

M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

# Kombinatorikus algoritmusok a VLSI huzalozásban

PhD disszertáció tézisei

Írta: Szeszlér Dávid

Témavezető: Dr. Recski András

2005.



## Bevezetés

A nagy bonyolultságú integrált (avagy angol rövidítéssel: VLSI) áramkörök tervezése egyike a legszélesebb területeknek, ahol a kombinatorikus optimalizálás módszereit a gyakorlatban is alkalmazzák. Az utóbbi néhány évtizedben számtalan eredmény született ebben a témában. Hosszú a listája az erről a területről származó NP-nehéz problémáknak is, ezek kezelésére gyakran igen jó teljesítményű heurisztikus algoritmusok ismeretesek.

A „VLSI” kifejezés általában nem egyetlen problémát takar, hanem az áramkörök tervezése során felmerülő, egymástól gyakran lényegesen különböző feladatok széles skálájára utal. Ebben a tézisfüzetben csak a tervezési folyamat egyik utolsó fázisával, a *részletes huzalozással* foglalkozunk.

Tegyük fel, hogy a megtervezendő áramkör alkatrészei már végső helyükre kerültek az áramköri lapon. A részletes huzalozás feladata nem más, mint hogy az alkatrészek kivezetéseinek (vagy *termináljainak*) bizonyos előre megadott részhalmazait (az úgynevezett *neteket*) huzalokkal összekössük úgy, hogy közben a különböző netekhez tartozó huzalok között egy adott minimális távolságot megtartunk. Az utóbbi követelmény teljesülését általában úgy garantálják, hogy a huzalokat egy derékszögű rács élei mentén vezetik. Ez a rács jellemzően nem síkbeli (így a feladatok többsége megoldhatatlan volna), hanem néhány, egymással (és az áramköri lappal) párhuzamos síkbeli rétegből áll, és a huzalok minden rácspontban átléphetnek egy szomszédos rétegre. Gráfelméleti szemszögből összegezve tehát a részletes huzalozás feladata nem más, mint egy háromdimenziós rácsban páronként csúcdiszjunkt Steiner-fák (vagyis adott csúcsokat tartalmazó fák) keresése.

A továbbiakban a részletes huzalozás számtalan részfeladata közül csak hárommal foglalkozunk: a *switchboxhuzalozással*, a *csatornahuzalozással* és az *egy aktív rétegű huzalozással*.

## 1. téziscsoport: switchboxhuzalozás

Tegyük fel, hogy az összekötendő terminálok egy téglalap négy oldalán helyezkednek el. A switchboxhuzalozás feladatában a neteket úgy kell meghu-

zalozni (vagyis a termináljaikat huzalokkal összekötni), hogy ehhez csak a téglalap belsejét használjuk. A feladat alábbi, precíz definícióját úgy fogalmaztuk meg, hogy a következő két technológiai követelményt is figyelembe vegye: egyrészt a lap „sarkait” nem szabad használni, másrészt a huzalok bármely rétegről elérhetik a terminálokat.

**Definíció.** *Legyen egy gráf csúcshalmaza a  $\{0, \dots, n+1\} \times \{0, \dots, w+1\} \times \{1, \dots, k\}$  halmaz és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy koordinátában térnek el és abban éppen eggyel. Hagyjuk most el ebből a gráfból a „sarkait”, vagyis a  $(0, 0, l)$ ,  $(n+1, 0, l)$ ,  $(0, w+1, l)$  és  $(n+1, w+1, l)$  alakú csúcsait, ahol  $l = 1, \dots, k$ . A maradék gráfban húzzuk össze egy csúccsá az összes  $\{(i, j, l) : l = 1, \dots, k\}$  alakú csúcshalmazt, ahol*

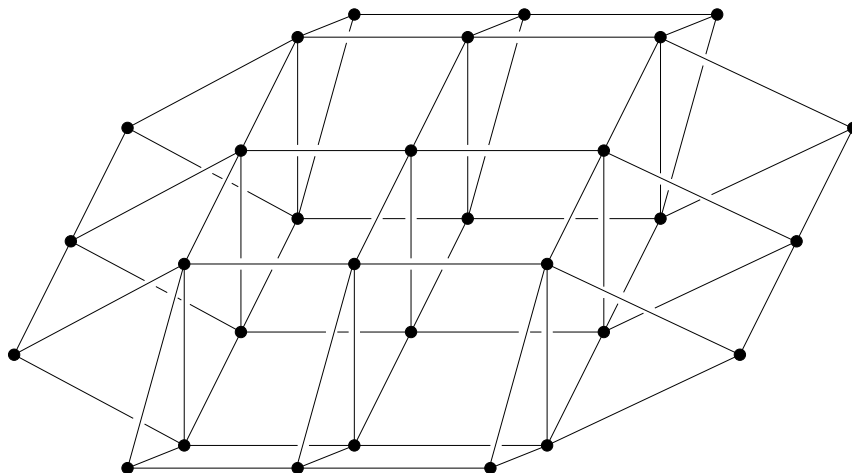
- $i = 0$  vagy  $i = n + 1$  és  $j = 1, \dots, w$ ; vagy
- $j = 0$  vagy  $j = w + 1$  és  $i = 1, \dots, n$ .

*Az így keletkezett  $G_k$  gráfot nevezzük  $k$ -rétegű derékszögű rácsgráfnak, amelynek termináljai az összehúzások eredményeiként kapott csúcsok. A rács szélessége  $w$ , hosszúsága pedig  $n$ .*

Az 1. ábrán a  $w = n = 3$  értékekhez tartozó kétrétegű derékszögű rácsgráf látható.

**Definíció.** *Netnek nevezzük a terminálok egy részhalmazát. Switchboxhuzalozási probléma alatt páronként diszjunkt netek egy  $\mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_t\}$  halmazát értjük. Ennek egy  $k$ -rétegű megoldása (vagy huzalozása) a  $G_k$  derékszögű rácsgráf páronként csúcdiszjunkt, összefüggő részgráfjainak  $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$  halmaza úgy, hogy  $N_i \subset V(H_i)$ , vagyis  $H_i$  összeköti az  $N_i$ -hez tartozó terminálokat. A  $H_i$  részgráfokat huzaloknak nevezzük.*

Korábban már említettük, hogy a huzalokat célszerű minimálisnak választani, így ezek általában Steiner-fák. Az alábbi definíciót az motiválja, hogy bizonyos technológiák számára előnytelen, ha egy huzalozás hosszan egymás fölött futó, párhuzamos szakaszokat tartalmaz. Ezért számos eredmény foglalkozik az úgynevezett *Manhattan modellel*.



1. ábra

**Definíció.** *Egy huzalozást Manhattan modellbelinek mondunk, ha a szomszédos rétegeken csak különböző irányú huzalszakaszok futnak, azaz a rétegek felváltva tartalmaznak függőleges és vízszintes huzalszakaszokat. Ha egy huzalozásra nézve nincs ilyen megkötés, akkor arra azt mondjuk, hogy a megszorítás nélküli modellben van.*

Ha adott egy switchboxhuzalozási feladat, természetes a felhasznált rétegek számát választani a minimalizálandó célfüggvénynek. Ezzel NP-nehéz feladatot kaptunk, sőt, ennek a problémának számtalan, igen speciális esetről ismert, hogy NP-nehéz. Hambruch [5] megfigyelése szerint azonban annyi mondható, hogy nem létezik olyan rögzített rétegszám, amely minden feladat megoldásához elég. Ennek a bizonyítása egy igen egyszerű vágásfeltételen alapul: ha egy, a lapot kettévágó  $e$  egyenes sok netet választ ketté, akkor a rétegszámnak is elég nagyoknak kell lenni ahhoz, hogy minden ilyen nethez tartozó huzal keresztezhesse  $e$ -t. Ebből pontosabban a következő becslés nyerhető: ha  $m = \max(\frac{n}{w}, \frac{w}{n})$  jelöli a switchbox két oldalának arányát, akkor a legrosszabb esetben  $\lceil m \rceil + 1$  rétegre is szükség lehet a feladat megoldásához. Ha pedig a Manhattan modellre szorítkozunk, akkor egy nagyon hasonló gondolatmenet mutatja, hogy a szükséges rétegszám  $\max(4, 2\lceil m \rceil + 1)$  is lehet a legrosszabb esetben.

A megszorítás nélküli modellre vonatkozó alsó becslés  $m$  kis értékeire javítható: tetszőleges  $n$  és  $w$  értékekre mutatható olyan  $n$  hosszúságú és  $w$  szélességű switchboxfeladat, amelynek a megoldásához legalább 4 réteg kell [8]. Továbbá ismert olyan  $2 \times 2$ -es feladat, amelynek a megoldásához legalább 6 réteg szükséges a Manhattan modellben [4]. Bár  $n$  tetszőleges értékére az  $n \times n$ -es feladatra 4-nél jobb alsó becslés nem ismert, az alábbi tétel állítása így sem áll messze az optimálistól.

**1.1. Tézis.** [9] *Minden  $n \times n$ -es switchboxhuzalozási feladat megoldható 6 rétegen a Manhattan modellben.*

Visszatérve az általános,  $n \times w$ -es feladatra, a fenti becslések azt mutatják, hogy a legrosszabb esethez szükséges rétegszám alulról becsülhető az  $m = \max(\frac{n}{w}, \frac{w}{n})$  érték egy függvényével. Másrészt Boros E., Recski A. és Wettl F. [3] megmutatták, hogy a szükséges rétegszám felülről is becsülhető  $m$  egy függvényével: belátták, hogy  $\max(18, 2m + 14)$  rétegen minden feladat megoldható lineáris időben a megszorítás nélküli modellben. Az alábbi tétel ezt az eredményt javítja meg.

**1.2. Tézis.** [9] *Minden switchboxhuzalozási feladat megoldható  $2\lceil m \rceil + 4$  rétegen a Manhattan modellben.*

Az alábbi állítás azt emeli ki, hogy a fenti tézisek felső becslései megvalósíthatók hatékony algoritmussal is.

**1.3. Tézis.** [9] *Létezik olyan lineáris idejű algoritmus, amely minden switchboxhuzalozási feladatot megold az 1.1, illetve 1.2 tézisek állításának megfelelő számú rétegen.*

Korábban említettük, hogy a Manhattan modellben a minimális rétegszám  $\max(4, 2\lceil m \rceil + 1)$  réteg is lehet a legrosszabb esetben. Bár az 1.2. tézis állítása szerint  $2\lceil m \rceil + 4$  réteg elegendő, az ezt megvalósító algoritmus mégsem közelíti az optimumot valamilyen garantált határokon belül, hiszen az alsó becslés csak a legrosszabb esetre vonatkozik. Azonban létezik olyan, lineáris idejű algoritmus is, amely minden switchboxhuzalozási feladatot megold a minimálnál legföljebb 5-tel több rétegen [8].

## 2. téziscsoport: csatornahuzalozás 2 rétegen a Manhattan modellben

A switchboxhuzalozásnak azt a speciális esetét, amelyben a terminálok a lapnak csak két szemközti, mondjuk az alsó és a felső oldalán helyezkedhetnek el, *csatornahuzalozásnak* nevezzük. Ebben az esetben egy feladat kitűzése csak a lap  $n$  hosszúságát határozza meg. Ezért a csatornahuzalozás problémáját általában úgy fogalmazzák meg, hogy valamilyen előre rögzített rétegszámon a minimális szélességű huzalozást keressük.

A csatornahuzalozás 2 rétegű, Manhattan modellbeli esete egyike a VLSI huzalozás legnépszerűbb, legtöbbet vizsgált területeinek. Nem nehéz azonban olyan feladatot mutatni (lásd a 2.1. tézist), amely semmilyen szélességben nem megoldható. Ezért az irodalomban elfogadott a feladat megfogalmazásának az a módosítása, hogy megengedett a jobb és bal szélén tetszőleges számú új oszlopot hozzávenni a rácshoz.

Szymanski [11] bebizonyította, hogy a minimális szélesség meghatározása NP-nehéz feladat. Baker, Bhatt és Leighton [2] azonban hatékony közelítő algoritmust talált. Ehhez két, egymástól független alsó becslést használtak a minimális szélességre: a  $d$  *sűrűség*, vagyis a függőleges egyenesek által kettéválasztott netek maximális száma természetesen adódó alsó korlát. Azonban az említett két alsó becslés közül a másik, az  $f$  *fluxus* definíciója már sokkal több előkészítő munkát igényel; a részletekre itt nem térünk ki, csak annyit említünk meg, hogy  $f = O(\sqrt{t})$  (ahol  $t$  a netek száma). A fenti szerzők [2]-ben megmutatják, hogy minden csatornahuzalozási feladat megoldható legföljebb  $2d + O(f)$  szélességben 2 rétegen a Manhattan modellben. Az általuk konstruált megoldás hátránya azonban, hogy a rácshoz hozzávett új oszlopok száma elérheti az  $O(f)$  nagyságrendet is.

Tegyük most fel, hogy a rács  $n$  hosszúsága rögzített, vagyis a továbbiakban nem szabad a rácshoz új oszlopokat hozzávenni. Ebben a téziscsoportban teljes leírását adjuk az ilyen feltételek mellett megoldható feladatoknak és egyben felső becslést is adunk a minimális szélességre.

Egy csatornahuzalozási feladatot nevezzünk *párosnak*, ha minden netnek két terminálja van, egy a lap felső, egy pedig az alsó szélén. Egy feladatot ne-

vezzük *sűrűnek*, ha minden terminál (a lap mindkét oldalán) eleme valamely netnek. Egy netet nevezzük *triviálisnak*, ha két terminálból áll, amelyek egy oszlopban vannak.

**2.1. Tézis.** [10] *Egy csatornahuzalozási feladat akkor és csak akkor nem megoldható 2 rétegen a Manhattan modellben (új oszlopok hozzávétele nélkül), ha páros, sűrű és van legalább egy nemtriviális net.*

**2.2. Tézis.** [10] *Létezik olyan lineáris idejű algoritmus, amely minden megoldható csatornahuzalozási feladatot meghuzaloz 2 rétegen a Manhattan modellben úgy, hogy a rácsot nem bővíti új oszlopokkal. Továbbá a kapott huzalozás szélessége legföljebb  $\frac{3}{2}n$ , ha feladat páros, és legföljebb  $\frac{7}{4}n$  egyébként.*

Megemlítjük még a 2.1. tézis egy némileg meglepő következményét is.

**2.3. Tézis.** [10] *Minden csatornahuzalozási feladat megoldható lineáris időben 2 rétegen a Manhattan modellben, ha megengedett a rácshoz legföljebb egy új oszlop hozzávétele.*

A 2.2. tézisben említett algoritmus nem közelíti a minimális szélességet valamilyen konstansszoros határon belül. Természetes kérdés, hogy igaz marad-e Baker, Bhatt és Leighton [2] fent említett tétele, ha nem megengedett a csatorna hosszának növelése? A válasz nemleges: minden  $n$  értékre mutatható olyan  $n$  hosszúságú csatornahuzalozási feladat, amelynek sűrűsége  $d = 2$ , fluxusa  $f \leq \lceil \sqrt{n} \rceil$  és a huzalozáshoz szükséges minimális szélesség  $w = n - 1$  [8].

### 3. téziscsoport: egy aktív rétegű huzalozás

Az 1. téziscsoportban említettük, hogy egy switchboxhuzalozási feladat megoldásához tetszőlegesen sok rétegre szükség lehet. Mégis, a switchboxhuzalozás tekinthető alapvetően kétdimenziós feladatnak: az input négy terminálsorozatból áll, az output pedig néhány síkbeli réteg.

Az utóbbi időben azonban a huzalozási technológia gyors fejlődése miatt a figyelem egyre inkább a „valódi” háromdimenziós huzalozás felé fordul. Az elmúlt két évtizedben számtalan eredmény született ezen a területen.



A továbbiakban csak az *egy aktív rétegű huzalozással* foglalkozunk, amelyben az összekötendő terminálok egy  $w \times n$  méretű, síkbeli rácson helyezkednek el, és a huzalozást egy  $h$  magasságú térbeli rácspan, a terminálokat tartalmazó síkrács fölött kell megvalósítani.

Könnyű azonban olyan feladatokat mutatni, amelyek semmilyen magasságban nem megoldhatók. Ezért megengedett a  $w$  szélesség, illetve az  $n$  hosszúság növelése úgy, hogy új sorokat, illetve oszlopokat veszünk hozzá a rácshoz, a terminálokat tartalmazó eredeti sorok és oszlopok között.

**Definíció.** *Egy adott  $w \times n$ -es (azaz  $w$  sorból és  $n$  oszlopból álló) síkbeli rács csúcsait termináloknak nevezzük. Net a terminálok egy részhalmaza. Egy aktív rétegű huzalozási probléma (vagy röviden EARH probléma) alatt páronként diszjunkt netek egy  $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$  halmazát értjük.*

**Definíció.**  *$n$  irányú,  $s_n$ -szeres ritkítás alatt azt értjük, hogy a rács bármely két szomszédos oszlopa közé (és a jobbszélső oszloptól jobbra) felvesszünk  $s_n - 1$  darab új oszlopot. Így a rács hosszúsága  $n' = s_n \cdot n$ -re növekszik. A  $w$  irányú,  $s_w$ -szeres ritkítás értelmezése hasonló.*

**Definíció.** *Ha adott egy  $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$  EARH probléma, valamint az  $s_w$  és  $s_n$  értékek, akkor a probléma egy megoldása (vagy huzalozása) a  $(w \cdot s_w) \times (n \cdot s_n) \times h$  méretű (a terminálokat tartalmazó eredeti sík fölött elhelyezkedő) háromdimenziós rács páronként csúcsdiszjunkt, összefüggő részgráfjainak  $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_t\}$  halmaza úgy, hogy  $N_i \subset V(H_i)$ , vagyis  $H_i$  összeköti az  $N_i$ -hez tartozó terminálokat. A  $H_i$  részgráfokat huzaloknak nevezzük.  $h$  a huzalozás magassága.*

Ha adott egy EARH probléma, valamint az  $s_w$  és  $s_n$  értékek, akkor célunk a minimális  $h$  magasságú huzalozás megtalálása. Egy, az [5]-belihez nagyon hasonló gondolatmenet mutatja, hogy a szükséges magasság legrosszabb esetben  $\frac{n}{2s_w}$  is lehet [6]. Más szóval, ha az  $s_w$  értéket rögzítettnek tekintjük, a minimális magasságra  $h = \Omega(n)$  teljesül a legrosszabb esetben.

Másrészt viszont igen egyszerű konstrukcióval lehet  $h \leq \frac{wn}{2}$  magasságú megoldást találni tetszőleges feladathoz, de csak ha  $s_w, s_n \geq 2$  teljesül [6]. Ennek az állításnak egy alternatív értelmezése a következő: ha  $w$  értéke rögzí-

tett, akkor létezik  $h = O(n)$  magasságú huzalozás, feltéve hogy  $s_w, s_n \geq 2$ . Az alábbi (egyáltalán nem nyilvánvaló) tézis azt állítja, hogy lényegében ugyanez érvényes akkor is, ha  $s_n = 1$ .

**3.1. Tézis.** [6] *Ha  $s_w \geq 8$ , akkor  $w$  minden rögzített értékére és tetszőleges  $n$  esetén minden EARH probléma megoldható  $t = O(n)$  időben és  $h = O(n)$  magassággal úgy, hogy közben az  $n$  hosszúság értéke változatlan, vagy legfeljebb eggyel nő.*

A továbbiakban tegyük fel, hogy  $s_w, s_n \geq 2$ . Már említettük, hogy  $h = O(wn)$  magasságú huzalozás egyszerűen található. Aggarwal, Kleinberg és Williamson [1] azonban bebizonyították, hogy ha minden net két terminálból áll, akkor egy  $n \times n$ -es EARH probléma netjeinek halmaza partícionálható  $O(n \log^2 n)$  osztályra úgy, hogy minden osztály, mint különálló EARH feladat meghuzalozható az eredeti ( $n \times n$ -es rács) egy példányán. Ebből könnyen következik, hogy ha  $s_w, s_n \geq 2$  (és minden net két terminálból áll), akkor létezik  $h = O(n \log^2 n)$  magasságú huzalozás. Az alábbi tézis azonban lineáris korlátot szolgáltat.

**3.2. Tézis.** [7] *Ha egy EARH problémában minden net két terminált tartalmaz, akkor*

- $s_n = \lceil \frac{w}{2n} \rceil + 1$  és  $s_w = 2$  esetén létezik  $h = 3n$  magasságú huzalozás;
- $s_w = s_n = 2$  esetén létezik  $h = 3 \max(n, w)$  magasságú huzalozás.

Ha  $w$  sokkal nagyobb, mint  $n$ , akkor a fenti tézis állítása két lehetőséget kínál: vagy a magasság aránylag alacsony ( $h = 3n$ ) és akkor az  $s_n$  ritkítás nagy, vagy a magasság nagy ( $h = 3w$ ) és akkor az  $s_n$  ritkítás csak 2. A következő tézis azt állítja, hogy a két véglet között található középút.

**3.3. Tézis.** [7] *Ha egy EARH problémában minden net két terminált tartalmaz, akkor  $s_n = \lceil \frac{w}{4n} \rceil + 1$  és  $s_w = 2$  esetén létezik  $h = \lfloor \frac{9}{2}n \rfloor$  magasságú huzalozás.*

Tekintsük most az EARH probléma általános esetét, amelyben a neteknek tetszőlegesen sok terminálja lehet. Az alábbi tézisek azt állítják, hogy a fenti lineáris korlátok megnövekedett konstansokkal érvényben maradnak.

**3.4. Tézis.** [7] *Minden EARH probléma megoldható*

- az  $s_n = \lceil \frac{w}{2n} \rceil + 1$ ,  $s_w = 2$  ritkítási értékek mellett  $h = 6n$  magasságban;
- az  $s_w = s_n = 2$  ritkítási értékek mellett  $h = 6 \max(n, w)$  magasságban.

A 3.3. téziszhez hasonlóan a 3.4. tézis állítása ismét módosítható úgy, hogy az  $s_n$  ritkítás csökken, de a magasság növekszik.

**3.5. Tézis.** [7] *Minden EARH probléma megoldható  $s_n = \lceil \frac{w}{4n} \rceil + 1$ ,  $s_w = 2$  ritkítási értékek mellett  $h = 9n$  magasságban.*

Végül az alábbi tézis arra mutat rá, hogy a bemutatott korlátok megvalósíthatók hatékony algoritmussal.

**3.6. Tézis.** [7] *Léteznek olyan algoritmusok, amelyek megvalósítják a 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 tézisek által biztosított korlátokat és a lépésszámuk  $O(t \cdot (w + n))$  (ahol  $t$  a netek száma). Azaz, ha  $A = w \cdot n$  jelöli az input méretét, akkor az algoritmusok futásideje  $O(A^{\frac{3}{2}})$ , ha feltesszük, hogy  $w = \Theta(n)$  teljesül.*

## Hivatkozások

- [1] AGGARWAL, A., J. KLEINBERG ÉS D. P. WILLIAMSON, Node-disjoint paths on the mesh and a new trade-off in VLSI layout, *SIAM J. Computing* (2000) **29**, 1321-1333.
- [2] BAKER, S. B., S. N. BHATT ÉS F. T. LEIGHTON, An approximation algorithm for Manhattan routing, *Advances in Computer Research, Volume 2: VLSI Theory* (F. P. Preparata, ed.), JAI Press, Reading, MA (1984), 205-229.
- [3] BOROS E., RECSKI A. ÉS WETTL F., Unconstrained multilayer switch-box routing, *Annals of Operations Research* (1995) **58**, 481-491.

- [4] GOLDA B., LACZAY B., MANN Z. Á., MEGYERI CS. ÉS RECSKI A., Implementation of VLSI Routing Algorithms, *Proc. IEEE 6th Internat. Conf. on Intelligent Engineering Systems, Croatia, 2002*, 383-388.
- [5] HAMBRUSCH, S. E., Channel routing in overlap models, *IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circ. Syst.* (1985) **CAD-4**, 23-30.
- [6] RECSKI A. ÉS SZESZLÉR D., 3-dimensional single active layer routing, *Discrete and Computational Geometry*, Lecture Notes in Computer Science **2098**, 318-329, Springer, Berlin (2001).
- [7] RECSKI A. ÉS SZESZLÉR D., Routing Vertex Disjoint Steiner-Trees in a Cubic Grid and Connections to VLSI, *submitted*.
- [8] SZESZLÉR D., *PhD Dissertation*, 2005.
- [9] SZESZLÉR D., Switchbox routing in the multilayer Manhattan model, *Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* (1997) **40**, 155-164.
- [10] SZESZLÉR D., A New Algorithm for 2-layer, Manhattan Channel Routing, *Proc. 3rd Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications* (2003), 179-185.
- [11] SZYMANSKI, T. G., Dogleg channel routing is NP-complete, *IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circ. Syst.* (1985) **CAD-4**, 31-41.