

HIPERBOLIKUS KÉT-KOMPONENSŰ RENDSZEREK HIDRODINAMIKAI VISELKEDÉSE

TÉZISFÜZET

Valkó Benedek

Matematikai Intézet, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Témavezető: Dr. Tóth Bálint

2004

Az elkövetkezendő fejezetekben a „Hydrodynamic behavior of hyperbolic two-component systems” című PhD értekezés eredményeit ismertetjük. Egy rövid bevezetéssel és az alapprobléma bemutatásával kezdjük, ezután a vizsgált modell-család és a bizonyított eredmények következnek.

1. Bevezetés

A statisztikus fizika egyik alapproblémája a nagy mikroszkopikus kölcsönható rendszerek tér- és időbeli dinamikájának vizsgálata. Gondolhatunk például gázmolekulákra egy szobában vagy részecskékre egy áramló folyadékban. Általában a vizsgált rendszerek mérete óriási (10^{26} nagyságrendű), így minden egyes részecske követése reménytelen, még akkor is, ha mindent tudunk a mikroszkopikus dinamikáról. Van egy másik, sokkal hatékonyabb megközelítése a problémának: „messziről” kell ránézni a rendszerre, azaz inkább a makroszkopikus fejlődést kell vizsgálni. Ez azt jelenti, hogy rendszerünk állapotát egy adott pontban néhány fizikailag jellemző megmaradó mennyiség lokális sűrűségével jellemezzük (részecskeszám, momentum, energia). Ezeknek a helytől függő függvényeknek az időbeli fejlődése adja meg a kívánt leírást, ami általában egy parciális differenciál-egyenlet (pde) rendszert jelent.

A hidrodinamikai határátmenet (hdl) az az eszköz, amellyel megkaphatók ezek a pde rendszerek a tér és idő megfelelő skálázásával. A fizikus irodalomban számos hidrodinamikai limesz formális levezetés ismert, kezdve Euler, Navier, Stokes, stb. klasszikus eredményeitől (ld. [11], [6]). A matematikai fizika egyik fontos és nehéz problémája az, hogy hogyan lehet ezeket a levezetéseket matematikailag precízzé tenni. Habár teljesen determinisztikus rendszerekre (pl. Newtoni dinamikára) ez a probléma még megoldatlan, az utóbbi évtizedekben jelentős eredményeket értek el sztochasztikus rendszerek hidrodinamikai viselkedésének leírásában. (Lásd [12], [5], [2].) A vizsgálat középpontjában megmaradási törvényekkel rendelkező rácsgáz modellek álltak (pl. simple exclusion, zero range). Ezeket tekinthetjük a determinisztikus rendszerek egy approximációjának, de modellként előfordulnak számos biológiai, kémiai és fizikai jelenségnél (pl. felületnövekedési modellek, biológiai chemotaxis).

2. Az alapprobléma

Az értekezésben kölcsönható részecskerendszerek egy általános családjának hidrodinamikai viselkedését vizsgáljuk. A motivációt Tóth B. és W. Werner egy sejtése adta, ez a fejezet a sejtést ismerteti, illetve megfogalmazza az értekezés által vizsgált alapproblémát.

[13]-ben Tóth B. az ún. „true self-avoiding walk”-nevű diszkrét idejű bolyongás aszimptotikus viselkedését vizsgálta. A folyamat a múltja által taszított véletlen séta \mathbb{Z} -n: ha a bolyongó részecske egy adott rácsponton áll, akkor a jobbra, ill. balra lépés valószínűsége a jobb-, ill. baloldali él lokális idejének különbségétől függ, még hozzá úgy, hogy nagyobb súlyt kap a kevesebbszer látogatott él. (Azaz szívesebben megy a részecske olyan irányba, ahol kevesebbszer

járt.) Tegyük fel, hogy a bolyongó részecske minden lépésében letesz egy egységnyi téglát arra az élre, amin éppen átugrott, ezáltal egy falat építve. Akkor az épülő fal magassága egy adott élen éppen a bolyongás lokális idejével lesz egyenlő, a bolyongó részecske mozgását pedig éppen a fal negatív gradiense irányítja. (Szívesebben megy „lefelé”, mint „felfelé”.)

[17]-ben Tóth B. és W. Werner egy folytonos folyamatot konstruálnak az előbbi diszkrét bolyongás megfelelő limeszeként. A kapott folyamat tekinthető egy részecske folytonos idejű bolyongásának \mathbb{R} -en. A részecske egy falat épít a bolyongás során (ez éppen a lokális ideje), és a mozgása hasonlóképpen függ a faltól, mint a diszkrét esetben. A szerzők azt is belátják, hogy a kapott folyamatot egy bizonyos dinamikai hajtó-mechanizmus vezérli, ami a fenti szabályoknak felel meg. Jelöljük a részecske helyzetét t időben X_t -vel, és legyen a lokális idő t időben és x -ben $h(t, x)$. Ez éppen az épülő fal magasságát adja t időben x -ben. A részecske mozgását a fal meredeksége hajtja:

$$'dX_t = -\partial_x h(t, X_t)dt', \quad (1)$$

és a fal a részecske jelenléte miatt épül:

$$'\partial_t h(t, x) = \delta(X_t - x)'. \quad (2)$$

Ebben a formában persze ezeknek az egyenleteknek matematikailag nincs értelmük, de precízzé tehetőek. Az egyenletek korrekt változata, levezetésük, és a kapott folyamat lényeges vonásai megtalálhatóak az eredeti publikációban. Mi itt csak egy érdekes tulajdonságot jegyzünk meg: az X_t folyamat $2/3$ -os skálázású, azaz $(\alpha^{-2/3}X_{\alpha t}, t \geq 0)$ ugyanolyan eloszlású, mint $(X_t, t \geq 0)$. Sőt, $(\alpha^{-2/3}X_{\alpha t}, t \geq 0)$ és $(\alpha^{-1/3}h(\alpha^{2/3}x, \alpha t), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ együttes eloszlása megegyezik $(X_t, t \geq 0)$ és $(h(x, t), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ együttes eloszlásával.

Természetesen felmerülő kérdés, hogy mit mondhatunk abban az esetben, amikor nem egy, hanem egy egész sereg részecske építi ugyanazt a falat, miközben a mozgásuk a korábbi szabályok szerint függ az épülő faltól. E probléma diszkrét esetét vizsgálták [18]-ben, ahol egy 1-dimenziós, két-komponensű részecskerendszert vezettek be (a „kőműves modellt”): részecskék (kőművesek) mozognak \mathbb{Z} rácspontjain, és közben egy falat építenek egység-téglák élekre halmozásával. Egy adott kőműves jobbra vagy balra ugrik bizonyos rátával, amely a fal ottani negatív gradiensétől függ (a „felfelé” irányuló ugrás rátája kisebb, mint a lefelé irányulóé), és az ugrás során egy téglát tesz az átugrott élen álló téglaszlop tetejére. A dinamika ezáltal olyan, hogy a nagy „völgyeket” a kőművesek megpróbálják feltölteni. A két megmaradó mennyiség a rendszerben a részecskeszám és a negatív gradiensek összege. A következő fejezetben részletesen tárgyalunk egy ehhez hasonló általános modellcsaládot.

A folytonos esetben a következő képet kapnánk: egy folytonos eloszlású „részecske-felhő” épít egy falat, miközben a mozgásukat az épülő fal gradiense irányítja. Ha a részecskeszűrűséget és a fal magasságát egy adott időben és helyen $\rho(t, x)$ -szel és $h(t, x)$ -szel jelöljük, továbbá bevezetjük az $u(t, x) := -\partial_x h(t, x)$ jelölést, akkor az (1), (2) egyenletekből némi (formális)

számolás után az alábbi pde rendszert kapjuk:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \rho = 0. \end{cases} \quad (3)$$

[18]-ben bemutatják, hogy ez a pde-rendszer tekinthető egy általános ülepedési- vagy felület-növekedési modell leírásának is. Adott egy populáció (a lokális sűrűségét $\rho(t, x)$ -szel jelöljük), amely valamilyen anyag lerakásával egy felületet épít (ennek magassága $h(t, x)$). Legyen továbbá $u(t, x) := -\partial_x h(t, x)$. Akkor a jelenség mechanizmusa az alábbi két szabállyal írható le:

- (a) A populáció lokális sebesség-mezője arányos a felület-magasság negatív gradiensevel. Ez azt jelenti, hogy a populáció a fal lokális csökkenésének irányába mozdul. Ez a szabály, a tömegmegmaradással kombinálva a kontinuitási egyenlethez vezet, ami éppen (3) első sora.
- (b) Az ülepedési ráta (vagy a fal növekedési rátája) arányos ρ -val:

$$\partial_t h \sim \rho, \quad (4)$$

azaz a ülepedést/növekedést a populáció okozza, additív módon. Ezt az egyenletet deriválva x szerint (és az arányt 1-nek választva) kapjuk (3) második egyenletét.

Ugyanebben a cikkben a (3) egyenletrendszert levezetik az említett kőműves modellből formális hidrodinamikai határátmenet és perturbációs analízis segítségével. A szerzők sejtésként mondják ki, hogy a levezetés precízzé tehető, és igaz kell, hogy legyen két-komponensű rendszerek egy általános családjában. Ugyanitt rámutatnak bizonyos kapcsolatokra (3) és az ú.n. Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) egyenlet között. A KPZ egyenlet a növekedő felületek egyik legjelentősebb modellje a fizikus irodalomban (lásd pl. [4]). Leírását adja olyan felületeknek, amelyek határukra merőleges irányban nőnek, miközben egy bizonyos feszültség, tenzió összetartja őket (azaz a lyukakat gyorsan betemeti). Ez hasonlít a kőművesek által épített fal tulajdonságaihoz. Maga a KPZ egyenlet egy (matematikailag nem precíz) nemlineáris pde egy sztochasztikus taggal:

$$\partial_t h = \nabla h - (\partial_x h)^2 + W \quad (5)$$

ahol $W = W(t, x)$ fehér zaj térben is időben.

A KPZ egyenlet által motiválva az alábbi módon változtatjuk meg a (b) szabályt a felületnővekedési modellek [18] szerinti leírásában, a jobb oldalra egy $(\partial_x h)^2$ -tel arányos tagot adunk:

$$\partial_t h \sim \rho + \gamma(\partial_x h)^2. \quad (6)$$

Ez azt jelenti, hogy a felületnővekedést nem csak a populáció okozza, hanem maga a felület is (a KPZ modell szellemében). Ezt x szerint deriválva az alábbi pde rendszert kapjuk (3) helyett:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + \partial_x(\rho + \gamma u^2) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

ahol γ egy valós paraméter. Ez a pde rendszer egy hiperbolikus megmaradási törvény, melynek tulajdonságai nagyban függenek γ értékétől. Hiperbolikusság azt jelenti, hogy a pde Jacobi-mátrixának két különböző valós sajátértéke van. A hiperbolikusság egyik leglényegesebb következménye az, hogy az egyenletnek nem létezik globális erős megoldása, tetszőleges sima kiindulási feltételek mellett véges időn belül sokkok, diszkontinuitások keletkeznek (néhány speciális kiindulási feltételt kivéve).

Most már készen állunk arra, hogy megfogalmazzuk az értekezés kiindulási problémáját:

Matematikailag korrekt módon le akarjuk vezetni a (7) egyenletrendszert univerzális alacsony sűrűségű melletti hidrodinamikai határátmenetként 1-dimenziós, két megmaradó mennyiséggel rendelkező modellek egy általános családjára.

3. Modellek

Egy dimenziós rácsmodelleket vizsgálunk, amelyek a diszkrét tóruszokon ($\mathbb{T}^n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) vannak értelmezve. A folytonos tóruszt $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ -vel jelöljük. Legyen Ω egy véges halmaz, részecske-rendszerünk állapottere

$$\Omega^n := \Omega^{\mathbb{T}^n}$$

lesz, a lehetséges konfigurációkat

$$\underline{\omega} := (\omega_j)_{j \in \mathbb{T}^n} \in \Omega^n$$

jelöli. A folyamatunk folytonos idejű Markov-folyamat lesz, csak olyan elemi ugrásokat (állapotváltozásokat) engedünk meg, amelyek két szomszédos rácspontot érintenek. Ha a rendszerünk egy adott pillanatban az $\underline{\omega}$ konfigurációban van, akkor a $j, j+1$ rácspontokhoz tartozó ω_j, ω_{j+1} állapotok megváltozhatnak ω'_j, ω'_{j+1} -be valamilyen $\omega_j, \omega_{j+1}, \omega'_j, \omega'_{j+1}$ -től függő rátával. Ezáltal a dinamika eltolás-invariáns lokális szabályoktól függ. A ráta-függvényt $r : \Omega \times \Omega \times \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ -vel jelöljük, azaz $r(\omega_j, \omega_{j+1}; \omega'_j, \omega'_{j+1})$ a rátája az előbb definiált ugrásnak.

Két (diszkrét) megmaradó mennyiséggel rendelkező rendszereket vizsgálunk, melyeket az alábbi módon jelölünk:

$$\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}.$$

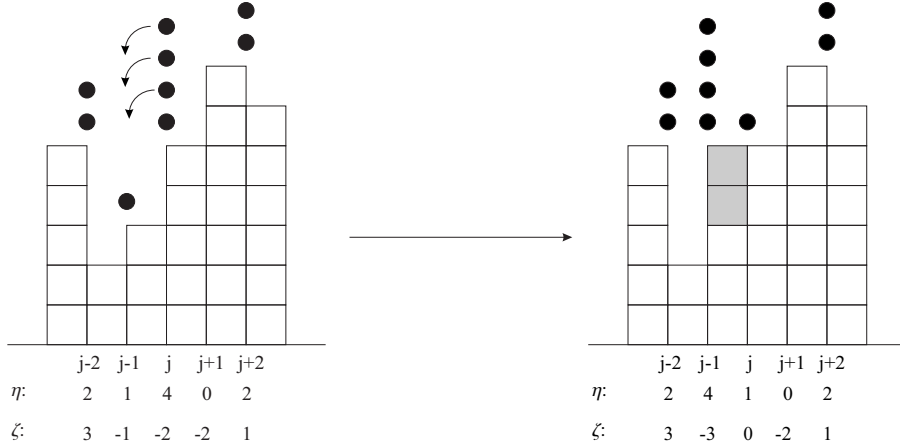
Használjuk még a $\zeta_j = \zeta(\omega_j)$, $\eta_j = \eta(\omega_j)$ jelöléseket is. Az, hogy ezek megmaradó mennyiségek, azt jelenti, hogy csak olyan elemi ugrásokat engedünk meg, amelyek megőrzik a $\sum_{j \in \mathbb{T}^n} \zeta_j$, $\sum_{j \in \mathbb{T}^n} \eta_j$ értékeket. Azaz ha egy elemi ugrás az (ω_j, ω_{j+1}) -t $(\omega'_j, \omega'_{j+1})$ -re változtatja pozitív rátával, akkor

$$\begin{aligned} \zeta_j + \zeta_{j+1} &= \zeta'_j + \zeta'_{j+1}, \\ \eta_j + \eta_{j+1} &= \eta'_j + \eta'_{j+1}. \end{aligned}$$

A megmaradó mennyiségeknek különbözőknek kell lenniük, ezért feltesszük, hogy ζ, η és az Ω -n definiált konstans 1 függvény lineárisan függetlenek.

Könnyen látható, hogy (esetleg η -t eltolva, hogy nemnegatív legyen) mindig tekinthetjük a modelünket lokálisan egy olyan növekvő falként, amely az élekre halmozott egység-téglákból áll, amelyeket a rácspontokon ugráló kőművesek pakolnak le. A j -nél lévő kőművesek száma lesz η_j , ζ_j pedig a $(j-1, j)$ -n és $(j, j+1)$ -en lévő oszlopok magasságának különbsége (lsd. 1. ábra). Egy elemi ugrás a $(j-1, j)$ rácspontok között az alábbi változtatások valamelyikének felel meg:

- néhány részecske átugrik $j-1$ -ből j -be vagy fordítva,
- néhány téglát ráteszünk, vagy elveszünk a $(j-1, j)$ -en álló oszlop tetejére/tetejéről,
- az előbbiek kombinációja.



1. ábra. Az ábra egy elemi ugrást mutat be a kőműves környezetben: 3 kőműves ugrott j -ből $j-1$ -be, és eközben 2 téglát helyeztek a $(j-1, j)$ -n álló oszlop tetejére.

Az infinitezimális generátor precíz definiálásához szükségünk van a $\Theta_j^{\omega', \omega''} : \Omega^n \rightarrow \Omega^n$ függvényre tetszőleges $\omega', \omega'' \in \Omega$, $j \in \mathbb{T}^n$ mellett:

$$\left(\Theta_j^{\omega', \omega''} \underline{\omega}\right)_i = \begin{cases} \omega' & \text{if } i = j \\ \omega'' & \text{if } i = j + 1 \\ \omega_i & \text{if } i \neq j, j + 1. \end{cases}$$

Az Ω^n -en definiált folyamat generátora:

$$L^n f(\underline{\omega}) = \sum_{j \in \mathbb{T}^n} \sum_{\omega', \omega'' \in \Omega} r(\omega_j, \omega_{j+1}; \omega', \omega'') (f(\Theta_j^{\omega', \omega''} \underline{\omega}) - f(\underline{\omega})).$$

\mathcal{X}_t^n -vel jelöljük az Ω^n -en az L^n generátorral definiált Markov folyamatot.

Számos technikai feltételt szabunk az r rátafüggvényre. Ezeket nem soroljuk teljes részletességben, csak a legfontosabb következményeiket vázoljuk:

- (1) Nincsenek rejtett extra megmaradási törvények $\sum \zeta_j$ és $\sum \eta_j$ mellett.
- (2) Létezik egy π valószínűségi mérték Ω -n, ami pozitív súlyt tesz minden elemre, és amelyre a $\pi^n := \prod_{j \in \mathbb{T}^n} \pi$ szorzatmérték stacionárius az \mathcal{X}_t^n folyamatra (minden n mellett).

(3) A folyamat nem reverzibilis, a „detailed balance” feltétel nem teljesül.

Valójában a rendszer π^n -hez hasonló stacionárius szorzatmértékek egy egész családjával rendelkezik. Tetszőleges $\theta, \tau \in \mathbb{R}$ mellett definiáljuk a $G(\theta, \tau)$ momentumgeneráló függvényt:

$$G(\theta, \tau) := \log \sum_{\omega \in \Omega} e^{\theta \zeta(\omega) + \tau \eta(\omega)} \pi(\omega).$$

Termodinamikai nyelven $G(\theta, \tau)$ a Gibbs szabadenergiának felel meg, lsd. [8]. Definiáljuk az alábbi valószínűségi mértékeket Ω^n -en:

$$\pi_{\theta, \tau}(\omega) := \pi(\omega) \exp(\theta \zeta(\omega) + \tau \eta(\omega) - G(\theta, \tau)) \quad (8)$$

Tetszőleges $\theta, \tau \in \mathbb{R}$ és n -re a

$$\pi_{\theta, \tau}^n := \prod_{j \in \mathbb{T}^n} \pi_{\theta, \tau}$$

szorzatmérték \mathcal{X}_t^n stacionárius mértéke. A megmaradó mennyiségek $\pi_{\theta, \tau}$ szerinti várható értékét az alábbi módon jelöljük:

$$\begin{aligned} u(\theta, \tau) &:= \mathbf{E}_{\pi_{\theta, \tau}}(\zeta) = \sum_{\omega \in \Omega} \zeta(\omega) \pi_{\theta, \tau}(\omega) = G'_\theta(\theta, \tau), \\ v(\theta, \tau) &:= \mathbf{E}_{\pi_{\theta, \tau}}(\eta) = \sum_{\omega \in \Omega} \eta(\omega) \pi_{\theta, \tau}(\omega) = G'_\tau(\theta, \tau). \end{aligned}$$

Könnyű belátni, hogy a $(\theta, \tau) \mapsto (u(\theta, \tau), v(\theta, \tau))$ függvény invertálható, az inverzét $(u, v) \mapsto (\theta(u, v), \tau(u, v))$ -vel jelöljük. Az inverz-függvény értelmezési tartományát *fizikai tartománynak* hívjuk, \mathcal{D} -vel, és teljesül rá

$$\mathcal{D} = \text{co}\{(\eta(\omega), \zeta(\omega)) : \omega \in \Omega\}$$

ahol co konvex burkot jelöli. A jelölésekben az alábbi egyszerűsítésekkel élünk

$$\pi_{\theta(u, v), \tau(u, v)} =: \pi_{u, v}, \quad \pi_{\theta(u, v), \tau(u, v)}^n =: \pi_{u, v}^n,$$

ez egy másik parametrizálási lehetőséget ad a stacionárius szorzatmértékeinkre

Jelölje $(u, v) \mapsto S(u, v)$ a (szigorúan konvex) $(\theta, \tau) \mapsto G(\theta, \tau)$ függvény konvex konjugáltját (Legendre transzformáltját):

$$S(u, v) := \sup_{\theta, \tau} (u\theta + v\tau - G(\theta, \tau)). \quad (9)$$

Belátható, hogy $\theta(u, v) = S'_u(u, v)$, $\tau(u, v) = S'_v(u, v)$. Valószínűségi számításai nyelven $S(u, v)$ $(\sum_j \zeta_j, \sum_j \eta_j)$ nagy eltéréseinek közös rátája, termodinamikában $S(u, v)$ az egyensúlyi termodinamikai entrópiának felel meg (lsd. [8]).

Mivel a kölcsönhatások csak szomszédos rácspontokat érintenek, ezért a generátor az alábbi módon hat a megmaradó mennyiségekre:

$$\begin{aligned} L^n \zeta_i &= -\phi(\omega_i, \omega_{i+1}) + \phi(\omega_{i-1}, \omega_i) =: -\phi_i + \phi_{i-1}, \\ L^n \eta_i &= -\psi(\omega_i, \omega_{i+1}) + \psi(\omega_{i-1}, \omega_i) =: -\psi_i + \psi_{i-1}, \end{aligned}$$

ahol $\phi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvények. ϕ és ψ a *mikroszkopikus fluxus* függvények, várható értékeik $\pi_{u,v}^2$ szerint pedig a *makroszkopikus fluxus* függvények:

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) &:= \mathbf{E}_{\pi_{u,v}^2} \phi(\omega_1, \omega_2), \\ \Psi(u, v) &:= \mathbf{E}_{\pi_{u,v}^2} \psi(\omega_1, \omega_2).\end{aligned}$$

Mint később látni fogjuk, a $\Phi(u, v)$, $\Psi(u, v)$ makroszkopikus fluxusok fogják irányítani a megmaradó mennyiségek sűrűség-profiljainak időbeni fejlődését. Ezek a függvények függnek a mikroszkopikus modelltől, az r rátafüggvény segítségével kiszámolhatóak.

Az értekezés 2.2 fejezetében számos konkrét mikroszkopikus modellt mutatunk be, amelyek bírnak a felsorolt tulajdonságokkal.

4. Euler skálázás

A hidrodinamikai határátmenet a megmaradó mennyiségek sűrűségprofiljainak makroszkopikus viselkedését adja meg, a tér és az idő megfelelő skálázásával. A tér skálázása az összes eredményünkben ugyanolyan lesz, mindig n -nel (a rendszer méretével) skálázunk. Ez azt jelenti, hogy a \mathbb{T}^n tóruszt úgy reprezentáljuk, mint n pont a folytonos tóruszon, $1/n$ távolsággal a szomszédos pontok között.

Számos olyan heurisztikus levezetés ismert, amely szerint Euler skálázás mellett (ez a tér és idő skálázása n -nel) a megmaradó mennyiségek (ζ, η) sűrűségprofiljai az alábbi egyenletrendszer szerint fejlődnek:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \Phi(u, v) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x \Psi(u, v) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

Ez általában egy hiperbolikus megmaradási törvény.

Kicsit precízebb formában ez a következőket jelenti. Tegyük fel, hogy $u_0(\cdot), v_0(\cdot)$ valós függvények \mathbb{T} -n, melyekre $x \in \mathbb{T}$ esetén $(u_0(x), v_0(x)) \in \mathcal{D}$. Tekintsünk egy mikroszkopikus modellt, és vegyük egy-egy kópiáját Ω^n -en minden n -re. Tegyük fel, hogy a kiindulási (véletlen) konfigurációk olyanok, hogy ζ és η lokális sűrűségei az $u_0(\cdot), v_0(\cdot)$ függvényeket approximálják. Akkor a rendszert (rendszereket) nt ideig futtatva a ζ és η sűrűség-profiljai az $u(t, \cdot), v(t, \cdot)$ függvényeket approximálják, amelyek az (10) egyenlet megoldásai $u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x)$ kezdeti feltételek mellett. Többféleképpen definiálhatjuk azt, hogy mit jelentsen, hogy a sűrűségprofil egy adott függvényt approximál. Egy természetes definíció a következő gyenge approximáció: tetszőleges sima $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tesztfüggvényre

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \sum_{j \in \mathbb{T}^n} g(j/N) \zeta_j(nt) &\xrightarrow{\mathbf{P}} \int_{\mathbb{T}} g(x) u(t, x) dx, \\ \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathbb{T}^n} g(j/N) \eta_j(nt) &\xrightarrow{\mathbf{P}} \int_{\mathbb{T}} g(x) v(t, x) dx.\end{aligned} \quad (11)$$

Ekkor az előbbi (heurisztikus) eredmény a következőképpen összegezhető: ha az előző határátmenetek igazak tetszőleges g -re $t = 0$ mellett, akkor igazak lesznek tetszőleges $t > 0$ -ra is.

Az 1. Tétel az előző eredmény matematikailag precíz verzióját adja. Lényegében egy modellfüggetlen módszer létezik hidrodinamikai limesz bizonyításához, amely működik több megmaradó mennyiséggel rendelkező hiperbolikus rendszerekre: ez H.T. Yau relatív entrópia módszere ([20]). Attraktív egy-komponensű rendszerekre léteznek erősebb eredmények (pl. [9]), de ezek nem terjeszthetők ki a mi esetünkre. Az entrópia módszer robusztus, de ennek a nagy általánosságnak ára van: a bizonyítás csak a határérték egyenlet sima megoldásaira működik. (A simaság valójában bizonyos differenciálhatósági feltételeket jelent.) Azonban, mint már említettük, hiperbolikus megmaradási törvényeknek nem lehet globális sima megoldása általános kezdőfeltételekkel. Így a relatív entrópia módszer csak véges időtartományban működik, az első sokkok megjelenéséig.

Mielőtt kimondanánk a tételt, néhány szó a relatív entrópia módszerről. Ha μ és π valószínűségi mértékek ugyanazon az Ω valószínűségi mezőn, akkor relatív entrópiájukat $H(\mu|\pi)$ -vel jelöljük, és az alábbi módon definiáljuk:

$$H(\mu|\pi) := \sup_{\|f\|_\infty < \infty} \left\{ \mathbf{E}_\mu f - \log \mathbf{E}_\pi e^f \right\}.$$

Ha létezik a $\frac{d\mu}{d\pi}$ sűrűségfüggvény, akkor

$$H(\mu|\pi) = \mathbf{E}_\mu \left(\log \frac{d\mu}{d\pi} \right) = \mathbf{E}_\pi \left(\frac{d\mu}{d\pi} \log \frac{d\mu}{d\pi} \right).$$

A relatív entrópia megmutatja két valószínűségi mérték távolságát (bár szigorú topológiai értelemben nem is távolság). Az entrópia módszer alapja a következő: ahelyett, hogy a sűrűségprofilokat hasonlítanánk a determinisztikus függvényekhez, inkább megpróbáljuk „kitalálni” magát az eloszlást, és ehhez a „tipphez” hasonlítjuk a valódi eloszlást. Mivel a rendszert általában hosszú futási idő után vizsgáljuk (nt ebben az esetben, ahol n nagy), ezért észszerű feltevés, hogy lokálisan az eloszlás a stacionárius eloszláshoz hasonlít. Így, ha azt gondoljuk, hogy ζ és η sűrűségprofiljai az $(u(t, \cdot), v(t, \cdot))$ függvényeket approximálják, akkor a következő eloszlás Ω^n -en egy jó „tipp” a valódi eloszlásra:

$$\nu_t^n := \prod_{j \in \mathbb{T}^n} \pi_{u(t, \frac{j}{n}), v(t, \frac{j}{n})}. \quad (12)$$

A ν_t^n mérték az időfüggő referencia eloszlásunk, ehhez hasonlítjuk a folyamat eloszlását. Jelöljük a valódi eloszlást nt idő elteltével μ_t^n -vel. Most már kimondhatjuk a tételt.

1. Tétel. *Legyen $(u(t, x), v(t, x))$ a (10) egyenlet olyan megoldása, ami sima $t \in [0, T]$ -re, és $x \in \mathbb{T}$ esetén $(u(0, x), v(0, x)) \in \mathcal{D}$. Ha*

$$H(\mu_0^n | \nu_0^n) = o(n),$$

akkor

$$H(\mu_t^n | \nu_t^n) = o(n),$$

egyenletesen $t \in [0, T]$ -re.

A tétel állítása szerint ha a kezdeti eloszlás relatív entrópia értelemben közel van ν_0^n -hez, akkor nt idő múlva közel lesz ν_t^n -hez (ugyanolyan értelemben). Az, hogy a „közel” itt $o(n)$ -et jelent, könnyen megindokolható (lsd. [15]). Talán nem látszik, hogy van-e egyáltalán kapcsolat a relatív entrópiát használó megfogalmazás, és a (11)-ben definiált gyenge approximáció között. Valójában az alábbi következmény adódik a tételből:

1. Következmény. *A tétel feltételei mellett, tetszőleges $t \in [0, T]$ -re, az alábbi határértékek teljesülnek:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j \in \mathbb{T}^n} g(j/n) \zeta_j(t) &\xrightarrow{\mathbf{P}} \int_{\mathbb{T}} g(x) u(t, x) dx, \\ \frac{1}{n} \sum_{j \in \mathbb{T}^n} g(j/n) \eta_j(t) &\xrightarrow{\mathbf{P}} \int_{\mathbb{T}} g(x) v(t, x) dx, \end{aligned}$$

tetszőleges sima $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tesztfüggvényre, $n \rightarrow \infty$ mellett.

Az 1. Tétel bizonyítása a relatív entrópia módszer szokásos lépéseit követi, de van egy lényeges új elem is. Ahhoz, hogy a levezetés véghezvihető legyen, az alábbi szimmetria relációra van szükségünk Φ és Ψ között. A relációk az Onsager-féle reciprocitási relációkhoz hasonlóak, és a stacionárius szorzatmérték létezéséből bizonyíthatóak.

1. Lemma.

$$\partial_\tau \Psi(u(\theta, \tau), v(\theta, \tau)) = \partial_\theta \Phi(u(\theta, \tau), v(\theta, \tau)).$$

Ez a szimmetria reláció a bizonyítás fontos eleme, de segítségével bizonyíthatjuk a (10) pde néhány érdekes (bár nem túl meglepő) tulajdonságát.

2. Következmény. *A (10) megmaradási törvény (gyengén) hiperbolikus a \mathcal{D} tartomány belsőjében. Továbbá, a modell egyensúlyi termodinamikai entrópiája, $(u, v) \mapsto S(u, v)$, a (10) rendszer globálisan konvex Lax entrópiája.*

A gyenge hiperbolikusság azt jelenti, hogy a

$$\begin{pmatrix} \Phi'_u(u, v) & \Phi'_v(u, v) \\ \Psi'_u(u, v) & \Psi'_v(u, v) \end{pmatrix} \quad (13)$$

Jacobi mátrix diagonalizálható valós értelemben. A Lax entrópia egy olyan $S(u, v)$ függvény, amihez létezik egy $F(u, v)$ fluxus függvény, hogy ha $u(t, x), v(t, x)$ sima megoldása (10)-nek, akkor

$$\partial_t S(u, v) + \partial_x F(u, v) = 0.$$

Ez lényegében egy extra megmaradási törvénye (10)-nek.

Az ebben a fejezetben ismertetett eredmények megjelentek a [15] publikációban.

5. Az univerzális (7) egyenlet levezetése

5.1. Perturbációs analízis

Ebben a fejezetben a ρ változót használjuk v helyett az η megmaradó mennyiség sűrűségére. Az Euler skálázás eredményeit felhasználva formális perturbációt alkalmazva le tudjuk vezetni a (7) egyenletet. Tegyük fel, hogy $\min_{\omega \in \Omega} \eta(\omega) = 0$ (ez egy természetes feltevés, ha η -ra úgy tekintünk, mint egy adott rácsponton a részecskék számára), továbbá hogy a mikroszkopikus modellünk tükör-szimmetrikus. Ez utóbbi alatt azt értjük, hogy adott egy

$$R : \Omega \rightarrow \Omega, \quad R \circ R = Id$$

involúció, ami így hat a megmaradó mennyiségekre:

$$\eta(R\omega) = \eta(\omega), \quad \zeta(R\omega) = -\zeta(\omega),$$

és amire

$$\pi(R\omega) = \pi(\omega), \quad r(R\omega_2, R\omega_1; R\omega'_2, R\omega'_1) = r(\omega_1, \omega_2; \omega'_1, \omega'_2).$$

Ez azt jelenti, hogy a rács irányítását megfordítva, a fal ugyanolyan dinamikával fejlődik. Itt jegyezzük meg, hogy a (7) pde rendelkezik ezzel a szimmetriával: ha $(\rho(t, x), u(t, x))$ megoldás, akkor $(\rho(t, -x), -u(t, -x))$ is.

A modellről feltett extra feltételek mellett az alábbi aszimptotikák teljesülnek a makroszkopikus fluxusokra:

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, u) &= a(\rho + \gamma u^2)(1 + \mathcal{O}(\rho + u^2)), \\ \Psi(\rho, u) &= b\rho u(1 + \mathcal{O}(\rho + u^2)), \end{aligned} \tag{14}$$

ha $\rho, |u| \ll 1$. Ezeket az aszimptotikákat használva a (7) egyenlet levezethető a

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \Phi(\rho, u) = 0, \\ \partial_t \rho + \partial_x \Psi(\rho, u) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

Euler egyenlet konstans $(0, 0)$ megoldásának perturbációjával.

Legyenek $\rho_0(x)$ és $u_0(x)$ adott függvények, és tegyük fel, hogy $\rho^\varepsilon(t, x)$ és $u^\varepsilon(t, x)$ megoldása az Euleri egyenlet megoldása

$$\rho^\varepsilon(0, x) = \varepsilon^2 \rho_0(x), \quad u^\varepsilon(0, x) = \varepsilon u_0(x)$$

kezdeti feltételekkel. Akkor formális számolással, ha $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\varepsilon^{-2} \rho^\varepsilon(\varepsilon^{-1}t, x) \rightarrow \rho(t, x), \quad \varepsilon^{-1} u^\varepsilon(\varepsilon^{-1}t, x) \rightarrow u(t, x),$$

ahol $\rho(t, x), u(t, x)$ a (7) pde megoldása

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), \quad u(0, x) = u_0(x)$$

kezdeti feltételekkel. Igazából az a, b konstansok is megjelennek az egyenletben, de egyszerű (lineáris) változó-transzformációkkal kiskálázhatók, hogy (7)-et kapjuk. Fontos megjegyeznünk, hogy a γ paramétert nem lehet kiskálázni az egyenletrendszerből, és hogy ez az egyetlen paraméter, ami az eredeti mikroszkopikus modellből megmaradt.

5.2. A fő eredmény

A perturbációs analízis segítségével megsejthető, hogy hogyan lehetne levezetni (7)-t „univerzális” hidrodinamikai limeszként. Rögzítsünk egy mikroszkopikus modellt a korábbi extra feltételekkel (min $\eta = 0$ és tükör-szimmetria), egy kis $\beta > 0$ konstanst, és tegyük fel, hogy $\rho(t, x)$, $u(t, x)$ megoldása (7)-nek

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), \quad u(0, x) = u_0(x)$$

kezdeti feltételekkel. Ha $t = 0$ -kor η és ζ sűrűségprofiljai közel vannak az $n^{-2\beta}\rho_0(\cdot)$, $n^{-\beta}u_0(\cdot)$ függvényekhez, akkor $n^{1+\beta}t$ idő múlva közel kell, hogy legyenek az $n^{-2\beta}\rho(t, \cdot)$, $n^{-\beta}u(t, \cdot)$ függvényekhez. *Vegyük észre, hogy ez nem Euler skálázás.*

A (7) egy tetszőleges $\rho(t, x)$, $u(t, x)$ megoldásához az alábbi időfüggő ν_t^n referencia mértéket konstruáljuk:

$$\nu_t^n := \prod_{j \in \mathbb{T}^n} \pi_{n^{-2\beta}\rho(t, \frac{j}{n}), n^{-\beta}u(t, \frac{j}{n})}.$$

Ezt hasonlítjuk össze a folyamat valódi eloszlásával $n^{1+\beta}t$ idő után, ezt μ_t^n -vel jelöljük. Annak érdekében, hogy a lokális egyensúly gyorsabban beálljon, és így könnyebben becsülhessünk bizonyos hibatagokat a hidrodinamikai határátmenet bizonyításakor, szükségünk van a Markov generátor szimmetrikus részének felgyorsítására. Pontosabban: lesz egy *szimmetrikus* s rátafüggvényünk is, hasonló tulajdonságokkal, mint r (és még néhány technikai feltétellel), és egy $(\omega_j, \omega_{j+1}) \rightarrow (\omega'_j, \omega'_{j+1})$ elemi lépés rátája $r(\omega_j, \omega_{j+1}; \omega'_j, \omega'_{j+1}) + n^\delta s(\omega_j, \omega_{j+1}; \omega'_j, \omega'_{j+1})$ lesz. A δ paraméter 1-nél kisebb pozitív szám. Méretét úgy állítjuk be, hogy a szimmetrikus rész hatása *ne látszódjon* a hidrodinamikai határátmenetben. Most már készen állunk a tétel ki mondására.

2. Tétel. *Rögzítsünk egy mikroszkopikus modellt, amire a γ paraméter nagyobb 1-nél. Tegyük fel, hogy $\rho(t, x)$, $u(t, x)$ a (7) pde sima megoldása $[0, T] \times \mathbb{T}$ -ben. Válasszunk $\beta \in (0, 1/2)$ és $\delta \in (1/2, 1)$ paramétereket úgy, hogy $2\delta - 8\beta > 1$, $\delta + 3\beta < 1$ teljesüljön, és definiáljuk μ_t^n , ν_t^n -t a látott módon. Ha*

$$H(\mu_t^n | \nu_t^n) = o(n^{1-2\beta})$$

teljesül $t = 0$ -ra, akkor teljesül egyenletesen $t \in [0, T]$ -re.

A tétel hasonló struktúrájú, mint az 1. Tétel, és hasonló következménye van.

3. Következmény. Tegyük fel, hogy a 2. Tétel feltételei teljesülnek. Legyen $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges sima testfüggvény. Akkor minden $t \in [0, T]$ -re

$$n^{2\beta-1} \sum_{j \in \mathbb{T}^n} g\left(\frac{j}{n}\right) \eta_j(t) \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_{\mathbb{T}} g(x) \rho(t, x) dx,$$

$$n^{\beta-1} \sum_{j \in \mathbb{T}^n} g\left(\frac{j}{n}\right) \zeta_j(t) \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_{\mathbb{T}} g(x) u(t, x) dx.$$

A $\gamma > 1$ feltétel abból adódik, hogy a (7) pde geometriai struktúrája lényegesen különböző a $\gamma < 1$ és a $\gamma > 1$ esetekben. Érdekes, hogy ez a geometriai különbség egyben nagy szerepet játszik a kérdéses egyenlet megoldhatóságában, kezelhetőségében is. A $\gamma < 1$ esetre még a Lax-féle maximum-elvet sem lehet bizonyítani, azaz nem lehet tudni, hogy korlátos kezdeti feltételek mellett a megoldás korlátos marad, nem robban fel ($\gamma \geq 1$ -re van maximum-elv). A 2. Tétel bizonyítása nem csak a relatív entrópia módszeren alapul, nemtriviális parcdiff elemeket is tartalmaz. Ahhoz, hogy kezelni tudjunk bizonyos, az alacsony sűrűségű approximáció miatt megjelenő Poisson-típusú tagokat, kifinomult parcdiff becsléseket kell alkalmazni. A pde rendszer bizonyos speciális Lax entrópiái fontos szerepet játszanak a bizonyítás kulcslépésében.

A fejezet eredményeit a [15] publikáció tartalmazza (közlésre beadott preprint).

6. Hiperbolikus egyensúlyi pont perturbációja

A 2. Tétel állítása úgy is felfogható, mint egy *szinguláris* egyensúlyi pont körüli perturbációk hidrodinamikai viselkedésének leírása. Valóban, a $(0, 0)$ pont, ami körül tekintettük a perturbációt, nem hiperbolikus pontja a (15) Euler egyenletnek, ott ugyanis a Jacobi mátrix a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix konstansszorososa.

Azonban \mathcal{D} pontjai általában hiperbolikusak, így természetesen merül fel a kérdés: hogyan viselkednek a perturbációk, ha egy „közönséges” hiperbolikus pont körül tekintjük őket. Ebben a fejezetben ezzel a kérdéssel foglalkozunk. Ebben a fejezetben ismét a 4. fejezet jelöléseit használjuk.

Tegyük fel, hogy $(u_0, v_0) \in \mathcal{D}$ a (10) egyenlet (erősen) hiperbolikus pontja. Hogy egyszerűsítsünk a jelöléseken, feltesszük, hogy (u_0, v_0) -ben a (13) Jacobi-mátrix diagonális:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

$\lambda \neq \mu$ a két valós sajátérték. Az általános eset mindig visszavezethető erre, ha egy megfelelő lineáris transzformációt alkalmazunk a ζ, η függvényeken. Legyenek $u^*(x), v^*(x)$ adott sima függvények, és tegyük fel, hogy $u^\varepsilon(t, x), v^\varepsilon(t, x)$ a (10) egyenlet megoldása

$$u^\varepsilon(0, x) = u_0 + \varepsilon u^*(x), \quad v^\varepsilon(0, x) = v_0 + \varepsilon v^*(x)$$

kezdeti feltételekkel.

Standard perturbációs technikákat alkalmazva (pl. a „geometric optics” technikát, lsd. [1] vagy [3]) formálisan belátható, hogy

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(t, x) &\approx u_0 + \varepsilon u(\varepsilon t, x - \lambda t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ v^\varepsilon(t, x) &\approx v_0 + \varepsilon v(\varepsilon t, x - \mu t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

amint $\varepsilon \rightarrow 0$ ahol $u(t, x)$ és $v(t, x)$ két *szeparált* parciális differenciál-egyenlet megoldása. Ezek Burgers egyenletek, ha $\Phi''_{uu}(u_0, v_0) \neq 0$, illetve $\Psi''_{vv}(u_0, v_0) \neq 0$, és lineáris transzport egyenletek egyébként.

A formális perturbációs eredményből ismét megsejthető a hidrodinamikai viselkedés. Rögzítsünk egy kis pozitív β paramétert. Tegyük fel, hogy adott egy mikroszkopikus modellünk Ω^n -en, melyre a kezdeti eloszlás olyan, hogy ζ és η sűrűségprofiljai közel vannak a $u_0 + n^{-\beta}u^*(x), v_0 + n^{-\beta}v^*(x)$ függvényekhez. Akkor $n^{1+\beta}t$ idő múlva a profilok közel lesznek a $u_0 + n^{-\beta}u(t, x - n^\beta \lambda t), v_0 + n^{-\beta}v(t, x - n^\beta \mu t)$ függvényekhez. Az eredmény precíz megfogalmazása hasonló struktúrájú lesz, mint a korábbi tételek voltak. Először az időfüggő referencia mértéket definiáljuk: rögzítsünk $u(t, x), v(t, x)$ függvényeket, melyek simák $[0, T] \times \mathbb{T}$ -ben, és megoldásaik a formális perturbációból kapott (szeparált) egyenleteknek. Definiáljuk a

$$\nu_t^n := \prod_{j \in \mathbb{T}^n} \pi_{u_0 + n^{-\beta}u(t, \frac{j}{n} - n^\beta \lambda t), v_0 + n^{-\beta}v(t, \frac{j}{n} - n^\beta \mu t)},$$

mértéket, és jelölje μ_t^n az Ω^n -en értelmezett folyamat valódi eloszlását $n^{1+\beta}t$ idő múlva. Az r rátafüggvényre most csak egy extra feltétel kell: egyenletes, a rendszer méretében négyzetes becslés a generátor spektrális részének reciprokára. Itt nincs szükség a szimmetrikus rész felgyorsítására, mint a 2. Tételben. Most már megfogalmazhatjuk utolsó tételünket.

3. Tétel. *Legyen β rögzített $0 < \beta < \frac{1}{3}$ -del, és definiáljuk μ_t^n -t és ν_t^n -t a látott módon. Ha*

$$H(\mu_t^n | \nu_t^n) = o(n^{1-2\beta})$$

teljesül $t = 0$ -ra, akkor teljesül egyenletesen minden $t \in [0, T]$ -re.

Ha az ún. logaritmikuszoboljev egyenlőtlenség teljesülését tesszük fel az r rátafüggvényre (ez erősebb, mint a spektrális rész feltevése), akkor a 3. Tétel igaz lesz $0 < \beta < \frac{1}{3}$ -re. A tételből az alábbi következmény adódik.

4. Következmény. *Tegyük fel a 3. Tétel feltételeit. Legyen $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ egy sima tesztfüggvény. Akkor tetszőleges $t \in [0, T]$ -re*

$$\begin{aligned} &\left| n^{-1+\beta} \sum_{j \in \mathbb{T}^n} g\left(\frac{j}{n}\right) \left(\zeta_j(n^{1+\beta}t) - u_0 \right) - \int_{\mathbb{T}} g(x) \left(u(t, x - \lambda n^\beta t) \right) dx \right| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \\ &\left| n^{-1+\beta} \sum_{j \in \mathbb{T}^n} g\left(\frac{j}{n}\right) \left(\eta_j(n^{1+\beta}t) - v_0 \right) - \int_{\mathbb{T}} g(x) \left(v(t, x - \mu n^\beta t) \right) dx \right| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \end{aligned}$$

Ez az eredmény kiterjesztése [10]-nek és [14]-nak, ahol az analóg állítást bizonyítják egy-komponensű rendszerekre: azaz konstans egyensúlyi állapot $n^{-\beta}$ rendű perturbációi a Burgers egyenlet szerint fejlődnek, ha az idő $n^{1+\beta}$ -val van skálázva. [10]-ben a megfelelő állítást az ún. teljesen szimmetrikus pálcika rendszerre bizonyítja a szerző (ez egy 1-dimenziós rendszer egy megmaradó mennyiséggel) csatolós módszerekkel, de erősebb formában: $0 < \beta < \frac{1}{2}$ -re és tetszőleges $t > 0$ -ra, még a sokkok megjelenése utáni időre is. A β -ra vonatkozó $\frac{1}{2}$ -es felső határ éles, a $\beta = \frac{1}{2}$ esetben az egyensúlyi fluktuációkat nem lehet megkülönböztetni a perturbációtól. [14]-ban a Yau módszer segítségével azt sikerült belátnunk, hogy az előző állítás *univerzálisan* igaz, egy-komponensű modellek egy széles családjára, de az eredmény csak $0 < \beta < \frac{1}{5}$ -ra és a sima megoldásokra működik.

A 3. Tétel bizonyítása a Yau-féle relatív entrópia módszeren alapszik, de fontos eszköz az 1. Lemmában bizonyított Onsager-típusú reláció is. Az ok, amiért az egyenletek a hidrodinamikai limeszben szeparálódnak, a hiperbolikusság, lényegében a két különböző sajátérték (a „hangsebességek”) okozzák az egyenletek szétválását.

A fejezet eredményeit [19] tartalmazza (közlésre benyújtott preprint).

Hivatkozások

- [1] R. J. DiPerna, A. Majda: The Validity of Nonlinear Geometric Optics for Weak Solutions of Conservation Laws. *Commun. Math. Phys.* **98**: 313-347 (1985)
- [2] J. Fritz: *An Introduction to the Theory of Hydrodynamic Limits*. Lectures in Mathematical Sciences **18**. Graduate School of Mathematics, Univ. Tokyo, 2001.
- [3] J. K. Hunter, J. B. Keller: Weakly nonlinear high frequency waves. *Commun Pure Appl. Math.* **36**, 547-569 (1983)
- [4] M. Kardar, G. Parisi, Y.-C. Zhang: Dynamic scaling of growing interfaces. *Physical Reviews Letters* **56**: 889-892 (1986)
- [5] C. Kipnis, C. Landim: *Scaling Limits of Interacting Particle Systems*. Springer, 1999.
- [6] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Mécanique des fluides*, Éditions Mir, Moscou, 1971
- [7] S. Olla, S. R. S. Varadhan, and H. T. Yau: Hydrodynamical limit for Hamiltonian system with weak noise, *Commun. Math. Phys.* **155**: 523-560 (1993)
- [8] L. E. Reichl: *A Modern Course in Statistical Physics*, Second Edition, John Wiley and Sons, 1998
- [9] F. Rezakhanlou: Hydrodynamic limits for attractive particle systems on \mathbb{Z}^d . *Commun. Math. Phys.* **140**: 417-448 (1991)

- [10] T. Seppäläinen: Perturbation of the equilibrium for a totally asymmetric stick process in one dimension. *Annals of Probability* **29**: 176-204 (2001)
- [11] A. Sommerfeld: *Mechanics of deformable bodies, Lectures on Theoretical Physics, Vol. II.*, Academic Press, NY, 1950
- [12] H. Spohn: *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1991.
- [13] B. Tóth: The 'true' self-avoiding walk with bond repulsion on \mathbb{Z} : limit theorems. *Ann. Prob.* **23**: 1523-1556 (1995)
- [14] B. Tóth, B. Valkó: Between equilibrium fluctuations and Eulerian scaling. Perturbation of equilibrium for a class of deposition models. *Journal of Statistical Physics* **109**: 177-205 (2002)
- [15] B. Tóth, B. Valkó: Onsager relations and Eulerian hydrodynamic limit for systems with several conservation laws. *Journal of Statistical Physics* **112**: 497-521 (2003)
- [16] B. Tóth, B. Valkó: Perturbation of singular equilibria of hyperbolic two-component systems: a universal hydrodynamic limit, submitted preprint, arxiv.org/abs/math.PR/0312256
- [17] B. Tóth, W. Werner: The true self-repelling motion. *Probability Theory and Relative Fields* **111**: 375-452 (1998)
- [18] B. Tóth, W. Werner: Hydrodynamic equation for a deposition model. In: *In and out of equilibrium. Probability with a physics flavor*, V. Sidoravicius Ed., Progress in Probability **51**, Birkhäuser, 227-248 (2002)
- [19] B. Valkó: Perturbation of a hyperbolic equilibrium point in two-component systems, submitted preprint, arxiv.org/abs/math.PR/0402017
- [20] H.T. Yau: Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models. *Letters in Mathematical Physics* **22**: 63-80 (1991)