Legyen Υ_n az $(S_n(x) - k_n, x, T^n x)$ hármas eloszlása. Ha véges a horizont, akkor a következő igaz:*

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \Upsilon_n = \frac{e^{-\frac{1}{2}k\Sigma^{-1}k^T}}{2\pi \det \Sigma} \; \sharp \cdot \mu \cdot \mu$$

ahol $\sharp$ a számláló mérték $\mathbb{Z}^2$-en, és a konvergenciát a mértékek gyenge topológiájában értjük.

A rekurrencia bizonyításához szükségünk volt egyfajta aszimptotikus függetlenségre, amit együttes lokális tétel formájában adtunk meg:

4. Tétel. *[Aszimptotikus függetlenség] Legyen $j_n \in \mathbb{Z}^2$ olyan sorozat, melyre $\frac{j_n}{\sqrt{n}} \to j \in \mathbb{R}^2$, és $k_n \in \mathbb{Z}^2$ legyen olyan sorozat, melyre $\frac{k_n}{\sqrt{n}} \to k \in \mathbb{R}^2$. Ha a horizont véges, akkor*

$$\lim_{m,n-m\to\infty} m \cdot (n-m) \cdot \mu\{S_m = j_m, S_n = j_m + k_{n-m}\} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(j\Sigma^{-1}j^T + k\Sigma^{-1}k^T\right)}}{4\pi^2 \det^2 \Sigma}$$

Ezen utolsó tételnek van olyan alakja is, amely az $x, T^m x, T^n x$ fázispontok eloszlását is tartalmazza, de annak kimondását már fölöslegesnek érezzük.

2.2. Határeloszlás-tételek végtelen horizontra

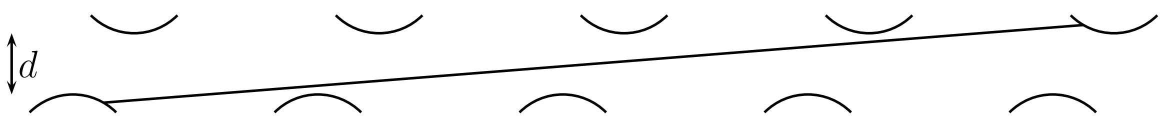
Mint korábban említettük, az ütközésmentes pályák környékén kiértékelt szabad út vektor dominálja a birkhoff-összeget, így ki tudjuk számolni a határeloszlásként előálló gauß eloszlás kovarianciamátrixát geometriai konstansok segítségével. E célból definiáljuk a folyosópontok halmazát, mint a mindig érintő, periodikus pontok halmazát.

$$\mathcal{C} = \{x \in X \mid \exists i \quad T^i x = x \quad \forall j \quad T^j x \in \partial X\}$$

Definiáljuk a Σ mátrixot, mint

$$\sum_{x\in\mathcal{C}} \frac{c_\mu d_x^2}{2|\psi(x)|} \begin{pmatrix} \psi_1^2(x) & \psi_1(x)\psi_2(x) \\ \psi_1(x)\psi_2(x) & \psi_2^2(x) \end{pmatrix} \tag{1}$$

ahol $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ a komponensfüggvényekre használt jelölés, d_x pedig a folyosó szélessége. (vö. 3 ábra).



3. ábra. Folyosót átmetsző szabad repülés, valamint a folyosó szélessége.

Mind a diszkretizált, mind a nem diszkretizált szabad repülés vektor Birkhoff-féle összegére, vagyis az S_n elmozdulásra igaz a globális határeloszlás-tétel $\sqrt{n \log n}$ skálázással.

5. Tétel. *[Globális határeloszlás-tétel] Tegyük fel, hogy a folyosó szabad repülés vektorok $\{\psi(x) \mid x \in \mathcal{C}\}$ kifeszítik a síkot. Ekkor*

$$\mu\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n\log n}} \in A\right\} \to \int_A \varphi(k)$$

ahol φ az a nemelfajuló Gauß-féle sűrűség, melynek nulla a várható értéke, és a (1) képlettel definiált Σ a kovariancia mátrixa.

Ha a folyosó szabad repülés vektorok nem feszítik ki a síkot, de a horizont végtelen, akkor anizotrópikus skálázást kell alkalmazni, hogy nemelfajuló gaußi limeszt kapjunk. Itt nem tudjuk pontosan megadni a limesz kovarianciamátrixát.

6. Tétel. *[Párhuzamos folyosók] Tegyük fel, hogy minden folyosó szabad repülés vektor egy irányba esik $\psi(x) \parallel \vec{v}$ $(\forall x \in \mathcal{C})$. Definiáljuk a következő mátrixot $B_n = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{n\log n} \end{pmatrix}$ a $(\vec{v}^\perp, \vec{v})$ ortogonális bázisban. Ekkor*

$$\mu\left\{S_n B_n^{-1} \in A\right\} \to \int_A \varphi(k)$$

ahol φ nemelfajuló normális sűrűség nulla várható értékkel.

Nézzük a lokális tételeket!

7. Tétel. *[Lokális tétel, végtelen horizont] Tegyük fel, hogy a folyosó szabad repülés vektorok $\{\psi(x) \mid x \in \mathcal{C}\}$ kifeszítik a síkot. Legyen $k_n \in \mathbb{Z}^2$ olyan sorozat, melyre $\frac{k_n}{\sqrt{n \log n}} \to k \in \mathbb{R}^2$. Ekkor*

$$n \log n \ \ \mu\{S_n = k_n\} \to \varphi(k)$$

ahol φ egy nemelfajuló Gauß-féle sűrűség nulla várható értékkel, és (1)-ben definiált Σ kovariancia mátrixszal.

Csakúgy, mint a végtelen horizont esetén itt is szükségünk van egy aszimptotikus függetlenség típusú állításra.

8. Tétel. *[Aszimptotikus függetlenség] Tegyük fel, hogy a folyosó szabad repülés vektorai $\{\psi(x) \mid x \in \mathcal{C}\}$ kifeszítik a síkot. Legyen $j_n \in \mathbb{Z}^2$ olyan sorozat, melyre $\frac{j_n}{\sqrt{n \log n}} \to j \in \mathbb{R}^2$, és $k_n \in \mathbb{Z}^2$ legyen olyan sorozat, melyre $\frac{k_n}{\sqrt{n \log n}} \to k \in \mathbb{R}^2$. Ekkor*

$$\lim_{m,n-m\to\infty} m \log m \ \ (n-m)\log(n-m) \ \ \mu\{S_m = j_m, S_n = j_m + k_{n-m}\} = \varphi(j)\varphi(k)$$

ahol ϕ gaußi sűrűség nulla várható értékkel és Σ kovariancia mátrixszal.

A lokális tétel többi alakját is kimondhatnánk, amelyik $(S_n(x), x, T^n x)$ együttes eloszlására vonatkozik, vagy amelyik a nem diszkretizált szabad repülésre vonatkozik és a többit.

2.3. Rekurrencia és ergodicitás

A síkbeli Lorentz-folyamat (mind véges, mind végtelen horizont esetén) diszkretizált S_n elmozdulására a következő igaz:

9. Tétel. *[Rekurrencia]*

$$\mu(\exists n_k \to \infty \quad S_{n_k} = 0) = 1$$

Ezen tétel következménye [Sim 89] szerint:

10. Tétel. *[Ergodicitás] A Lorentz folyamat végtelen invariáns mértéke $d\tilde{\mu} = \cos v dq dv$ (ahol dq az íhossz mérték végtelen sok ütköző peremén) ergodikus, vagyis bármely invariáns A halmazra vagy $\tilde{\mu}(A) = 0$ vagy $\tilde{\mu}(\tilde{X} \setminus A) = 0$.*

2.4. A bizonyításról

A bizonyítás stratégiájá fogjuk tömören leírni. Mindegyik esetben az az általános cél, hogy valamiképp kezelhetővé tegyük a Birkhoff-féle összeg fourier-transzformáltját. E célból egy olyan szimbolikus dinamikára van szükség, ahol rés van a transzfer-operátor spektrumjában. Ezt Young konstruálta meg híressé lett cikkében [You 98]. Torony konstrukciójához hozzátartozik egy olyan függvénytér definiálása, mely tartalmazza az eredeti fázistér Hölder megfigyelhetőihez kapcsolt függvényeket, és a transzfer operátornak ezen a téren van rés a spektrumában.

Definiáljuk a fourier-transzformált operátort P_t-t, mely úgy kapcsolódik a problémához, hogy a ρ invariáns sűrűségen hatva az integrál $\int P_t^n(\rho)$ nem más mint a Birkhoff-féle összeg fourier-transzformáltja a t helyen. Kis t értékekre P_t tekinthető a transzfer operátor P perturbáltjának, mert $P_0 = P$. Ilyenkor általában be kell bizonyítani, hogy P_t vezető sajátértéke λ_t és a spektrum többi része között is rés van, illetve hogy a rés mérete el van határolva nullától.

Nagy t értékekre pontosan tudni kell, hogy P_t spektruma mikor metszi az egységkört. A mi esetünkben a nem diszkretizált szabad repülés vektorra ez akkor történik, ha $t \in 2\pi\mathbb{Z}^2$. Emiatt vizsgálódásainkat a diszkretizált κ függvényre folytatjuk. Ezzel azt érjük el, hogy mivel ez egészértékű vektor, ha $t \in 2\pi\mathbb{Z}^2$, akkor $P_t = P$, így faktorizálhatunk, és tekinthetjük úgy hogy $t \in 2\pi\mathbb{T}^2$. Ez a minimalitás kérdése.

Miután beláttuk a spektrális rés létezését kis t értékekre, tudjuk hogy $P_t^n = \lambda_t^n + O(\vartheta^n)$, megfelelő $\vartheta < 1$-re. Következésképpen a függő összeg karakterisztikus függvénye hatvánnyal közelíthető. Így már csak λ_t aszimptotikáját kell vizsgálnunk. A véges horizontú esetben ezt a P_t operátor együtthatós másodrendű sorfejtéséből kapjuk.

Ez a sorfejtés nem létezik, ha a horizont végtelen. Így más megközelítésre van szükség. Még mielőtt geometriai megfontoláson alapuló megközelítésünkkel elértük volna célunkat megjelent egy érdekes munka Bálint és Gouëzel tollából [BG 06]. A stadion biliárdra bizonyítottak globális határeloszlás tételt $\sqrt{n \log n}$ skálázással. Eljárásuk alapvetően analitikus volt. A skálázások egybeesése a mi modellünk hosszú repülései és a stadion kvázi-integrálható, egyenes falak között pattogó, trajektóriái közötti analógiával magyarázható. A [BG 06] cikk érvelései lényegében három ponton könnyítették meg a mi esetünk bizonyítását:

1. ha van a modellre Young-féle torony, akkor 3.4-es tételük általános és tömör feltételt ad a nem standard gauß limesz létezésére;

2. a „torony-összeg"et kezelhető, de még mindig domináns tartományra

szorították;

3. a farokban tett kirándulásokra Chernov [Ch 99] egy igen komoly eredményét használták.

Kérdéses persze, hogy tényleg szükség van-e Chernov gyönyörű, ám igencsak „ágyú”nak számító eredményére.

Hivatkozások

[AD 01] Jon Aaronson and Manfred Denker. Local limit theorems for partial sums of stationary sequences generated by Gibbs-Markov maps. *Stochastic Dynamics* 1(2):193–237, 2001.

[BG 06] P. Bálint and Sébastien Gouëzel. Limit theorems in the stadium billiard. Commun. Math. Phys. 263:461-512, 2006

[Bleher] P. M. Bleher. Statistical Properties of Two-Dimensional Periodic Lorentz Gas with Infinite Horizon. *J. of Stat. Physics* 66(1):315–373, 1992.

[BD 85] J.-P. Bouchaud and P. Le Doussal. Numerical study of the D-dimensional periodic Lorentz gas with universal properties. *J. Stat. Phys.* 41:225-248, 1985.

[Brown] Brown, Robert, „A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies.” *Phil. Mag.* 4, 161-173, 1828.

[Bro 96] A. Broise. Transformations dilatante de l'intervalle et théorèmes limites. *Astèrisque* 238:1–110, 1996.

[Bun 85] L. A. Bunimovich. Decay of correlations in dynamical systems with chaotic behaviour. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 89:1452-1471, 1985 [Sov. Phys. JETP 62:842-852, 1985].

[BChS 91] L. A. Bunimovich and N. I. Chernov and Ya. G. Sinai. Statistical properties of two-dimensional hyperbolic billiards. *Russ. Math. Surveys* 46:47–106, 1991.

[BS 81] L. A. Bunimovich and Ya. G. Sinai. Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers. *Comm. Math. Phys.* 78:479–497, 1981.

[Ch 99] N. I. Chernov. Decay of correlations and dispersing billiards. *Journal of Statistical Physics* 94:513-556, 1999.

[Conze 99] J.-P. Conze. Sur un critère de récurrence en dimension 2 pour les marches stationnaires, applications. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 19(5):1233–1245, 1999.

[FM 84] B. Friedman and R. F. Martin, Jr. Decay of the velocity autocorrelation function for the periodic Lorentz gas. *Phys. Lett.* 105A:23-26, 1984.

[GH 88] Y. Guivarc'h and J. Hardy. Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov. *Ann. Inst. Henri Poincaré* 24(1):73–98, 1988.

[Kol 49] Kolmogorov, A. N. A local limit theorem for classical Markov chains. (Russian) *Izvestiya Akad. Nauk SSSR.* Ser. Mat. 13, (1949). 281–300.

[KSz 83] András Krámli and Domokos Szász. Random walks with internal degrees of freedom. I. Local limit theorems. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie* 63:85–95, 1983.

[KSz 85] András Krámli and Domokos Szász. The Problem of Recurrence for Lorentz Processes. *Comm. in Math. Phys.* 98:539–552, 1985.

[Lor 05] H. A. Lorentz, The motion of electrons in metallic bodies, *Proc. Amst. Acad.* 7:438, 585, 604, 1905.

[Mor 94] T. Morita. Local limit theorem and distribution of periodic orbits of Lasota-Yorke transformations with infinite Markov partition. *J. Math. Soc. Japan* 46:309–343, 1994.

[Nag 57] S. V. Nagaev. Some limit theorems for stationary Markov chains. *Theor. Probab. Appl.* 2:378–406, 1957.

[R-E 83] J. Rousseau-Egele. Un théorème de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes et monotones par morceaux *Ann. of Prob.* 3:772–788, 1983.

[Sch 98] Klaus Schmidt. On joint recurrence. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math* 327(9):837–842, 1998.

[Sim 89] N. Simányi. Toward a proof of recurrence for the Lorentz process *Banach Center Publications, PWN, Warsaw* 23:265–276, 1989.

[You 98] Lai-Sang Young. Statistical properties of systems with some hyperbolicity including certain biliards. *Ann. of Math.* 147:585–650, 1998.

[ZGNR 86] A. Zacherl and T. Geisel and J. Nierwetberg and G. Radons. Power spectra for anomalous diffusion in the extended billiard. *Phys. Lett* 114A:317-321, 1986.