Elemi bifurkációk diszkretizációja

PhD értekezés

Lóczi Lajos

Témavezető: Garay Barnabás

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Differenciálegyenletek Tanszék

2006. december

1. Bevezetés

A numerikus analízis alapkérdései közé tartozik annak a vizsgálata, hogy differenciálegyenletek esetén az alkalmazott numerikus módszer által szolgáltatott közelítő megoldás mennyire tér el az eredeti egyenlet pontos megoldásától. Az itt szereplő hibabecslések általában véges időintervallumokra és adott kezdeti értékekhez tartozó megoldásokra vonatkoznak.

A diszkretizációs módszerek absztrakt megfogalmazása lehetővé tette, hogy számos esetben a numerikus eljárásokat dinamikai rendszerekként fogjuk fel. Ebben a gondolatkörben alakult ki az elmúlt két évtized során a matematika egy új területe, a *numerikus dinamika*.

A numerikus dinamika fő célja az eredeti egyenlet, valamint a diszkretizációs módszer által meghatározott dinamika összehasonlítása: a fázistérben a lehetséges kezdeti értékekből induló összes megoldást egyszerre vizsgálva, hosszútávon mi a kapcsolat az eredeti és a diszkretizált megoldások között – más szavakkal, az eredeti fáziskép mely tulajdonságai és hogyan őrződnek meg a diszkretizáció során, valamint megfordítva, a számítógép által szolgáltatott diszkretizált megoldásokból a kerekítési hibák figyelembevételével az eredeti megoldás mely tulajdonságai következnek. Közönséges differenciálegyenletek esetén e kérdésekbe a [43] monográfia enged bepillantást, a numerikus dinamika funkcionál-differenciálegyenletekre vonatkozó eredményeit pedig a [20] cikk foglalja össze. Ez utóbbi cikkben a diszkretizációk absztrakt definíciója és alaptulajdonságai is össze vannak gyűjtve. A dinamikai rendszerek általános elméletéről például az [1] és [38] műben olvashatunk.

Egy diszkrét dinamikai rendszert strukturálisan stabilnak mondunk, ha a rendszer ekvivalens a hozzá (valamilyen értelemben) közeli összes többi dinamikai rendszerrel. A dinamikai rendszerek közelségét leggyakrabban C^1-normában mérjük, két dinamikai rendszert pedig C^0-ekvivalensnek mondunk, ha létezik közöttük C^0-osztályú *konjugáció*. Ha két dinamikai rendszer konjugált, akkor topológiai szempontból azonosnak tekinthetők: a fázisképeik topológiai szerkezete azonos. Sokszor a teljes fázisképek azonosítása helyett lokális eredményekkel is megelégszünk, a konjugációt csak valamely pont egy környezetében definiálhatjuk. Megjegyezzük, hogy e topologikus osztályozást teremtő konjugáló leképezések általában nem egyértelműek, és célszerű rájuk *nemlineáris koordinátatranszformációkként* gondolnunk. A diszkrét idejű dinamikai rendszerekkel szemben a folytonos idejű dinamikai rendszereknél esetleg szükség lehet az idő átparaméterezésére, hogy ekvivalenciáról beszélhessünk. Általános konjugációs eredményekkel és a strukturális stabilitás témakörével például [38] foglalkozik.

Egy adott dinamikai rendszer diszkretizációi olyan perturbált dinamikai rendszerek, amelyek kis lépésköz esetén az eredetihez közel fekszenek. Ilyen szituációban megkérdezhető, vajon az eredeti rendszer ekvivalens-e egy tetszőleges, hozzá közeli diszkretizáltjával. Ha e kérdésre a válasz igenlő, akkor az eredeti dinamikai rendszert *numerikusan strukturálisan stabilnak* mondjuk. Közönséges differenciálegyenletek esetén – például az origó körül lokálisan – mindez a következőképpen fogalmazható meg. Tekintsük az $\dot{x} = f(x)$ autonóm egyenletet és rögzítsünk egy elég kicsi $h > 0$ számot. Jelölje $\Phi(h, x)$ a differenciálegyenlet x pontból induló megoldását h idő múlva. A $\Phi(h, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvényt a differenciálegyenlethez tartozó *h-idejű megoldóoperátornak* hívjuk. Tekintsük e leképezés valamely *h-lépésközű* $\varphi(h, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diszkretizáltját, ahol φ egy tetszőleges egylépéses p-edrendű numerikus módszert jelöl: ez lényegében azt jelenti, hogy φ (jelen esetben az origó körül) teljesíti az approximációs tulajdonságot, nevezetesen, hogy alkalmas $h_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ és *const* > 0 számokkal tetszőleges $h \in (0, h_0]$ és $|x| \leq \varepsilon_0$ mellett fennáll az

$$|\Phi(h, x) - \varphi(h, x)| \leq const \cdot h^{p+1}$$

egyenlőtlenség. Az f és φ függvényről annyit teszünk fel még, hogy elegendően sima. Az eredeti $\Phi(h, \cdot)$ leképezés és a diszkretizált $\varphi(h, \cdot)$ leképezés iteráltjai egy-egy diszkrét idejű dinamikai rendszert határoznak meg. Numerikus strukturális stabilitás akkor áll fenn, ha e két dinamika lokálisan konjugált, vagyis, ha alkalmas $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ és $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$ környezetekkel létezik olyan

$J : [0, h_0] \times U \to V$ függvény, hogy $J(h, \cdot)$ minden $h \in [0, h_0]$ mellett homeomorfizmus és a

$$\Phi(h, J(h, x)) = J(h, \varphi(h, x))$$

konjugációs egyenlet teljesül minden olyan $x \in U$ esetén, melyre $\varphi(h, x) \in U$.

A numerikus strukturális stabilitás a $\Phi(h, \cdot)$ dinamikai rendszer kvalitatív jellegű tulajdonsága. *Kvantitatívvá* ezt például úgy tehetjük, ha megbecsüljük a konjugáció és az identitás leképezés távolságát. A továbbiakban a $|J(h, x) - x|$ kifejezés becsléseit *közelségi becsléseknek* fogjuk hívni – az ilyen típusú becslések alkotják egyébként a jelen értekezés központi részét.

A numerikus strukturális stabilitás kérdését közönséges differenciálegyenletek esetén különféle *hiperbolicitási* feltételek mellett (például gradiensszerű Morse-Smale rendszerekre, illetve az „Axiom A" és az erős transzverzalitás feltételeit teljesítő rendszerekre) általános esetben tisztázta a [17], [30] és [31] cikk. Az általános tételek speciális eseteiként például az alábbi típusú eredmények igazak. A *nemegyensúlyi helyzet* környezetében érvényes lokális kiegyenesíthetőségi tétel, illetve a *hiperbolikus egyensúlyi helyzet* körüli Hartman–Grobman-lemma diszkretizációkra vonatkozó numerikus megfelelői kimondják, hogy az eredeti folyam által meghatározott $\Phi(h, \cdot)$ dinamika és a diszkretizált $\varphi(h, \cdot)$ dinamika egymással konjugált, továbbá mindkét szituációban $\mathcal{O}(h^p)$-nagyságrendű közelségi becslés igaz.

Természetes módon felmerül a kérdés, hogy strukturális stabilitás szempontjából mi a helyzet a legegyszerűbb *nemhiperbolikus* esetekben, azaz például közönséges differenciálegyenletek olyan egyparaméteres családjában, ahol a hiperbolicitás valamely paraméterértéknél megsérül. Az ilyen pontokat *bifurkációs pontoknak* hívjuk, és a továbbiakban ilyen pontok környezetében fogunk vizsgálódni. Dolgozatunk így a numerikus bifurkációk témakörébe is illeszkedik. A numerikus módszerek viselkedéséről és tulajdonságairól ad alapos áttekintést közönséges differenciálegyenletek bifurkációs pontjainak közelében a [22] könyv. A [6] összefoglaló jellegű cikk – melynek irodalomjegyzéke több mint 200 hivatkozást tartalmaz – numerikus módszerek különféle konvergenciakérdéseivel foglalkozik a legfontosabb típusú bifurkációs pontokban.

Egy nemhiperbolikus egyensúlyi helyzet környezetében az eredeti és a diszkretizált dinamika nem feltétlenül konjugált, amint azt a síkbeli centrum és az explicit Euler-módszer jól ismert esete mutatja. (Tekintsük ugyanis a síkbeli $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ egyenletrendszert. Ennek megoldásgörbéi az origó középpontú körök, melyek, mint invariáns görbék, az egyenlet Euler-diszkretizációjakor *tetszőlegesen kicsi* $h > 0$ lépésköz mellett spirálokká perturbálódnak – a két dinamika tehát biztosan nem lehet konjugált.) Ezzel kapcsolatban lásd például a [8] és [15] cikket.

Bizonyos típusú bifurkációs pontok közelében azonban az eredeti és diszkretizált dinamika között a konjugáció léte bebizonyítható. Tekintsük az $\dot{x} = f(x, \alpha)$ egyenletcsaládot, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ a bifurkációs paraméter. Az előzőekhez hasonlóan jelölje $\Phi(h, \cdot, \alpha)$ és $\varphi(h, \cdot, \alpha)$ az egyenletcsalád megoldóoperátorát és h-lépésközű diszkretizáltját, továbbá tegyük fel, hogy a bifurkációs pont az $x = 0$ origó és bifurkáció az $\alpha = 0$ paraméterértéknél lép fel. Farkas Gyula (1972–2002) [7] cikkében nyeregcsomó-bifurkációs pont közelében hasonlította össze az eredeti és a diszkretizált dinamikát, azáltal, hogy konjugációt konstruált az eredeti folyam $\Phi(1, \cdot, \alpha)$ 1-idejű megoldóoperátora és a $\varphi^{[N]}(h, \cdot, \alpha)$ leképezés – vagyis az 1-idejű megoldóoperátor $h = 1/N$ lépésközű diszkretizáltjának N-edik iteráltja – között, rögzített, elegendően nagy $N \in \mathbb{N}^+$ esetén. A [7] cikk tartalmazza annak „bizonyítását" is, hogy a centrális sokaságon a konstruált konjugáció $\mathcal{O}(h^p)$-közel van az identitáshoz. Az alaposabb elemzés azonban kimutatja, hogy a legfontosabb egyenlőtlenség bizonyítása az $\alpha \leq 0$ esetben kicsit hiányos, az $\alpha > 0$ esetben viszont egyáltalán nem kielégítő. Az $\alpha > 0$ esetet a [7] cikk egy, a szimmetriára utaló megjegyzéssel véli elintézettnek. A szimmetria azonban a jelzett formában nem áll fenn: az igazi technikai nehézség rejtve és megoldatlanul maradt.

Li [32] cikkében mutatja meg ismét, hogy egy nyeregcsomó-bifurkációs pont numerikusan strukturálisan stabil, ugyanazt a két leképezéscsaládot hasonlítva össze, mint Farkas Gyula.

A bizonyítást Sotomayor generikus bifurkációk strukturális stabilitásával foglalkozó [40] és [41] cikkeire vezeti vissza. Közelségi becslést azonban Li nem mond ki.

Az irodalomban sokat vizsgálták, hogy mi történik az eredeti megoldások bizonyos kitüntetett invariáns halmazaival – pl. egyensúlyi helyzetekkel vagy periodikus pályákkal – a diszkretizáció során. A [45] cikk például hiperbolikus egyensúlyi helyzet és bizonyos típusú bifurkációs pontok közelében hasonlítja össze az eredeti és diszkretizált dinamikát konzisztencia szempontjából. A szerzők az Euler-módszer bifurkációs konzisztenciáját mutatják meg nyeregcsomó-, transzkritikus-, villa- és Hopf-bifurkációs pontok közelében: lényegében azt igazolják, hogy az eredeti rendszer bifurkációs pontja diszkretizáció során a módszer rendjétől függően nem mozdulhat el túlságosan. Ezek az eredmények a konjugációs eredményeknél gyengébbek. A Hopf-bifurkáció megjelenéséről Euler-, illetve Runge–Kutta-diszkretizációk esetén lásd pl. a [26] és [37] cikkeket. Mivel e bifurkációnál periodikus megoldások lépnek fel, ezért az eredeti dinamika idejének átparaméterezése szükséges. A Hopf-bifurkáció diszkretizációjával kapcsolatos *konjugációs* eredmények az irodalomban nem lelhetők fel.

2. Az értekezés eredményeinek összefoglalása

Értekezésem célja az, hogy a nyeregcsomó-, a transzkritikus- és a villa-bifurkációk esetét tárgyalva megvizsgáljam e legelemibb bifurkációs pontok numerikus strukturális stabilitását: konjugáció megkonstruálásával kvalitatív, közelségi becslések megfogalmazásával pedig kvantitatív szempontból.

Mivel mindhárom alapbifurkáció esetén a centrális sokaság egydimenziós, az $\dot{x} = f(x, \alpha)$ rendszer a centrálissokaság-redukció után egydimenzióssá ($x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$) válik. A továbbiakban tehát feltesszük, hogy $\Phi(h, \cdot, \alpha) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\varphi(h, \cdot, \alpha) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ már a megfelelő centrális sokaságokra megszorított dinamikákat jelöli. A konjugáció konstrukciója és a közelségi becslések így alapvetően egydimenziós, bár h-tól és α-tól függő kétparaméteres problémává válnak: a paraméterek szerint egyenletes becslések megfogalmazása kívánatos.

Elsődleges cél, hogy – a nyeregcsomó-bifurkációra vonatkozó imént idézett konjugációs eredmény kiterjesztéseként – tetszőleges, de rögzített $h \in [0, h_0]$ esetén az eredeti differenciálegyenlet h-idejű és α-tól függő egyparaméteres $\Phi(h, \cdot, \alpha)$ leképezéscsaládját összehasonlítsam e család egyparaméteres $\varphi(h, \cdot, \alpha)$ diszkretizáltjaival. A bifurkációs pontbeli elfajuláson kívül a $h \to 0^+$ határesetben mindkét család tagjai az identikus leképezéshez tartanak, melyről perturbációelméleti szempontból tudjuk, hogy nehezen kezelhető.

Elsődleges feladatunk képletekkel némileg pontosabban megfogalmazva tehát a következőképpen fest. Tegyük fel, hogy az elegendően sima jobboldalú $\dot{x} = f(x, \alpha)$ egyenletcsaládban az origó a felsorolt három bifurkációs pont egyike, és tegyük fel, hogy alkalmas $h_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$ és $const > 0$ számmal tetszőleges $h \in (0, h_0]$, $|x| \leq \varepsilon_0$ és $|\alpha| \leq \alpha_0$ mellett az eredeti és a p-edrendű diszkretizált dinamikák között fennáll a

$$|\Phi(h, x, \alpha) - \varphi(h, x, \alpha)| \leq const \cdot h^{p+1} \tag{1}$$

approximációs tulajdonság. Ekkor minden $h \in (0, h_0]$ és $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ esetén megkonstruálandó egy $J(h, \cdot, \alpha) : [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \to \mathbb{R}$ homeomorfizmus úgy, hogy alkalmas, α-tól függő $\widetilde{\alpha}$ számmal minden $x \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ mellett a

$$J(h, \Phi(h, x, \alpha), \alpha) = \varphi(h, J(h, x, \alpha), \widetilde{\alpha}) \tag{2}$$

konjugációs egyenlet teljesül. Ebben a függvényegyenletben az α bifurkációs paraméter $\widetilde{\alpha}$ „kiigazítására” általában szükség van, mert a diszkretizációk az $x = 0$ origót – vagyis az eredeti rendszer bifurkációs pontját – kissé eltolhatják. (Beláttuk azonban, hogy az $|\alpha - \widetilde{\alpha}|$ eltolódás mindhárom esetben az állandó célként kitűzött $\mathcal{O}(h^p)$-nagyságrenden belül marad, ez tehát a későbbi közelségi becsléseket hátrányosan nem befolyásolja.)

A konjugáció létezésének igazolása mellett a másik fő kérdésünk annak vizsgálata, hogy a megkonstruált $J(h,\cdot,\alpha)$ konjugáció mennyire tér el az identitástól. A feladat igazi nehézsége ebben rejlik.

2.1. A konjugációk megkonstruálása

Először a bifurkációelméletben szokásos *normálforma-transzformációkat* végezzük el, aminek során a $\Phi(h,\cdot,\alpha)$ és $\varphi(h,\cdot,\alpha)$ leképezéseket kanonikus alakra hozzuk. A normálforma-transzformációk *előzetes konjugációkként* is felfoghatók, vagyis olyan nemlineáris koordinátatranszformációkként, amelyek konkretizálják és egyszerűsítik a későbbi vizsgálatokat. A három bifurkációs pont közelében a szóbanforgó leképzéscsaládjaink a következő alakra transzformálhatók. (A tételekben f alsó indexei a megfelelő változók szerinti parciális deriváltakat jelölik.)

1. Tétel (Nyeregcsomó-bifurkáció). Tegyük fel, hogy a megfelelően sima jobboldalú $\dot{x} = f(x,\alpha)$ egyenletcsaládnak az $(x,\alpha) = (0,0)$ origó nyeregcsomó-bifurkációs pontja, vagyis fennállnak az alábbiak: $f \in C^{p+6}$, $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = 0$, $f_{xx}(0,0) \neq 0$ és $f_\alpha(0,0) \neq 0$. Ekkor létezik olyan sima, invertálható koordináta- és paramétertranszformáció, amely az

$$x \mapsto \Phi(h,x,\alpha)$$

leképezést az

$$x \mapsto \mathcal{N}_\Phi(h,x,\alpha) := h\alpha + x + s\cdot hx^2 + hx^3\cdot\eta(h,x,\alpha)$$

kanonikus alakra hozza. Hasonlóképpen, létezik olyan sima, invertálható koordináta- és paramétertranszformáció, amely az

$$x \mapsto \varphi(h,x,\alpha)$$

leképezést az

$$x \mapsto \mathcal{N}_\varphi(h,x,\alpha) := h\alpha + x + s\cdot hx^2 + hx^3\cdot\widetilde{\eta}(h,x,\alpha)$$

alakra hozza. A fentiekben az $s = \pm 1$ előjel adott Φ és φ esetén megegyezik, η és $\widetilde{\eta}$ pedig megfelelően sima leképezések. Igaz továbbá, hogy a Φ és φ leképezéseket kanonikus alakra hozó transzformációk egymástól legfeljebb $\mathcal{O}(h^p)$ távolságra vannak, valamint, hogy $|\eta-\widetilde{\eta}| = \mathcal{O}(h^p)$. ■

2. Tétel (Transzkritikus-bifurkáció). Tegyük fel, hogy az $\dot{x} = f(x,\alpha)$ egyenletcsaládnak az $(x,\alpha) = (0,0)$ origó transzkritikus-bifurkációs pontja, azaz $f \in C^{p+6}$, $f(0,\alpha) = 0$ (minden $|\alpha| \leq \alpha_0$ esetén), $f_x(0,0) = 0$, $f_{xx}(0,0) \neq 0$ és $f_{x\alpha}(0,0) \neq 0$. Tegyük fel továbbá, hogy a diszkretizáció olyan, hogy $\varphi(h,0,\alpha) = 0$ fennáll minden $h \in (0,h_0]$ és $|\alpha| \leq \alpha_0$ esetén. Ekkor létezik olyan sima, invertálható koordináta- és paramétertranszformáció, amely az

$$x \mapsto \Phi(h,x,\alpha)$$

leképezést az

$$x \mapsto \mathcal{N}_\Phi(h,x,\alpha) := (1+h\alpha)x + s\cdot hx^2 + hx^3\cdot\eta(h,x,\alpha)$$

alakra hozza. Hasonlóképpen, létezik olyan sima, invertálható koordináta- és paramétertranszformáció, amely az

$$x \mapsto \varphi(h,x,\alpha)$$

leképezést az

$$x \mapsto \mathcal{N}_\varphi(h,x,\alpha) := (1+h\alpha)x + s\cdot hx^2 + hx^3\cdot\widetilde{\eta}(h,x,\alpha)$$

alakra hozza. A fentiekben az $s = \pm 1$ előjel adott Φ és φ esetén megegyezik, η és $\widetilde{\eta}$ pedig megfelelően sima leképezések. Igaz továbbá, hogy a Φ és φ leképezéseket kanonikus alakra hozó transzformációk egymástól legfeljebb $\mathcal{O}(h^p)$ távolságra vannak, valamint, hogy $|\eta-\widetilde{\eta}| = \mathcal{O}(h^p)$. ■

3. Tétel (Villa-bifurkáció). Tegyük fel, hogy az $\dot{x} = f(x,\alpha)$ egyenletcsaládnak az $(x,\alpha) = (0,0)$ origó villa-bifurkációs pontja, vagyis $f \in C^{p+7}$, $f(0,\alpha) = 0$ (minden $|\alpha| \le \alpha_0$ esetén), $f_x(0,0) = 0$, $f_{xx}(0,0) = 0$, $f_{xxx}(0,0) \neq 0$ és $f_{x\alpha}(0,0) \neq 0$. Tegyük fel továbbá, hogy a diszkretizáció olyan, hogy $\varphi(h,0,\alpha) = 0$, $\varphi_x(h,0,0) = 1$ és $\varphi_{xx}(h,0,0) = 0$ fennáll minden $h \in (0,h_0]$ és $|\alpha| \le \alpha_0$ esetén. Ekkor létezik olyan sima, invertálható koordináta- és paramétertranszformáció, amely az

$$x \mapsto \Phi(h,x,\alpha)$$

leképezést az

$$x \mapsto \mathcal{N}_\Phi(h,x,\alpha) := (1+h\alpha)x + s\cdot hx^3 + hx^4\cdot\eta(h,x,\alpha)$$

kanonikus alakra hozza. Hasonlóképpen, létezik olyan sima, invertálható koordináta- és paramétertranszformáció, amely az

$$x \mapsto \varphi(h,x,\alpha)$$

leképezést az

$$x \mapsto \mathcal{N}_\varphi(h,x,\alpha) := (1+h\alpha)x + s\cdot hx^3 + hx^4\cdot\widetilde{\eta}(h,x,\alpha)$$

alakra hozza. A fentiekben az $s = \pm 1$ előjel adott Φ és φ esetén megegyezik, η és $\widetilde{\eta}$ pedig megfelelően sima leképezések. Igaz továbbá, hogy a Φ és φ leképezéseket kanonikus alakra hozó transzformációk egymástól legfeljebb $\mathcal{O}(h^p)$ távolságra vannak, valamint, hogy $|\eta-\widetilde{\eta}| = \mathcal{O}(h^p)$. ■

4. Következmény. Az (1) approximációs tulajdonság a megfelelő normálformákra

$$|\mathcal{N}_\Phi(h,x,\alpha) - \mathcal{N}_\varphi(h,x,\alpha)| \le c\cdot h^{p+1}|x|^\omega$$

alakban öröklődik át, ahol $\omega = 3$ a nyeregcsomó- és transzkritikus bifurkáció, valamint $\omega = 4$ a villa-bifurkáció esetén, a $c > 0$ állandó pedig h-tól, x-től és α-tól független. ■

A bizonyítások a [35] könyv megfelelő fejezeteit követik, az ottani transzformációkba a h diszkretizációs paramétert kellett alkalmasan beépíteni. A tételekben az f jobboldalról és a diszkretizációról mindig olyan simaságot teszünk fel, hogy a Φ és φ függvények a kívánt rendig sorbafejthetők legyenek és – a későbbiek kedvéért – a normálformák utolsó tagjában szereplő η és $\widetilde{\eta}$ függvények még kétszer deriválhatók legyenek, úgy, hogy az utolsó derivált korlátos. (A „sima” szó a dolgozatban tehát mindvégig véges simasági osztályt jelent.) A diszkretizációkra vonatkozó alapvető eredményeket a [16] és [18] cikk tartalmazza. A tételeinkben kimondott becslésekhez az inverz- és implicitfüggvény-tételek bizonyos kvantitatív változatait (lásd pl. [47]) alkalmaztam. A későbbi közelségi becslések egyébként ezeken alapulnak majd.

A normálforma-transzformációk során az x változót és az α bifurkációs paramétert egyaránt transzformáljuk (a h diszkretizációs paramétert azonban nem). E koordinátatranszformációk után többek között feltehető, hogy az $\mathcal{N}_\Phi(h,\cdot,\alpha)$ és $\mathcal{N}_\varphi(h,\cdot,\alpha)$ normálformacsaládok bifurkációs pontja egyaránt az origó.

Számításaink során menet közben fény derült a *Runge–Kutta-módszercsalád* (lásd pl. [24]) újabb érdekes tulajdonságaira: bebizonyítottuk, hogy elegendően kis h lépésköz esetén tetszőleges, legalább elsőrendű Runge–Kutta-módszer egzaktul megőrzi a nyeregcsomó- és csúcsbifurkáció n-dimenziós, valamint a transzkritikus- és villa-bifurkáció egydimenziós feltételeit. E technikai jellegű eredmény pontos kimondásától itt most eltekintünk. (A bifurkációk n-dimenziós leírása megtalálható pl. a [3] cikkben. Érdekes, hogy a felhasznált magasabbrendű láncszabályt több alapvető forrásmunkában is hibásan fogalmazták meg, amint azt [4] kimutatja.)

Ezek az eredményeink a [9]–[14] cikksorozatban elvégzett vizsgálatok kiegészítésének tekinthetők, ahol a szerző megvizsgálja, hogy a Runge–Kutta-módszerek milyen tulajdonságokat őriznek meg elemi bifurkációs pontok közelében. Eredményünkből az is következik, hogy a fenti normálforma-transzformációk némelyikére nincs szükség, ha a $\varphi(h,\cdot,\alpha)$ leképezés Runge–Kutta-módszerből származik: például $\widetilde{\alpha}=\alpha$ a (2) egyenletben megfelelő. Fennáll továbbá, hogy a 2. és 3. tételek feltételei Runge–Kutta-típusú φ-re automatikusan teljesülnek.

Az imént említett „elegendően kis h lépésköz" lényeges feltevés, ugyanis „nagy" lépésközök esetén ismert, hogy a numerikus módszerek ún. parazita megoldásokat is előállíthatnak és igencsak bonyolult módon viselkedhetnek. Runge–Kutta-módszerekről ezzel kapcsolatban lásd pl. a [23] és [42] cikket.

Fenti 1–3. tételeinkhez az alábbi megjegyzéseket fűzzük. Bizonyos könyvek (pl. [46] vagy [21]) nem pontosan írják fel a leképezésekre vonatkozó transzkritikus-bifurkáció feltételeit: az ott felsoroltak esetén nem feltétlenül lép fel transzkritikus-bifurkáció, amint azt egy példával megmutattuk.

A villa-bifurkáció létezéséhez az irodalomban gyakran megkövetelik, hogy az f jobboldal páratlan függvény legyen, azaz, hogy $f(x,\alpha)=-f(-x,\alpha)$ álljon fenn. A 3. tétel rámutat, hogy erre a feltevésre valójában nincs szükség: a tétel így általában *aszimmetrikus* villa-bifurkáció létezését garantálja. A bizonyításban az egyik lépés során azzal a kérdéssel találjuk szembe magunkat, hogy ha adott valós függvények egy elegendően sima egyparaméteres $g(x,\alpha)$ családja és az $\alpha=0$ paraméterértéknél $g(x,\alpha)$-nak az origó k-szoros gyöke, akkor mi mondható a valós gyökök számáról és szerkezetéről az $(x,\alpha)=(0,0)$ pont kicsiny környezetében. Komplex analitikus, valós analitikus, valós C^∞-függvények, sőt véges simasági osztályok esetén az ilyen típusú kérdésekkel Weierstrass- és Malgrange *preparációs tételei*, illetve a Mather-féle *osztási tétel* (lásd pl. [39] vagy [1]) és általánosításai foglalkoznak, mely eredményeket a bifurkációelméletben és a szingularitáselméletben előszeretettel használják. Mi most (véges simaság esetén) ezektől függetlenül adtunk elemi bizonyítást arra, hogy bizonyos alakú g leképezés esetén $\alpha=0$ kis környezetében egy háromszoros gyöktényező hogyan perturbálódhat.

Megfigyelhető, hogy a 2. és 3. tételben a φ diszkretizációról több tulajdonságot is feltettünk. Egyszerű példákkal illusztráltuk ezen feltevések szükségességét: nélkülük a $\varphi(h,\cdot,\alpha)$ családban az origó környezetében nem biztos, hogy létezik transzkritikus- vagy villa-bifurkációs pont.

Ezek után a redukciós lépések után a konjugáció kérdése a megfelelő normálformák közötti

$$J(h,\mathcal{N}_\Phi(h,x,\alpha),\alpha)=\mathcal{N}_\varphi(h,J(h,x,\alpha),\alpha) \tag{3}$$

függvényegyenlet megoldására egyszerűsödik. Az alábbi eredményeket igazoltuk.

5. Tétel. Az 1–3. tétel feltételei mellett a (3) egyenletnek minden, elegendően kicsi $h\in(0,h_0]$, $|x|\le\varepsilon_0$ és $|\alpha|\le\alpha_0$ mellett létezik olyan megoldása, melyre a $J(h,\cdot,\alpha)$ függvény homeomorfizmus. ■

A konjugációkat a *fundamentális tartományok* módszerével konstruáltuk meg: rögzített h és α mellett a $J(h,\cdot,\alpha)$ függvényt egy alkalmas intervallumon előírva a (3) egyenlet átrendezésével rekurzív módon tudjuk kiterjeszteni.

A fundamentális tartományok módszere pl. a [35] könyvben található meg. A függvényegyenletekről például a klasszikus [34] mű nyújt összefoglalót. A dinamikai rendszerek elméletében fontos függvényegyenletek és konjugációs kérdések különböző simasági osztályokban történő megoldását a [2] monográfia tartalmazza. Az egydimenziós nemhiperbolikus dinamikai rendszerek modern, nehéz kérdéseiről [36] ad kitűnő áttekintést.

Eddigi eredményeink összefoglalásaképpen elmondható, hogy nyeregcsomó-bifurkációs pont közelében a $\Phi(h,\cdot,\alpha)$ család numerikusan strukturálisan stabilis, ám a transzkritikus- és villa-bifurkációs pontok általános diszkretizációkra nézve numerikusan *nem* strukturálisan stabilak. Ha azonban a megengedett φ perturbációk halmazát leszűkítjük a 2. és 3. tételben megfogalmazott tulajdonságú diszkretizációkra, akkor a numerikus strukturális stabilitás ezen bifurkációs pontok közelében is helyreáll.

2.2. A közelségi becslések

A J konjugációk megkonstruálása után célunk most az, hogy minél jobb felső becslést adjunk az $|x - J(h,x,\alpha)|$ különbségekre a bifurkációs pontok közelében. Technikai szempontból e kérdés tehát a függvényegyenletek kvantitatív elméletébe illeszkedik.

Mindhárom bifurkációtípus esetén példákkal illusztráltuk annak lehetőségét, hogy $\Phi(h,\cdot,\alpha)$ és $\varphi(h,\cdot,\alpha)$ fixpontjainak távolsága alulról és felülről is $\mathcal{O}(h^p)$-vel becsülhető. Mivel a konjugáció fixpontot fixpontba kell, hogy képezzen, ebből az következik, hogy az $|x - J(h,x,\alpha)|$ eltérésre $\mathcal{O}(h^p)$-nél jobb felső becslés általában nem adható.

6. Tétel (Transzkritikus- és villa-bifurkáció). Tegyük fel, hogy a 2. és 3. tétel feltételei fennállnak. Ekkor az általunk konstruált J konjugációk esetén *transzkritikus-* és *villa-bifurkációs* pontok alkalmasan kis környezetében *optimális* közelségi becslések igazak, más szavakkal, van olyan pozitív $const > 0$ szám, hogy minden $h \in (0,h_0]$, $|x| \le \varepsilon_0$ és $|\alpha| \le \alpha_0$ esetén

$$|x - J(h,x,\alpha)| \le const \cdot h^p.$$

Igaz továbbá, hogy a $J(h,\cdot,\alpha)$ konjugációk az első és harmadik változójuktól *is* folytonosan függenek. ■

A bizonyítás során a konjugációk rekurzív definíciójából megmutatjuk, hogy a közelségi becslések lényegében diszkrét Gronwall-típusú becsléseken alapulnak, azaz

$$\left(h \sum_{i=0}^{n} |x_i|^{\omega} \left(\prod_{j=i}^{n} \left(\frac{d}{dx} \mathcal{N}_{\Phi} \right) (h, x_i, \alpha) \right) \right) \cdot h^p \tag{4}$$

alakú kifejezések becslésére van szükség, ahol a transzkritikus bifurkációnál $\omega = 3$, a villa-bifurkáció esetén pedig $\omega = 4$. Az $x_i \equiv x_i(h,\alpha)$ sorozatot – alkalmas x_0 kezdőérték mellett – az $\mathcal{N}_{\varphi}(h,\cdot,\alpha)$ normálforma iteráltjaiként definiáljuk.

A (4)-ben szereplő kifejezések felső becslésében a nehézséget egyrészt az jelenti, hogy a deriváltak a bifurkációs pontnál 1 körül imbolyognak, így a produktum adaléka közvetlenül nem látható, másrészt az x_i sorozat tagjai csak implicit módon, egy-egy nemlineáris rekurzióval vannak definiálva, „zárt” formula x_i-re tehát aligha várható.

Ezen a ponton jelentett felbecsülhetetlen segítséget Thorsten Hüls paraméteres *modellfüggvénye* (lásd pl. [27], [28] és [29]), ami nem más, mint egy zárt alakban megoldható nemlineáris rekurziócsalád. Nevezetesen, ha $a > 0$, $q \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges számok és $z_0 > 0$ elég kis pozitív szám, akkor a

$$z_{n+1} := \frac{z_n}{(1 + aqz_n^q)^{1/q}}$$

képlettel felírt rekurzió megoldása

$$z_n = \frac{z_0}{(1 + naqz_0^q)^{1/q}}.$$

E formulákat a *Mathematica*-program szimbolikus és numerikus erejével összekapcsolva sikerült az x_i sorozatokra olyan becsléseket bizonyítani, amelyek a 6. tétel optimális eredményeihez elvezettek.

Térjük rá végül a nyeregcsomó-bifurkációval kapcsolatos közelségi becslésekre. Az 1. tételben a szimmetria miatt a továbbiakban nyilván feltehető, hogy a normálformákban $s = 1$ áll. (Ez annak felel meg, hogy $\alpha < 0$ esetén a normálformákban két-két fixpont van jelen, melyek $\alpha = 0$-nál a bifurkációs pontban összeolvadnak és az $\alpha > 0$ paramétertartományban eltűnnek.)

7. Tétel (Nyeregcsomó-bifurkáció, $\alpha \le 0$ eset). Az 1. tétel feltételeinek teljesülése esetén nyeregcsomó-bifurkációs pont környezetében a *fixpontokat tartalmazó* részben optimális közelségi becslés igaz, vagyis van olyan pozitív *const* > 0 szám, hogy minden $h \in (0, h_0]$, $|x| \le \varepsilon_0$ és $\alpha \le 0$ esetén

$$|\, x - J(h, x, \alpha)| \le const \cdot h^p.$$

Igaz továbbá, hogy a $J(h, \cdot, \alpha)$ konjugációk az első és harmadik változójuktól is folytonosan függenek. ■

8. Tétel (Nyeregcsomó-bifurkáció, $\alpha > 0$ eset). Az 1. tétel feltételeinek teljesülése esetén nyeregcsomó-bifurkációs pont környezetében a *fixpontmentes* tartományban az alábbi szinguláris becslést igazoltuk: alkalmas pozitív *const* > 0 számmal minden $h \in (0, h_0]$, $|x| \le \varepsilon_0$ és $\alpha > 0$ esetén

$$|\, x - J(h, x, \alpha)| \le const \cdot \ln \frac{1}{\alpha} \cdot h^p. \ ■$$

A közelségi becslések ezekben a tételekben is a (4)-es típusú kifejezések felső becsléseitől függenek. A nehézség azonban itt az, hogy nyeregcsomó-bifurkációnál csak $\alpha = 0$ esetén ismerünk modellfüggvényt. Az x_i iteráltak sebességbecslését $\alpha < 0$ esetén sikerült kiváltani egy, a h diszkretizációs paraméter törtkitevős hatványaira vonatkozó indukciós bizonyítással. Az $\alpha > 0$ esetben kidolgozott nagyságrendi becslések az $\alpha = 0$ esethez tartozó modellfüggvény konvergenciabecsléseinek finomításai. A korábbi irodalomban [44] tárgyalja az ezekhez hasonló rekurziók konvergenciasebességét – igaz, kevésbé explicit módon. Az [5] könyv az aszimptotikus analízis szemszögéből elemzi az egyik fontos sebességbecslés meglehetősen erős alakját (amely azonban számunkra közvetlenül nem használható, mindenesetre iránymutatásnak kitűnő).

A 8. tételben külön gondot okoz a fixpontok hiánya: az x_i iteráltak $\alpha > 0$ esetén csak véges ideig tartózkodnak a bifurkációs pont egy rögzített környezetében, ennek az iterációszámnak a megbecslése viszont nem tűnik könnyűnek. (A Mandelbrot-halmaz definíciójában is szereplő speciális kvadratikus iteráció esetén ilyen típusú lépésszámbecsléseket [33] bizonyít. Erről az *intermittenciának* nevezett jelenségről [25] ad sok numerikus kísérlettel fűszerezett áttekintést. Az intermittencia „skálázási törvényének” heurisztikus levezetését [21] tartalmazza. Az egyik becslés kapcsán tett elemi észrevételt [19] fejti ki általánosabb környezetben.)

A 8. tételben az sem látszik, hogy vajon a $J(h, \cdot, \alpha)$ homeomorfizmus a harmadik változójától folytonosan függ-e.

Megjegyezzük, hogy az eddigi összes konjugáció-konstrukcióban a $J(h, 0, \alpha) := 0$ természetes választással éltünk. A 8. tétel „erejét” két dolog támasztja alá. Numerikus kísérletekkel egészen az $\alpha \approx 10^{-14}$-es tartományig példákon illusztráltuk, hogy az általunk megadott természetes konstrukcióban az identitás és J eltérése $\mathcal{O}(\ln \frac{1}{\alpha} \cdot h^p)$-vel *alulról* becsülhető, ami azt jelzi, hogy az $\alpha \to 0^+$ határesetben a 8. tételbeli közelségi becslés optimális. Másrészt bebizonyítottuk, hogy ha a 4. következményben megfogalmazott, normálformák különbségére vonatkozó becslésben $\omega = 3$ helyett tetszőleges $\omega > 3$ kitevő állna, akkor $\alpha > 0$ esetén is $|\, x - J(h, x, \alpha)| \le const \cdot h^p$ volna igaz.

Kiegészítésképpen megjegyezzük, hogy az eredeti $\omega = 3$ kitevővel tetszőleges, de *rögzített* $\delta > 0$ esetén $\mathcal{O}(h^p \cdot \alpha^{-\delta})$ nagyságú közelségi becslések viszonylag könnyen nyerhetők. Igazoltuk továbbá, hogy a 8. tétel feltételei mellett az (α, x)-sík $\alpha > 0$ félsíkjának egy zsugorodó, parabola alakú tartományán egyenletes $\mathcal{O}(h^p)$ közelségi becslés igaz.

A J konjugációk természetes konstrukciója alapján a közelségi becslések az alábbi módon átfogalmazhatók. Az állítás kimondja, hogy a fixpontágakkal rendelkező bifurkációs tartományokban a diszkretizált pálya és az eredeti pálya egyenletesen közel fekszik egymáshoz.

9. Következmény. Alkalmas *const* > 0 számmal minden, elegendően kicsiny $h \in (0, h_0]$, $|x_0|$ és

- (transzkritikus- és villa-bifurkáció esetén) $|\alpha| \leq \alpha_0$
- (nyeregcsomó-bifurkáció esetén) $-\alpha_0 \leq \alpha \leq 0$

paraméterértékre tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ mellett fennáll, hogy

$$|\mathcal{N}_{\Phi}^{[n]}(h, x_0, \alpha) - \mathcal{N}_{\varphi}^{[n]}(h, x_0, \alpha)| \leq \mathit{const} \cdot h^p,$$

ahol $\mathcal{N}^{[n]}(h, x, \alpha)$ az $\mathcal{N}(h, \cdot, \alpha)$ leképezés n-edik iteráltját jelöli az x pontban. ■

Eddigi valamennyi számolásunk jellegzetessége, hogy – amennyire és ahol csak lehet – explicit: a h_0, ε_0, α_0, valamint a közelségi becslésekben h^p együtthatóiként szereplő *const* > 0 állandók ki vannak fejezve a p, c és K mennyiségekkel, ahol tehát $p \geq 1$ a diszkretizációs módszer rendje, $c > 0$ a normálformák 4. következményben szereplő becslésének c állandója, $K > 0$ pedig a normálformákban jelen lévő $x \mapsto \eta(h, x, \alpha)$ és $x \mapsto \widetilde{\eta}(h, x, \alpha)$ leképezések, valamint első- és második deriváltjaik abszolút értékének felső korlátja a $[0, h_0] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [-\alpha_0, \alpha_0]$ halmazon. Más szavakkal, a közelségi becslésekben szereplő „elegendően kicsiny" mennyiségekről konkrétan megmondtuk, hogy a kezdeti adatokkal kifejezve valójában mennyire is kicsik.

A konjugációk definíciójában alkalmazott $J(h, 0, \alpha) := 0$ választás természetes ugyan, de nem szükségszerű, ezért felmerül a kérdés, hogy $\alpha > 0$ esetén a J konjugáció „ügyesebb" konstrukciójával vajon juthatunk-e jobb becsléshez.

Ezzel kapcsolatban az alábbi eredményt sikerült bizonyítanunk. A nyeregcsomó-bifurkációs ponthoz tartozó normálformák monotonitását és konvexitását kihasználva $\alpha > 0$ esetén az (α, x) félsíkban a két leképezéscsaládhoz egy-egy rácsot szerkesztettünk.

10. Tétel (Nyeregcsomó-bifurkáció, $\alpha > 0$ eset). A „rács-konstrukció" segítségével értelmezett konjugáció esetén az $|\,x - J(h, x, \alpha)|$ kifejezésre a rácspontokban optimális $\mathcal{O}(h^p)$ nagyságrendű, míg a rácspontokon kívül $\mathcal{O}(h)$ nagyságrendű közelségi becslés áll fenn. Igaz továbbá, hogy a $J(h, x, \alpha)$ konjugációk az $\alpha = \alpha_N \to 0^+$ „rácssorozat" mentén a harmadik változójukban is folytonosak $\alpha = 0^+$-nál. ■

Jelenlegi vizsgálataink tárgyát az képezi, hogy vajon a folytonosság tetszőleges $\alpha \to 0^+$ sorozat mentén is fennáll-e, valamint, hogy az iménti közelségi becslés tovább javítható-e.

3. Köszönetnyilvánítás

Elsősorban témavezetőmnek, Garay Barnának mondok köszönetet, amiért a munka során bepillanthattam a numerikus dinamika idevágó érdekes fejezeteibe. A téma számomra különösen hálás, mivel benne a bifurkációs jelenségek és az egydimenziós iterációk vizsgálatát sikerült ötvözni – két olyan területet, melyekkel középiskolás korom óta szívesen foglalkozom.

A 2002-es és 2003-as év őszén lehetőséget kaptam, hogy ösztöndíjasként a Bielefeldi Egyetemen kutathassak. Ezúton köszönöm Wolf-Jürgen Beynnek és Thorsten Hülsnek szívélyes vendéglátását és a hasznos szakmai konzultációkat, melyek során mindig készek voltak problémáim megvitatására.

Köszönetet mondok az ELTE TTK Alkalmazott Analízis Tanszékén, az ELTE IK Numerikus Analízis Tanszékén és a BME Matematikai Intézet Differenciálegyenletek Tanszékén dolgozó tanáraimnak, illetve kollégáimnak, segítségükért és támogatásukért. Külön szeretnék köszönetet mondani középiskolai és egyetemi tanáraim közül Czách Lászlónak, Farkas Miklósnak, Karátson Jánosnak, Reményi Gusztávnak, Simon Lászlónak és Tóth Jánosnak, akik döntő módon járultak hozzá a matematikusi szemléletem kialakulásához. A matematikán kívül tőlük az idők folyamán rengeteg hasznos iránymutatást kaptam.

Köszönettel tartozom Családomnak is kitartó támogatásukért és türelmükért, köszönöm nagybátyámnak, Csörföly Tibornak, hogy már rögtön a '90-es évek elején lehetővé tette számomra, hogy a *Mathematica* programcsomaggal megismerkedhessek. A kutatás során számtalanszor ismeretlen terepre jutva, az igaz állítások felderítéséhez szükséges numerikus és szimbolikus számításokban e programnak elengedhetetlen szerep jutott.

A felsorolt személyek nélkül ez a dolgozat biztosan nem születhetett volna meg.

Hivatkozások

[1] D. K. Arrowsmith, C. M. Place, *An introduction to dynamical systems*, Cambridge University Press, 1990.

[2] G. Belitskii, V. Tkachenko, *One-dimensional functional equations*, Birkhäuser, Basel, 2003.

[3] W.-J. Beyn, A. Champneys, E. Doedel, W. Govaerts, Y. A. Kuznetsov, B. Sandstede, *Numerical continuation, and computation of normal forms*, In: Handbook of Dynamical Systems (Ed. by B. Fiedler), Vol. 2, Elsevier, 2002.

[4] W.-J. Beyn, W. Kless, *Numerical Taylor expansions of invariant manifolds in large dynamical systems*, Numer. Math. **80**, No. 1 (1998) 1–38.

[5] N. G. de Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis* (Chapter *Iterated Functions*), North Holland, Amsterdam, 1961.

[6] K. A. Cliffe, A. Spence, S. J. Tavener, *The numerical analysis of bifurcation problems with application to fluid mechanics*, Acta Numerica **9** (2000) 39–131.

[7] G. Farkas, *Conjugacy in the discretized fold bifurcation*, Computers and Mathematics with Applications **43** (2002) 1027–1033.

[8] L. Z. Fishman, *Stability conditions for a fixed point of point maps in the critical case of a pair of complex conjugate roots on the unit circle*, Math. Notes **52**, No. 6 (1992) 1265–1271.

[9] L. Z. Fishman, *Preservation of stability and bifurcations in discretization of nonlinear differential equations*, Differ. Equations **31**, No. 4 (1995) 569–576.

[10] L. Z. Fishman, *On the preservation of properties of differential equations under discretization*, Dokl. Math. **53**, No. 1 (1996) 73–75.

[11] L. Z. Fishman, *Preservation of equilibrium states and their stability for discrete Runge-Kutta approximations of continuous systems*, Math. Notes **59**, No. 5 (1996) 568–571.

[12] L. Z. Fishman, *On conservation of stability and bifurcations upon discretization*, Autom. Remote Control **57**, No. 9 (1996) 1311–1315.

[13] L. Z. Fishman, *Preservation of the properties of continuous systems under discretization by the Runge-Kutta and Adams methods*, Autom. Remote Control **58**, No. 10 (1997) 1640–1646.

[14] L. Z. Fishman, *Properties of differential and approximate finite-difference equations*, Differ. Equ. **36**, No. 3 (2000) 403–408.

[15] L. Z. Fishman, *Preservation of stability of differential equations under discretization*, Differ. Equ. **39**, No. 4 (2003) 607–608.

[16] B. M. Garay, *Discretization and some qualitative properties of ordinary differential equations about equilibria*, Acta Math. Univ. Comen., New Ser. **62**, No. 2 (1993) 249–275.

[17] B. M. Garay, *On stuctural stability of ordinary differential equations with respect to discretization methods*, Numer. Math. **72**, No. 4 (1996) 449–479.

[18] B. M. Garay, *On C^j-closeness between the solution flow and its numerical approximation*, J. Difference Equ. Appl. **2**, No. 1 (1996) 67–86.

[19] B. M. Garay, L. Lóczi, *Monotone Delay Equations and Runge-Kutta Discretizations*, Special Issue of Functional Differential Equations **11**, No. 1–2 (2004) 59–67.

[20] B. M. Garay, *A brief survey on the numerical dynamics for functional differential equations*, Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. **15**, No. 3 (2005) 729–742.

[21] P. Glendinning, *Stability, Instability and Chaos*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[22] W. J. F. Govaerts, *Numerical methods for bifurcations of dynamical equilibria*, SIAM Philadelphia, 2000.

[23] D. F. Griffiths, P. K. Sweby, H. C. Yee, *On spurious asymptotic numerical solutions of explicit Runge-Kutta methods*, IMA J. Numer. Anal. **12**, No. 3 (1992) 319–338.

[24] E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I.*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[25] J. E. Hirsch, B. A. Huberman, D. J. Scalapino, *Theory of intermittency*, Physical Review A **25**, No. 1 (1982) 519–532.

[26] J. Hofbauer, G. Iooss, *A Hopf bifurcation theorem for difference equations approximating a differential equation*, Monatsh. Math. **98**, No. 2 (1984) 99–113.

[27] T. Hüls, Y. Zou, *Polynomial estimates and discrete saddle-node homoclinic orbits*, J. Math. Anal. Appl. **256**, No. 1 (2001) 115–126.

[28] T. Hüls, *Numerische Approximation nicht-hyperbolischer heterokliner Orbits*, PhD Thesis, University of Bielefeld, 2002.

[29] T. Hüls, *A model function for polynomial rates in discrete dynamical systems*, Appl. Math. Lett. **17**, No. 1 (2004) 1–5.

[30] M. C. Li, *Structural stability of Morse-Smale gradient-like flows under discretizations*, SIAM J. Math. Anal. **28**, No. 2 (1997) 381–388.

[31] M. C. Li, *Structural stability of flows under numerics*, J. Differ. Equations **141**, No. 1 (1997) 1–12.

[32] M. C. Li, *Stability of a saddle node bifurcation under numerical approximations*, Computers and Mathematics with Applications **49**, No. 11–12 (2005) 1849–1852.

[33] A. Klebanoff, *π in the Mandelbrot set*, Fractals **9**, No. 4 (2001) 393–402.

[34] M. Kuczma, *Functional equations in a single variable*, Monografie matematyczne, Tom. 46, PWN – Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1968.

[35] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, 2004.

[36] W. de Melo, S. van Strien, *One-dimensional dynamics*, Springer-Verlag, 1993.

[37] G. W. Reddien, *On the stability of numerical methods of Hopf points using backward error analysis*, Computing **55**, No. 2 (1995) 163–180.

[38] C. Robinson, *Dynamical systems*, Stability, symbolic dynamics, and chaos. Second Edition, CRC Press, Boca Raton, 1999.

[39] S. Saks, A. Zygmund, *Analytic functions*, Monografie Matematyczne, Tom XXVIII. Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa-Wrocław, 1952.

[40] J. Sotomayor, *Generic bifurcations of dynamical systems*, Dynamical Systems, Ed. by M. M. Peixoto (Proc. of a Symp. at Univ. Bahia, 1971), Academic Press, New York, 1973, 561–582.

[41] J. Sotomayor, *Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **43** (1974) 5–46.

[42] O. Stein, *Bifurcations of hyperbolic fixed points for explicit Runge-Kutta methods*, IMA J. Numer. Anal. **17**, No. 2 (1997) 151–175.

[43] A. M. Stuart, A. R. Humphries, *Dynamical Systems and Numerical Analysis*, Cambridge University Press, 1998.

[44] G. Szekeres, *Regular iteration of real and complex functions*, Acta Math. **100** (1958) 203–258.

[45] X. Wang, E. K. Blum, Q. Li, *Consistency of local dynamics and bifurcation of continuous-time dynamical systems and their numerical discretizations*, J. Difference Equ. Appl. **4**, No. 1 (1998) 29–57.

[46] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[47] Y.-K. Zou, W.-J. Beyn, *On manifolds of connecting orbits in discretizations of dynamical systems*, Nonlinear Analysis TMA **52**, No. 5 (A) (2003) 1499–1520.