# Sztochasztikus folyamatok erős közelítése bolyongások segítségével

A PhD dolgozat kivonata

Székely Balázs

Témavezető: Szabados Tamás

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
2004.

Ez a dokumentum az azonos című PhD dolgozat kivonata. A tételek, lemmák stb. számozása a dolgozatbeliekkel megegyezik. Az általunk kidolgozott új eredményeket arab számozással láttuk el, míg a már ismert eredmények alfabetikus számozással szerepelnek.

# 1. Bevezetés

A dolgozat célja annak bemutatása, hogy mind elméleti, mind gyakorlati szempontból fontos a sztochasztikus folyamatok erős - majdnem mindenütt konvergenciát biztosító - közelítése egyszerű bolyongások segítségével. Az első ilyen típusú eredményt Frank Knight publikálta 1962-ben [8]. Ezen közelítés Révész Pál [11] és Szabados Tamás [15] munkái nyomán jutott el a dolgozatban felhasznált formájához. Az ilyen típusú approximációs eredmények általában úgy szólnak, hogy találjunk időben és térben megfelelően átskálázott bolyongásoknak egy $\{B_m\}_m$-mel jelölt sorozatát, amely minden kompakt intervallumon egy valószínűséggel egyenletesen konvergál egy Brown mozgás trajektóriájához, amint $m$ tart végtelenhez:

$$\sup_{t\in[0,T]} |B_m(t) - B(t)| \to 0.$$

Az elméleti értékén túl, folytonos idejű véletlen folyamatok diszkrét közelítése a folytonos időben felmerülő problémát sokszor átláthatóbbá teszi. A diszkrét közelítés így egy általános bizonyítási sémát nyújt a folytonos idejű folyamatokkal kapcsolatos állításokra: először vesszük a diszkrét verzióját az állításnak, majd megfelelő határátmenettel kapjuk a folytonos időre vonatkozó állítást.

Ebben a dolgozatban olyan típusú állításokkal foglalkozunk, melyek Knight eredményéhez hasonló közelítést ad folytonos (lokális) martingálokra. Ezen túl olyan eredményeket is közlünk, melyek bizonyítása az előbb említett diszkrét bizonyítási sémának alkalmazásával kapható. Ki fog derülni, hogy a módszer alkalmazása meglehetősen természetes ezekben az esetekben.

Ezeken az eredményeken túl, néhány, a kutatás során felmerült problémára is választ adunk, bár ezek nem kapcsolódnak szorosan fő témánkhoz.

# 2. Folytonos martingálok erős közelítése

## 2.1. Bolyongások és Wiener-folyamat

Dolgozatunk egyik fő eszköze a Wiener-folyamat egy elemi konstrukciója, mely egymásba ágyazott bolyongások megfelelően átskálázott sorozatának egy valószínűséggel egyenletesen a Wiener-folyamathoz konvergáló sorozatán alapszik.

A továbbiakban, mint bolyongásos konstrukcióra fogunk hivatkozni a következőkben tárgyalt módszerre. A későbbiekben ezt a közelítést szeretnénk folytonos martingálokra kiterjeszteni.

A konstrukció fő lépéseit az alábbiakban foglaljuk össze.

Induljunk ki független, szimmetrikus bolyongások $\{S_m(k)\}_k\}_m$-val jelölt végtelen sorozatából.

Első lépésként egy olyan bolyongás sorozatot készítünk, ahol minden bolyongás függ az előtte levőtől, mégpedig úgy, hogy megfelelő idő és tér skálázást alkalmazva minden bolyongás az előzőnek a finomítása. Az $m$-dik bolyongás esetében definiáljuk a $T_m(0) = 0$, $k \geq 0$ megállási időket a

$$T_m(k+1) = \min\{n : n > T_m(k), |S_m(n) - S_m(T_m(k))| = 2\} \qquad (m \geq 1) \tag{1}$$

egyenlőséggel. Ezen idők segítségével definiáljuk rekurzívan $\tilde{S}_m$-t, az ún. csavart bolyongást $k = 1, 2, \ldots$-re. Kezdjük a 0-dik bolyongással: $\tilde{S}_0(n) = S_0(n)$ $(n \geq 0)$. Minden fix $m$ esetén minden $k$-ra nevezzük a $T_m(k)$ és $T_m(k+1)$ közötti lépéseket $k$-dik hídnak. Ha a híd előjele különbözik a kívánttól, akkor változtassuk meg a híd lépéseinek az előjelét a következőképpen:

$$\tilde{X}_m(n) = \begin{cases} X_m(n) & \text{ha } S_m(T_m(k+1)) - S_m(T_m(k)) = 2\tilde{X}_{m-1}(k+1), \\ -X_m(n) & \text{különben.} \end{cases}$$

Így $\tilde{S}_m(n) = \tilde{S}_m(n-1) + \tilde{X}_m(n)$. Ekkor $\tilde{S}_m(n)$ $(n \geq 0)$ szintén egy szimmetrikus bolyongás a következő skálázási tulajdonsággal:

$$\frac{1}{2}\tilde{S}_m(T_m(k)) = \tilde{S}_{m-1}(k) \qquad (m \geq 1, k \geq 0).$$

Könnyen látható, hogy ez a definíció lineáris interpolációval kiterjeszthető folytonos időre is.

Az utolsó lépése a konstrukciónak az idő- és térbeli lépték zsugorítása. A Brown-mozgás $m$-dik közelítése legyen a

$$\tilde{B}_m(t) = 2^{-m}\tilde{S}_m(t2^{2m}).$$

egyenlőséggel definiálva.

Két szomszédos közelítés különbségének nagyságáról a következőt mondhatjuk.

**C lemma.** *Legyen $K > 0$ és $C > 1$. Ekkor minden $m \geq m_1(C)$-re a*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq k2^{-2m} \leq K} |\tilde{B}_{m+1}(k2^{-2m}) - \tilde{B}_m(k2^{-2m})| \geq K_*^{\frac{1}{4}}(\log_* K)^{\frac{3}{4}} m 2^{-\frac{m}{2}}\right\} \leq 3(K2^{2m})^{1-C},$$

*becslés írható, ahol $K_* = \max\{1, K\}$.*

Ezen a lemmán alapul a közelítés hibájáról szóló tétel:

**A tétel.** *A $\tilde{B}_m(t)$ $(t \geq 0, m = 0, 1, 2, \ldots)$ folyamat sorozat egy valószínűséggel egyenletesen konvergál a $W(t)$ $(t \geq 0)$ Wiener-folyamathoz minden $[0, K]$, $K > 0$ kompakt intervallumon. Tetszőleges $K > 0$ és $C \geq 3/2$ esetében minden $m \geq m_2(C)$-re*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq K} |W(t) - \tilde{B}_m(t)| \geq K_*^{\frac{1}{4}}(\log_* K)^{\frac{3}{4}} m 2^{-\frac{m}{2}}\right\} \leq 6(K2^{2m})^{1-C}.$$

A Borel–Cantelli lemmát használva mondjuk $C = 3$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\sup_{0 \leq t \leq K} |W(t) - \tilde{B}_m(t)| < O(1) m 2^{-\frac{m}{2}} \qquad \text{m.m.} \qquad (m \to \infty)$$

és

$$\sup_{0 \leq t \leq K} |W(t) - \tilde{B}_m(t)| < K^{\frac{1}{4}}(\log K)^{\frac{3}{4}} \qquad \text{m.m.} \qquad (K \to \infty)$$

ha $m$ elegendően nagy, $m \geq m_2(3)$.

A következőkben a Szkorohod-beágyazással kapott véletlen bolyongások tulajdonságait fogjuk tanulmányozni. Ki fog derülni, hogy ezen bolyongások sorozata nem egyenlő ugyan a fentiekben megkonstruált bolyongással, de aszimptotikusan megegyeznek.

Tehát legyen adott egy $W$ Wiener-folyamat. Először olyan megállási időket fogunk definiálni, amelyek segítségével előállítjuk a $B_m(k2^{-2m})$ bolyongást a Wiener-folyamatba ágyazva. Minden $m \geq 0$-re legyen $s_m(0) = 0$ és

$$s_m(k+1) = \inf\{s : s > s_m(k), |W(s) - W(s_m(k))| = 2^{-m}\} \qquad (k \geq 0). \tag{2}$$

Ekkor legyen a keresett bolyongás a

$$B_m(k2^{-2m}) = W(s_m(k)) \qquad (m \geq 0, k \geq 0)$$

egyenlőséggel definiálva. Ez a bolyongás is kiterjeszthető lineáris interpolációval folytonos idejű folyamattá.

A következő lemma a $\tilde{B}_m$ és $B_m$ folyamat párnak néhány érdekes tulajdonságát írja le. Általában az mondható, hogy $\tilde{B}_m$ jobban használható azokban az esetekben, mikor meg akarunk konstruálni egy Brown-mozgást, míg $B_m$ használata előnyösebb, ha approximációs eredményhez szeretnénk jutni valamilyen, már adott folyamat mellett.

**D lemma.** *Tetszőleges $C \geq 3/2$, $K > 0$ mellett tekintsük a következő eseményt*

$$A_m = \left\{ \sup_{n>m} \sup_{0 \leq k2^{-2m} \leq K} |2^{-2n} T_{m,n}(k) - k2^{-2m}| < 6(CK_* \log_* K)^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} 2^{-m} \right\},$$

*ahol $T_{m,n}(k) = T_n \circ T_{n-1} \circ \cdots \circ T_m(k)$ minden $n > m \geq 0$ és $k \geq 0$ esetén. Ekkor, ha $m \geq m_3(C)$ teljesül,*

$$\mathbf{P}\{A_m^c\} \leq 4(K2^{2m})^{1-C}.$$

*Továbbá, $\lim_{n\to\infty} 2^{-2n} T_{m,n}(k) = t_m(k)$ létezik az $A_m$ eseményen és a*

$$\tilde{B}_m(k2^{-2m}) = W(t_m(k)) \qquad (0 \leq k2^{-2m} \leq K),$$

*egyenlőség is fennáll, vö. (2.1.). Sőt, az $A_m$ eseményen, egy nullmértékű halmazt kivéve, teljesül a $s_m(k) = t_m(k)$ egyenlőség és következő becslés:*

$$\sup_{0 \leq k2^{-2m} \leq K} |s_m(k) - k2^{-2m}| \leq 6(CK_* \log_* K)^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} 2^{-m} \qquad (m \geq m_3(C)).$$

Ezen lemma segítségével megadható az elkészített Szkorohod-beágyazott, közelítő bolyongás approximációs hibája:

**1. lemma.** *Minden $K > 0$ és $C \geq 3/2$ számra $m \geq m_3(C)$ mellett a*

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{0 \leq t \leq K} |W(t) - B_m(t)| \geq K_*^{\frac{1}{4}} (\log_* K)^{\frac{3}{4}} m 2^{-\frac{m}{2}} \right\} \leq 10(K2^{2m})^{1-C}$$

*becslést írható.*

## 2.2. Folytonos martingálok approximációja

Ebben a fejezetben használt egyik fő eszköz a bolyongásos konstrukción túl Dambis (1965) és Dubins–Schwarz (1965) konstrukciója (ezentúl *DDS*-konstrukció). Röviden fogalmazva ezen tétel azt állítja, hogy minden folytonos lokális martingál idő-átparaméterezéssel Brown-mozgássá transzformálható.

Ezen túl feltesszük, hogy adott egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező, $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ filtráció és egy hozzá adaptált $M(t), t \geq 0$, 0-ból induló folytonos lokális martingál.

Ezen feltételek mellett $\langle M \rangle$, $M$ kvadratikus variációja 0-ból induló, folytonos, monoton növekedő folyamat, azaz idő-átparaméterező folyamat. $\langle M \rangle$-en kívül idő-átparaméterező folyamatként használjuk majd az ő kvázi-inverzét, $T$-t:

$$T_s = \inf\{t : \langle M \rangle_t > s\}.$$

**B tétel.** *[12, V (1.6), p.181] Ha feltesszük még, hogy $\langle M\rangle_\infty = \infty$ m.m., akkor a $W(s) = M(T_s)$ folyamat $(\mathcal{F}_{T_s})$-adaptált Brown-mozgás, továbbá $M(t) = W(\langle M\rangle_t)$.*

Megjegyezzük, hogy hasonló állítás mondható, esetleg a valószínűségi mező kibővítésével, abban esetben, mikor $\langle M\rangle_\infty < \infty$.

Ezentúl $W$-vel fogunk hivatkozni a most megkonstruált, ún. $M$-hez kapcsolt *DDS Wiener-folyamatra.*

Fontos, hogy az $M$ martingálhoz is definiálhatunk Szkorohod-tipusú beágyazott megállási időket, ahogy tettük (2) esetében. Minden $m \geq 0$ esetén legyen $\tau_m(0) = 0$ és

$$\tau_m(k+1) = \inf\left\{t : t > \tau_m(k), |M(t) - M(\tau_m(k))| = 2^{-m}\right\} \qquad (k \geq 0). \tag{3}$$

Jól látható, hogy az $(m+1)$-dik megállási-idő sorozat finomítása az $m$-diknek $((\tau_m(k))_{k=0}^\infty$ $(\tau_{m+1}(j))_{j=0}^\infty$-nek részsorozata.)

**2. lemma.** *A (3) sorban definiált megállási idők segítségével közvetlenül megkaphatjuk a DDS Wiener-folyamatot közelítő $\{B_m\}_m$ skálázott Szkorohod-tipusú bolyongásorozatot, vö. (2.1.):*

$$B_m(k2^{-2m}) = W(s_m(k)) = M(\tau_m(k)), \qquad s_m(k) = \langle M, M\rangle_{\tau_m(k)}$$

*[de $\tau_m(k) \leq T_{s_m(k)}$ ], ahol tetszőleges rögzített $m \geq 0$ esetén a $k$ értékekre ($\omega$-tól függően) az $s_m(k) \leq \langle M\rangle_\infty$ teljesül*

A továbbiakban $B_m$-mel jelöljük a 2. lemmában definiált skálázott bolyongás sorozatot.

### 2.2.1. A kvadratikus variáció közelítése

Ennek az alfejezetnek az a célja, hogy a kvadratikus variációnak egy majdnem mindenütt konvergenciát biztosító előállítását adjuk meg egy pontfolyamat sorozat segítségével. A sorozat $m$-dik tagját a következőféleképpen definiáljuk:

$$\begin{aligned} N_m(t) &= 2^{-2m}\#\{r : r > 0, \tau_m(r) \leq t\} \\ &= 2^{-2m}\#\{r : r > 0, s_m(r) \leq \langle M, M\rangle_t\} \qquad (t \geq 0). \end{aligned}$$

Látható, hogy trajektóriái tiszta ugró függvények konstans, $2^{-2m}$ ugrásokkal. Az ugrások pontosan a $\tau_m(k)$ helyeken vannak és ezeken a helyeken $N_m(\tau_m(k)) = k2^{-2m}$. A D lemma megfelelő alkalmazásával kaphatjuk az approximáció alapjául szolgáló állítást:

**3. lemma.** *Tetszőleges, adott $K > 0$ esetén definiálhatunk egy $a_m = O(m^{-2-\epsilon}2^{2m})K$ sorozatot tetszőlegesen kicsi $\epsilon > 0$-ra, ahol $a_m \geq K \vee 1$ minden $m \geq 1$-re ($x \vee y = \max(x, y)$, $x \wedge y = \min(x, y)$).*

*Ekkor tetszőleges $C \geq 3/2$ és $m \geq m_4(C)$ esetén a következő becsléshez jutunk:*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq K} |\langle M\rangle_t \wedge a_m - N_m(t \wedge T_{a_m})| \geq 12(Ca_m \log_* a_m)^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} 2^{-m}\right\} \leq 3(a_m 2^{2m})^{1-C}.$$

A következő tétel szellemében hasonló Karandikar [5] megfelelő állításához, de a bizonyítás módszere különböző, továbbá mi megadjuk a konvergencia gyorsaságát is.

**1. tétel.** *A 3. lemma jelöléseit használva a következőket kapjuk a kvadratikus variáció approximációs hibájára:*

$$\sup_{0\leq t\leq K} |\langle M\rangle_t - N_m(t)| < O(1)m^{\frac{1}{2}}2^{-m} \qquad a.s. \qquad (m \to \infty)$$

*és*

$$\sup_{0\le t\le K} |\langle M\rangle_t - N_m(t)| < K^{\frac{1}{2}}(\log K)^{\frac{1}{2}} \qquad a.s. \qquad (K\to\infty)$$

*minden elegendően nagy $m$-re, ha $m \geq m_4(3)$.*

#### 2.2.2. Folytonos martingálok erős közelítése

Ezen eszközök használatával már folytonos lokális martingálokra is tudunk megfelelő approximációs eredményt mondani. A $DDS$-konstrukciót és a 3. lemmát használva jutunk a következőhöz:

**5. lemma.** *Fix $K>0$ mellett vegyünk egy $a_m = O(m^{-7-\epsilon}2^{2m})K$ sorozatot tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén, ahol $a_m \geq K \vee 1$ minden $m \geq 1$-re.*

*Ekkor, ha $C \geq 3/2$ és $m \geq m_5(C)$, a*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\le t\le K} |M(t\wedge T_{a_m}) - B_m(N_m(t\wedge T_{a_m})| \geq 2a_m^{\frac{1}{4}}(\log_* a_m)^{\frac{3}{4}} m2^{-\frac{m}{2}}\right\} \leq 14(a_m 2^{2m})^{1-C}$$

*becsléshez jutunk.*

**3. tétel.** *A 5. lemma jelöléseit használva a*

$$\sup_{0\le t\le K} |M(t) - B_m(N_m(t))| < O(1)m2^{-\frac{m}{2}} \qquad a.s. \qquad (m\to\infty)$$

*és a*

$$\sup_{0\le t\le K} |M(t) - B_m(N_m(t))| < K^{\frac{1}{4}}(\log K)^{\frac{3}{4}} \qquad a.s. \qquad (K\to\infty)$$

*becslések teljesülnek, ha az utóbbi esetben $m$ elegendően nagy.*

Kiefer [7] bizonyította, hogy a Brown-mozgás esetében, tehát ha $M = W$, a Szkorohod-beágyazást használva nem tudunk $O(1)n^{-\frac{1}{4}}(\log n)^{\frac{1}{2}}(\log\log n)^{\frac{1}{4}}$-nél jobb konvergenciát biztosító konstrukciót mondani (itt $n$ az approximációhoz használt pontok száma). A 3. tétel azt állítja, hogy esetünkben ez a ráta $O(1)n^{-\frac{1}{4}}\log n$ (a konstrukció $n = K2^{2m}$ pontot használ), ami jól közelíti a legjobb Szkorohod-beágyazással elérhetőt.

## 2.3. Szimmetrikusan fejlődő martingálok

Mind elméleti, mind gyakorlati szempontból fontos kérdés, hogy az $M$ martingálhoz elkészített $B_m$ bolyongás, amely a $DDS$ Brown-mozgást közelíti, illetve az $N_m$ pontfolyamat milyen feltételek mellett függetlenek. E kérdés magában foglalja ugyanezt a kérdést a $B$ $DDS$ Brown-mozgásra illetve a kvadratikus variációra vonatkoztatva, ugyanis a Brown-mozgást a $B_m$ folyamatok segítségével állítjuk elő, míg a kvadratikus variációt az $N_m$ folyamatok segítségével. Fordítva is igaz, hiszen ha $B$ és $\langle M\rangle$ függetlenek, akkor a megfelelő közelítő folyamatok is azok definíciójuk folytán.

Következő tételünkből ki fog derülni, hogy ekvivalens feltételt tudunk adni a függetlenségre. Azt kívánjuk meg, hogy a múltra nézve a folyamat szimmetrikus növekményű legyen a következő értelemben: minden pozitív egész $n$-re, $0 \leq s < t_1 < \cdots < t_n$ valós számokra és $U_1, \ldots U_n$ valós Borel-halmazokra a

$$\mathbf{P}\left\{\Gamma \mid \mathcal{F}_s^0\right\} = \mathbf{P}\left\{\Gamma^- \mid \mathcal{F}_s^0\right\}, \tag{4}$$

feltételnek kell teljesülnie, ahol $\Gamma = \{M(t_1) - M(s) \in U_1, \ldots, M(t_n) - M(s) \in U_n\}$ és $\Gamma^-$ hasonlóan definiált, csak $U_j$ helyett $-U_j$-t veszünk $\Gamma^-$ felírásban, továbbá $\mathcal{F}_s^0 = \sigma(M(u), 0 \leq u \leq s)$ az $M$ által generált filtráció.

A 4. tétel alapvetően Dubins, Émery és Yor [2] tételének átfogalmazása. Ezen tétel lényegében Ocone egy eredményén alapul [10], amely azt állítja, hogy azok a martingálok, amelyeknek eloszlása a kvadratikus variációt feltéve Gauss, azok $J$-, illetve $H$-invariánsak. A $J$-invariancia azt jelenti, hogy minden jósolható, $\{-1, 1\}$ értékű $\alpha$ folyamat esetében $M$-nek és $\int_0^t \alpha \, \mathrm{d}M$-nek ugyanaz az eloszlása. A $H$ invariancia egy ugyanilyen típusú, erősebb állítás, ugyanis itt elegendő csak determinisztikus, $\alpha^{(r)}(t) = \mathbf{I}_{[0,r]}(t) - \mathbf{I}_{(r,\infty)}(t)$ alakban írható folyamatokat tekinteni. Ocone bizonyította, hogy a feltételes Gauss eloszlásúság, $J$-invariancia és $H$-invariancia ekvivalenciája nem csak folytonos, hanem cadlag martingálokra is igaz.

Dubins, Émery és Yor bizonyították [2], hogy ezek a feltételek ekvivalensek azzal, hogy a martingál $DDS$ Brown-mozgása és a kvadratikus variációja független. Ebben a dolgozatban [2] és egy másik, Vostrikova és Yor [20] által publikáltban a szerzők további ekvivalens feltételeket sorolnak fel az előbbi tulajdonságra. A továbbiakban ezekre a martingálokra az irodalomban elterjedt, Ocone martingál névvel fogunk hivatkozni. A [2] dolgozatukban mutatják be a témakör egyik megoldatlan problémáját. Az a sejtésük, hogy egy martingál pontosan akkor Ocone, ha $M$-nek és Lévy-transzformáltjának, $\hat{M} = \int \operatorname{sgn}(M) \, \mathrm{d}M$-nak az eloszlása megegyezik.

#### 2.3.1. Ocone martingálok karakterizációja az eloszlás segítségével

**4. tétel.** *(a) Ha $W(t)$ $(t \geq 0)$ egy Wiener-folyamat és $C(t)$ $(t \geq 0)$ egy tőle független, 0-ban eltűnő, monoton növekedő és folytonos véletlen folyamat, akkor az $M(t) = W(C(t))$ lokális martingál folytonos lokális Ocone-martingál.*

*(b) Megfordítva, ha $M$ szimmetrikusan fejlődő, folytonos lokális martingál, akkor az ő DDS Brown-mozgása és kvadratikus variációja függetlenek.*

Ennek bizonyítása úgy történik, hogy a diszkrét közelítés megfelelő folyamat párjainak a függetlenségét látjuk be a (4) feltételből. Pontosabban azt bizonyítjuk, hogy a (4) feltétel mellett minden $m$ esetén a $\{\tau_m(k)\}_k$ sorozat független a $\{M(\tau_m(i+1)) - M(\tau_m(i))\}_i$ sorozattól.

#### 2.3.2. Ocone martingálok tulajdonságai

Ennek a fejezetnek az elején felsorolunk néhány, az Ocone tulajdonsággal ekvivalens feltételt. A D tételben a (ii-iv) részek ekvivalenciáját Ocone bizonyította. A (i-iii-v-vi) részek ekvivalenciájának a bizonyítását Émery-Dubins-Yor végezte el.

**D tétel.** *Legyen $M$ folytonos martingál. A következő öt állítás ekvivalens:*

*(i) a $\beta^M$ DDS Brown-mozgás és a $\langle M \rangle$ kvadratikus variáció függetlenek;*

*(ii) feltéve $\langle M \rangle$-et $M$ Gauss eloszlású martingál;*

*(iii) minden $\{-1, 1\}$ értéket felvevő, $\mathcal{F}$-jósolható $H$ folyamat esetén*

$$\left( \int H \, \mathrm{d}M, \langle M \rangle) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (M, \langle M \rangle \right);$$

*(iv) minden determinisztikus, $\mathbf{I}_{[0,a]} - \mathbf{I}_{(a,\infty)}$ alakú $h$ függvényre az $\int h \, \mathrm{d}M$ és az $M$ martingáloknak ugyanaz az eloszlásuk;*

(v) *tetszőleges $\mathcal{F}$-jósolható, $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \sigma(\langle M \rangle)$ mérhető olyan $H$ folyamatra, mely egyben m.m. négyzetesen integrálható* $\left(\int_0^\infty H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M \rangle_s < \infty \text{ m.m.}\right)$ *a*

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(i\int_0^\infty H_s \,\mathrm{d}M_s\right)\Big|\langle M \rangle\right] = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\infty H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M \rangle_s\right)$$

*egyenlőség teljesül;*

(vi) *minden* $\sum_{j=1}^n c_j \mathbf{I}_{[0,a_j]}$ *formában írható h függvényre*

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(i\int_0^\infty h(s) \,\mathrm{d}M_s\right)\right] = \mathbf{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s) \,\mathrm{d}\langle M, M \rangle_s\right)\right].$$

A fejezet elején említettük, hogy a témában fennáll egy tíz éves sejtés, miszerint egy martingál pontosan akkor Ocone, ha $M$-nek és Lévy-transzformáltjának, $\hat{M} = \int \operatorname{sgn}(M)\,\mathrm{d}M$-nak az eloszlása megegyezik.

Dubins, Émery és Yor bizonyították, hogy ez a sejtés ekvivalens a 70-es évek második fele óta fennálló másik sejtéssel. Ez azt állítja, hogy a $\mathcal{T} : B \to \int \operatorname{sign}(B)\,\mathrm{d}B$ Lévy-transzformáció ergodikus a Wiener-téren.

Ennek a sejtésnek az igazságát többek között egy Dubins és Smorodinsky [3, 1992] által bizonyított tény erősíti, miszerint a Lévy-transzformáció diszkrét verziója ergodikus.

Ennek a fejezetnek a végén bizonyítjuk még azt az egyszerű állítást, hogy a $\mathcal{T}^n B$ $n \geq 0$ folyamatok páronként gyengén ortogonálisak a következő értelemben [12]:

Két lokális martingál, $M$ és $N$ gyengén ortogonális, ha $\mathbf{E}M_s N_t = 0$ minden $s$, $t \geq 0$ esetében. Ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy $s \geq 0$ esetén $\mathbf{E}\langle M, N \rangle = 0$. Jelen helyzetben ez azt jelenti, hogy a $\mathcal{T}^n M_t$ és a $\mathcal{T}^k M_t$ martingálok együttesen nem Gauss eloszlásúak.

**1. állítás.** *A $\mathcal{T}^n W$, $n \geq 0$, martingálok páronként gyengén ortogonálisak, azaz minden $s, t \geq 0$ időpontban, minden $n \neq k$ pozitív hatványokra az*

$$\mathbf{E}\mathcal{T}^n W_s \mathcal{T}^k W_t = 0$$

*egyenlőség teljesül.*

### 2.3.3. Néhány példa Ocone és nem Ocone martingálokra

A dolgozat ezen fejezetében néhány érdekes, ismert tulajdonságát elevenítjük fel az Ocone martingáloknak, továbbá itt írjuk le néhány új eredményünket. A dolgozatban ezen kívül további példákat is adunk Ocone, illetve nem Ocone martingálokra. Ebben az összefoglalóban nem közöljük az összes ismert példát és tulajdonságot.

**2. állítás.** *Tegyük fel, hogy $\langle M \rangle_\infty = \infty$ és $M$ a*

$$M_t = x + \int_0^t \sigma(M_s)\,\mathrm{d}\beta_s$$

*alakban írható, ahol $\sigma$ egy sehol sem eltűnő függvény és $\beta$ egy Brown-mozgás. Ekkor, $M$ Gauss eloszlású martingál.*

**B példa.** ([20]). Legyen $(B_t, C_t)$, $t \geq 0$ egy síkbeli Brown-mozgás, akkor a

$$\mathcal{A}_t = \frac{1}{2}\int_0^\infty (C_s \,\mathrm{d}B_s - B_s \,\mathrm{d}C_s)$$

folyamat Ocone martingál. Ez az állítás a következő, általánosabb tétel felhasználásával is bizonyítható. Ehhez a tételhez az inspirációt Marc Yor adta.

**5. tétel.** *Legyen $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ egy reguláris függvény. A deriváltjának az adjungáltját jelölje $\Psi(\mathbf{x}) = (\Phi')^T(\mathbf{x})$. Továbbá tegyük fel, hogy a következő egyenlőségek teljesülnek:*

$$\Psi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \textit{és } \mathbf{x}\cdot\Phi(\mathbf{x}) = 0 \textit{ minden } \mathbf{x} \in \mathbb{R} \textit{ esetén}$$

*ahol $\cdot$ jelöli a skalárszorzást $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor, ha $B$ egy $d$-dimenziós Brown-mozgás, akkor*

$$M_t = \int_0^t \Phi(B_s)\cdot \mathrm{d}B_s$$

*Ocone martingál.*

**1. következmény.** *Ha $\Phi$ a $\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ alakban írható, ahol $A$ egy reguláris mátrix, akkor az előbbi feltételekből következik, hogy $A$ ortogonális és anti-szimmetrikus.*

Ezt felhasználva a B példa martingáljának Ocone tulajdonsága azonnal látható.

## 2.4. A lokális idő közelítése

Az általunk használt bolyongásos konstrukció különösen jól használható a Brown-mozgás lokális idejének approximációjára, ugyanis a konstrukció során ha két tetszőleges pont ugyanazon a szinten volt, akkor a későbbi lépésekben is ugyanazon a szinten maradnak, így lényegében azt kell meghatározni, hogy egy adott szinten és adott finomításból kiindulva a következő finomításban hány új pont jön be az adott szintre.

Mivel az, hogy mikor ér vissza először a 0-ba a bolyongás az egyes finomítási lépésekben véletlen mennyiség, ezért a tárgyalt közelítési módszerünkkel nem tudunk természetes közelítést adni a Brownian excursion-re, bridge-re és meander-re. A dolgozatban ezen mennyiségek közelítésére Phillipe Marchal konstrukcióját mutatjuk be, ami viszont nem annyira természetes a lokális idő közelítésére.

### 2.4.1. A lokális idő közelítése

Jelölje $\mathcal{L}$ a $B$ Brown-mozgás 0-beli lokális idejét. Legyen $\{B_m\}$ a szokásos skálázott bolyongás sorozat, amely a $B$-t közelíti. Legyen $\ell_m(k) := \#\{0 \leq l < k \,|\, \widetilde{S}_m(l) = 0\}$ és $\mathcal{L}_m(t) := \frac{1}{2^m}\ell_m\left(\lfloor t2^{2m}\rfloor\right)$ a $B_m$ folyamat lokális ideje a 0-ban a $t$ ideig. Azt bizonyítjuk, hogy ez a mennyiség egy valószínűséggel egyenletesen konvergál a Brown mozgás lokális idejéhez. A bizonyítás fő ötlete az, hogy kiszámoljuk, hogy egy adott szinten az eggyel későbbi közelítés hány új pontot hoz be. Kiderül, hogy az $m$-dik közelítés minden 0-elérése után az $(m+1)$-dik szinten bejön még a többitől független *geometriai*$(1/2)$ eloszlású számú 0-elérés. Tehát a tételünk:

**6. tétel.** *Amint $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{[0,K]}|\mathcal{L}_n(t) - \mathcal{L}(t)| \geq C\,K^{1/4}(\log_* K)^2 n^2 2^{-n/2}\right) \leq \lambda(C)\left(K^{1/2}2^n\right)^{2-C},$$

*elegendően nagy $C$ és $C$-től függő $\lambda(C)$ kostansokkal egy megfelelően nagy $n$ után.*

A $C$ konstans helyes megválasztásával a Borel-Cantelli lemmát használva kapjuk a következő eredményt.

**2. következmény.**

$$\sup_{[0,K]} |\mathcal{L}_n(t) - \mathcal{L}(t)| < O(1) n^2 2^{-\frac{n}{2}} \qquad m.m. \qquad (n \to \infty)$$

$$\sup_{[0,K]} |\mathcal{L}_n(t) - \mathcal{L}(t)| < K^{\frac{1}{4}} (\log K)^2 \qquad m.m. \qquad (K \to \infty)$$

*minden elegendően nagy $m$-re.*

Az alábbi következmény szükséges eszköze lesz a 9. tételnek a 2.5. fejezetben.

Mielőtt kimondanánk ezt a lokális idő globális konvergenciájáról szóló tételt, be kell vezetnünk néhány jelölést. Jelölje $\mathcal{L}^a(t)$ és $\mathcal{L}_n^a(t)$ a Brown-mozgás, illetve annak $n$-dik közelítésének a lokális idejét. Mivel ennél a diszkrét mennyiségnél nem egyértelmű a definíció, legyen $\mathcal{L}_n^a(t) = \mathcal{L}_n^{\lceil a \rceil_n}(t)$-ként definiálva, ahol $\lceil a \rceil_n = \frac{\lceil a 2^n \rceil}{2^n}$. Még részletesebben, $\mathcal{L}_n^{\lceil a \rceil_n}(t) = \frac{1}{2^m} \ell_m^{\lceil a 2^n \rceil}(\lfloor t 2^{2m} \rfloor) = \frac{1}{2^m} \#\{0 \le l < \lfloor t 2^{2m} \rfloor \mid \widetilde{S}_m(l) = \lceil a 2^n \rceil\}$.

**3. következmény.**

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \sup_{[0,K]} |\mathcal{L}_n^a(t) - \mathcal{L}^a(t)| < O(1) 2^{-\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) n} \qquad m.m. \qquad (n \to \infty)$$

*minden tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$ számra.*

### 2.4.2. Brownian excursion, bridge és meander – Marchal konstrukciója

Ebben a részben felidézzük Phillipe Marchal algoritmusát a Brown excursion, bridge és meander approximációjára.

## 2.5. Sztochasztikus integrálás trajektóriák mentén

Ebben a fejezetben az a fő célunk, hogy súlyozott véletlen összegek sorozatának a segítségével tetszőleges kompakt intervallumon egy valószínűséggel egyenletesen megközelítsünk $\int_0^t Y_s \, \mathrm{d}M(s)$ típusú integrálokat, ahol $M$ folytonos martingál és $Y$ a martingálra nézve integrálható folyamat. Ki fog derülni, hogy módszerünk integrandusok két osztályában meglehetősen természetesen keresztülvihető. Az első osztály olyan $Y$ folyamatokból áll, amelyeknek egy valószínűséggel jobbról folytonos és bal limesszel rendelkező trajektóriái vannak. A második osztály folyamatai $Y = f'_-(M)$ alakúak, ahol $f'_-$ két konvex függvény különbségének baloldali deriváltja.

A fő vonása ezen konstrukciónak, hogy diadikusan felosztjuk a teret, amely vagy az integranduson, vagy az integrátor folyamaton Szkorohod-típusú megállási időket definiál. Ezen megállási időket használjuk a diszkrét közelítés ugráspontjainak. Ezen a módon olyan megközelítését kapjuk a sztochasztikus integrálásnak, mely meglehetősen eltér a szokásostól.

Hasonló megközelítést találhatunk Karandikar dolgozataiban, így összevetés és a dolgozat teljesebbé tételének céljából néhány alapvető eredményét közöljük az értekezés ezen fejezetének 2.5.1. alfejezetében. Ezen összefoglalóban ezt a részt elhagyjuk.

A fő különbség a két megközelítés között az, hogy melyik folyamatra alkalmazzuk a fent vázolt diszkrétizációt. Karandikarnál ez az integranduson történik, míg a mi esetünkben a meghajtó folyamatra hajtjuk végre.

#### 2.5.2. Diszkrétizácó a háttér folyamatra alkalmazva

**7. tétel.** *Legyen $(W_t, (\mathcal{F}_t))$ egy Brown-mozgás a standard filtrációval. Legyen $f$ jobbról folytonos baloldali határértékkel rendelkező folyamat és minden $n \geq 1$ esetén legyen $\{s_n(i) : i \geq 0\}$ a (2) sorban definiált Szkorohod-féle megállási idők.*

*A $(I_t^n)$ közelítő integrál legyen a következőféleképpen definiálva. $s_n(k) \leq t < s_n(k+1), k \geq 0$ esetén legyen*

$$I_t^n = \sum_{i=0}^{k-1} f_{s_n(i)}(W_{s_n(i+1)} - W_{s_n(i)}) + f_{s_n(k)}(W_t - W_{s_n(k)}).$$

*ekkor tetszőleges $T < \infty$ esetén fennáll a*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| I_t^n - \int_0^t f \, \mathrm{d}W \right| \to 0 \qquad m.m. \qquad (n \to \infty)$$

*konvergencia.*

A bizonyítás azon alapul, hogy $m$ növekedésével az $\{s_m(k)\}_k$ sorozat értékkészlete sűrű lesz minden kompakt intervallumon.

Innen, a $DDS$-konstrukciót használva egyszerű következményként adódik a következő, általánosabb tétel.

**8. tétel.** *Legyen $M$ olyan folytonos $(\mathcal{F}_t)$-martingál, melynek kvadratikus variációjára teljesül, hogy az $\langle M \rangle_\infty = \infty$ esemény egy valószínűségű. Legyen $Y$ cadlag, $(\mathcal{F}_t)$-adaptált folyamat és a $\{\tau_n(i) : i \geq 0\}$, $n \geq 1$ megállási idők a (3) alapján definiáltak.*

*Ekkor az $(Y_t^n)$-t és $(I_t^n)$-t $\tau_n(k) \leq t < \tau_n(k+1), k \geq 0$ esetén az*

$$Y_t^n = Y_{\tau_n(i)}$$
$$I_t^n = \int_0^t Y_s^n \, \mathrm{d}M_s = \sum_{i=0}^{k-1} Y_{\tau_n(i)}(M_{\tau_n(i+1)} - M_{\tau_n(i)}) + Y_{\tau_n(k)}(M_t - M_{\tau_n(k)}).$$

*kifejezések definiálják. Ekkor tetszőleges $T < \infty$ mellett a*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| I_t^n - \int_0^t Y \, \mathrm{d}M \right| \to 0 \qquad m.m. \qquad (n \to \infty)$$

*közelítés kapható.*

A következő fontos állítás egyszerű következménye ennek a tételnek.

**4. következmény.** *A 8. tétel feltételei mellett fennáll a*

$$\sup_{0 \leq t \leq K} \left| \sum_{\tau_n(i+1) \leq t} Y_{\tau_n(i)}(M_{\tau_n(i+1)} - M_{\tau_n(i)}) - \int_0^t Y \, \mathrm{d}M \right| \to 0 \qquad m.m. \qquad (n \to \infty)$$

*konvergencia.*

Ezen következmény alapján mondhatjuk azt, hogy $I_t^n$ utolsó taggal csonkított változatát felfoghatjuk mint sztochasztikusan súlyozott véletlen, $\pm\frac{1}{2^m}$ értékű lépésekkel rendelkező szimmetrikus bolyongás részletösszege.

### 2.5.3. A nem jobbról folytonos integrandus esete

Karandikar módszere, ahol az integrandust diszkrétizáljuk, erősen kihasználja, hogy jobbról folytonos folyamatokra alkalmazza a diszkretizációt. Így az ő módszere nem működik a $\operatorname{sign}(B_t)$ folyamat esetén, mely folyamat gyakran szolgál példák és ellenpédák alapjául a sztochasztikus analízisben. Ezt kiküszöbölhetjük, ha a diszkrétizációt, mint előbb, a meghajtó folyamatra hajtjuk végre. Ennek eredményeként módszerünk kiterjeszthető olyan folyamatokra, melyek $f'_-(B)$ alakban írhatóak, ahol $f'_-$ két konvex függvény különbségének deriváltja.

Ez a módszer általánosítása Szabados Tamás [15] által bemutatott approximációs eredménynek, ahol $\int f(B)\,\mathrm{d}B$ integrálokat közelített $f \in C^2$ típusú függvények esetében.

A 3. tételt és az Itô-Tanaka formulát használva [12] juthatunk el a következő tételhez:

**9. tétel.** *Legyen $f$ két konvex függvény különbségének deriváltja és legyen olyan $M$ folytonos lokális martingál, mely rendelkezik a $\langle M\rangle_\infty = \infty$ m.m. tulajdonsággal. Ekkor $T > 0$ mellett*

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t f'_-(M_m(s))\,\mathrm{d}M_m(s) - \int_0^t f'_-(M(s))\,\mathrm{d}M(s)\right| \to 0 \qquad m.m. \qquad (m\to\infty)$$

# 3. A Brown mozgás egy exponenciális funkcionáljának erős közelítése

Ez a rész a bolyongásokkal való közelítés egy speciális alkalmazását mutatja be.

A Brown-mozgásnak az

$$\mathcal{I}_\nu = \int_0^\infty \exp\left(B(t) - \nu t\right)\,\mathrm{d}t$$

egyenlőséggel definiált exponenciális funkcionálját és főleg annak diszkrét verzióját fogjuk tanulmányozni. Ez az $Y = 1 + \xi_1 + \xi_1\xi_2 + \cdots$ tipusú valószínűségű változók vizsgálatához vezet, amelyek a következő differencia egyenlet alakban is felírhatók:

$$Y \stackrel{\mathrm{d}}{=} 1 + \xi Y. \tag{5}$$

## 3.1. Bevezetés

A $B$ Brown-mozgás segítségével felírható

$$S(t) = S_0 \exp\left(\sigma B(t) + \left(\mu - \sigma^2/2\right)t\right), \qquad t \geq 0$$

*geometriai Brown-mozgás* fontos szerepet játszik a Black–Scholes elméletben.

Az ázsiai opció beárazásának a feladatánál merül fel az átlagos ár folyamatnak,

$$A(t) = \frac{1}{t}\int_0^t S(u)\,\mathrm{d}u, \qquad t \geq 0$$

vizsgálata. Ezzel kapcsolatos a végtelen időskálára definiált sokak által tanulmányozott

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \exp(B(t) - \nu t)\,\mathrm{d}t \qquad (\nu > 0)$$

exponenciális funkcionál eloszlásának meghatározása. Az az érdekes eredmény mondható, hogy $1/\mathcal{I}_\nu$ gamma eloszlású 1 paraméterrel és $2\nu$ indexszel:

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \exp(B(t) - \nu t)\,\mathrm{d}t \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{2}{Z_{2\nu}} \qquad (\nu > 0).$$

Ennek az állításnak a bizonyítását Dufresne [4] adta meg diszkrét gamma-approximációt használva, majd Yor [19] mutatott egy rövid és elegáns sztochasztikus analízisbeli eszközöket alkalmazó bizonyítást.

Ennek az eloszlásban vett egyenlőségnek a következménye, hogy $\mathcal{I}$ $p$-dik egész momentumai pontosan akkor végesek, ha $p < 2\nu$. Ekkor

$$\mathbf{E}(\mathcal{I}^p) = 2^p \frac{\Gamma(2\nu - p)}{\Gamma(2\nu)}. \tag{6}$$

Ez érvényes a negatív egész momentumokra, melyek karakterizálják $\mathcal{I}$ eloszlását.

Érdekesebb összefüggést kapunk, ha a drifttel ellátott Brown mozgást egy $(\alpha_t, t \geq 0)$ subordinátor (0-ból induló, növekedő Lévy-folyamat) folyamattal helyettesítjük. Ekkor [1] alapján azt mondhatjuk, hogy a $\mathcal{J} = \int_0^\infty \exp(-\alpha_t)\,\mathrm{d}t$ kifejezés minden pozitív egész momentuma véges és a következő tulajdonság teljesül:

$$\mathbf{E}(\mathcal{J}^p) = \frac{p!}{\Phi(1)\cdots\Phi(p)}, \qquad \Phi(\lambda) = -\frac{1}{t}\log \mathbf{E}(\exp(-\lambda\alpha_t)). \tag{7}$$

Hasonló eredmény a Brown-mozgással előállított exponenciális funkcionál esetében csak közelítő értelemben mondható. A közelítésnél a Brown-mozgás bolyongásos konstrukcióját használva kapjuk a diszkrét exponenciális funkcionált, mely mennyiségnek a tulajdonságait a továbbiakban vizsgálni fogjuk.

Legyen tehát $(X_j)_{j=1}^\infty$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata úgy, hogy $\mathbf{P}(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$ és $S_0 = 0$, $S_k = \sum_{j=1}^k X_j$ $(k \geq 1)$. Ekkor $\mathcal{I}$-nek közelítő mennyisége a

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(S_k - k\nu) = 1 + \xi_1 + \xi_1\xi_2 + \cdots, \qquad \xi_j = \exp(X_j - \nu), \tag{8}$$

kifejezés. A későbbiekben $Y$-hoz hasonló előállítással rendelkező valószínűségi változókat fogunk vizsgálni. Ebben az egyszerű esetben $Y$-t diszkrét exponenciális funkcionálnak fogjuk nevezni.

A következő, 3.2. fejezetben azt bizonyítjuk, hogy az előbb definiált $Y$ eloszlása szinguláris Lebesgue mértékre nézve. Továbbá egy általánosabb eredményt is közlünk, melyben $\xi_j$ eloszlása szabadabban megválasztható.

A 3.3. fejezetben meghatározzuk az exp. funkcionál diszkrét közelítésének momentumait és megmutatjuk, hogy a (6) és a (7) esetekhez hasonló viselkedést tapasztalhatunk. Ezen túlmenően a momentumokkal kapcsolatban egy érdekes rekurziót fedeztünk fel, a közelítések részletes, korábbi momentumok segítségével felírt kifejtésében, ld. a 3.3.1. alfejezetet.

Végül a 3.4. fejezetben megmutatjuk, hogy a bolyongásos közelítés segítségével egyszerű, analitikus módszerekkel meghatározható $\mathcal{I}_\nu$ eloszlása. Így egy új bizonyítást kapunk Dufresne és Yor által bizonyított tételre.

## 3.2. A diszkrét exponenciális funkcionál eloszlása

A dolgozat ezen fejezetében átismételünk néhány fraktálanalízisbeli eszközt (3.2.1. fejezet), majd azzal az esettel foglalkozunk, mikor az (5)-beli $Y$ eloszlása nem „átfedő” (3.2.2. fejezet). Ezt a speciális esetet magában foglalja a következő, 3.2.3. alfejezetben bizonyított tétel. Ennek kimondása előtt megemlítjük $Y$ következő fraktális tulajdonságát.

A (5) sorban $\xi_j$-nek legyenek az értékei $\gamma_1 < \cdots < \gamma_N < 1$ $p_i = \mathbf{P}(\xi = \gamma_i)$ valószínűségekkel. (Az alap esetben, az exp. funkcionál esetében ez a következőket jelenti: $N = 2$, $\gamma_1 = e^{-1-\nu}$,

$\gamma_2 = e^{1-\nu}$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$). A $T_i(x) = \gamma_i x + 1$ $(1 \le i \le N)$ függvények iterált függvény rendszert alkotnak. Ha

$$\mathbf{E}(\log \xi) = \sum_{i=1}^{N} p_i \, \log \gamma_i < 0$$

teljesül, akkor egyszerű meggondolással kapjuk, hogy fennáll a következő egyenlőség $Y$ eloszlására:

$$F(y) = \sum_{i=1}^{N} p_i \, F(T_i^{-1}(y)). \tag{9}$$

#### 3.2.3. Az eloszlás általános esetben

Ebben a részben belátjuk, hogy a (8)-beli $Y$ eloszlása $\nu > 1$ mellett szinguláris a Lebesgue-mértékre nézve. Ehhez a következő, ennél általánosabb érvényű tételt bizonyítjuk. A bizonyítás Simon Károllyal való megbeszélés eredménye [13].

**10. tétel.** *Az $\xi$ valószínűségi változó értékei legyenek $\gamma_i$ $(i = 1, \ldots, N)$, $0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_N < 1$, továbbá legyen $p_i = \mathbf{P}(\xi = \gamma_i)$. Tekintsük a $(\xi_j)_{j=1}^{\infty}$, $\xi_j \stackrel{\mathsf{d}}{=} \xi$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozatát. Ekkor $Y = 1 + \xi_1 + \xi_1\xi_2 + \cdots$ eloszlása szinguláris a Lebesgue-mértékre a következő feltétel teljesülése esetén*

$$-\chi_{\mathbf{P}} = \mathbf{E}(\log \xi) = \sum_{i=1}^{N} p_i \log \gamma_i < \sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i = -H_{\mathbf{P}}.$$

*$\chi_{\mathbf{P}}$ jelöli a $(T_1, \ldots, T_N)$ iterált függvény rendszer Lyapunov exponensét a $\mathbf{P}$ Bernoulli mértékre nézve.*

A diszkrét exp. funkcionálhoz visszatérve az kapjuk, hogy ez a feltétel pont akkor teljesül, ha $\nu > \log 2 \approx 0.693$. Azt a $\gamma_2 < 1$ tulajdonsággal összevetve kapjuk, hogy $Y$ eloszlása szinguláris a Lebesgue mértékre nézve, ha $\nu > 1$.

## 3.3. A diszkrét exponenciális funkcionál momentumai

A binomiális-tételt használva a következő rekurzió kapható $Y$ $p$-dik, pozitív egész $e_p = \mathbf{E}(Y^p)$-nal jelölt momentumára:

$$e_p = \frac{1}{1-\mu_p} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} \mu_k \, e_k, \tag{10}$$

feltéve, hogy $\mu_p < 1$. Itt a $\mu_k = \mathbf{E}(\xi^k)$, $e_k = \mathbf{E}(Y^k)$, $k \ge 0$ jelöléseket használtuk.

#### 3.3.1. Permutációk adott csökkenési halmazzal

A (10) összefüggésből indukcióval látható, hogy minden $p \ge 1$ pozitív egész esetén $\mathbf{E}(Y^p)$ racionális függvénye a $\mu_1, \ldots, \mu_p$ momentumoknak:

$$\mathbf{E}(Y^p) = \frac{1}{(1-\mu_1)\cdots(1-\mu_p)} \sum_{(j_1,\ldots,j_{p-1}) \in \{0,1\}^{p-1}} a^{(p)}_{j_1,\ldots,j_{p-1}} \mu_1^{j_1} \cdots \mu_{p-1}^{j_{p-1}}, \tag{11}$$

ahol a számlálóban szereplő együtthatók $\xi_j$ eloszlásától függetlenek.

Ezen $a^{(p)}_{j_1 \cdots j_{p-1}}$ együtthatók egy Pascal-háromszög típusú táblázatba rendezhetők, ahol az előbbi együttható helyét a $p$-dik sorban a $j_{p-1}2^{p-2} + \cdots + j_1 2^0$ kifejezés adja meg.

Ezen a ponton felmerül az a valószínűségelmélettől független kérdés, hogy tudunk-e valamilyen jelentést tulajdonítani a $a^{(p)}_{j_1\ldots j_{p-1}}$ együtthatóknak. A válasz meglehetősen meglepően az, hogy $a^{(p)}_{j_1\ldots j_{p-1}}$ egyenlő azon $\pi$ permutációk számával az $S_p$ csoportból, amelyeknek éppen ott van csökkenési helye, ahol $j_i = 1$, $1 \le i \le p-1$. (Egy $\pi \in S_p$ permutációnak csökkenése van az $i$ helyen, ha $\pi(i) > \pi(i+1)$.) Ezen a felismerésen túl, új rekurziót adunk adott csökkenési halmazzal rendelkező permutációk számának a kiszámolására.

Emlékeztetünk arra, hogy egy $\pi \in S_p$ permutáció csökkenési halmaza a $D(\pi) = \{i : \pi(i) > \pi(i+1), 1 \le i \le p-1\}$ kifejezéssel definiált. Ekkor a következő állítás mondható:

**11. tétel.** *A $a^{(p)}_{j_1\ldots j_{p-1}}$ együtthatók megegyeznek azon permutációk számával, $b^{(p)}(S)$-nel, ahol az $S$ csökkenési halmaz a következő definícióval adott:*

$$S = \{s_1, \ldots, s_m\} = \{k : j_k = 1, 1 \le k \le p-1\}, \quad m = \sum_{k=1}^{p-1} j_k. \tag{12}$$

Ennek az állításnak a bizonyítását mind algebrai, mind kombinatorikai módszerrel is elvégezzük. Végül, bemutatunk egy új rekurziót adott csökkenési halmazzal rendelkező permutációk számának a meghatározására.

**8. lemma.** *Tetszőleges $p \ge 2$ egész szám és $(j_1, \ldots, j_{p-1}) \in \{0,1\}^{p-1}$ multiindex esetén fennáll a következő rekurzió:*

$$a^{(p)}_{j_1\ldots j_{p-1}} = \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i a^{(p-1)}_{j_1^{(i)}\ldots j_{p-2}^{(i)}} = \sum_{(i_1,\ldots,i_{p-2}) \in L(j_1,\ldots,j_{p-1})} a^{(p-1)}_{i_1\ldots i_{p-2}},$$

*ahol $a^{(1)} = 1$, $\delta_i = |j_i - j_{i-1}|$ for $i \ge 2$, $\delta_1 = 1$, $j_k^{(i)} = j_k$ minden $1 \le k \le i-1$ esetén, $j_k^{(i)} = j_{k+1}$ tetszőleges $i \le k \le p-2$ számra. Továbbá $L(j_1, \ldots, j_{p-1})$-vel jelöljük azon különböző, $p-2$ hosszú bináris sorozatok halmazát, amelyekben pontosan egy helyet töröltünk a $(j_1, \ldots, j_{p-1})$ sorozatból. Például $a^{(5)}_{0110} = 11 = a^{(4)}_{110} + a^{(4)}_{010} + a^{(4)}_{011}$.*

## 3.4. A Brown mozgás exp. funkcionáljának közelítése

Ebben a fejezetben az exponenciális funkcionálra diszkrét közelítést alkalmazva karakterizáljuk az eloszlását. A közelítés, ahogy a bevezetésben is említettük a szokásos bolyongásos approximációt jelenti. Belátjuk, hogy a diszkrét verzió egy valószínűséggel, minden momentumában és $L_p$ térben is konvergál. A momentum módszert fogjuk használni az eloszlás meghatározására. Ehhez szükség van a C lemmának egy általánosabb alakjára: majdnem minden $\omega$-ra létezik egy $m_0(\omega)$ szám úgy, hogy minden $m \ge m_0(\omega)$ egész mellett és minden fix $K \ge e$ esetén fennáll a

$$\sup_{j \ge 1} \sup_{0 \le t \le K} |B_{m+j}(t) - B_m(t)| \le K^{\frac{1}{4}} (\log K)^{\frac{3}{4}} m 2^{-\frac{m}{2}}$$

konvergencia. Ezt használva bizonyíthatjuk a következő lemmát:

**9. lemma.** *Legyen $B_m(t)$, $t \ge 0$, $m \ge 0$ a szokásos véletlen bolyongás sorozat, amely a $(B(t), t \ge 0)$ Brown-mozgáshoz konvergál egy valószínűséggel egyenletesen minden kompakt intervallumon. Ekkor amint $m \to \infty$, minden $\nu > 0$ mellett fennáll az*

$$Y_m = 2^{-2m} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(2^{-m} \widetilde{S}_m(k) - \nu k 2^{-2m}\right)$$
$$\to \quad \mathcal{I} = \int_0^{\infty} \exp\left(B(t) - \nu t\right) \mathrm{d}t < \infty \qquad a.s.$$

*konvergencia.*

Az előző, momentumokkal foglalkozó fejezet eredményeit alkalmazva $Y_m$-re, majd határértéket véve meghatározhatjuk a $\lim_{m\to\infty} \mathbf{E}(Y_m^p)$ mennyiségeket minden értelmes $p$ egészre.

### 3.4.1. Az exponenciális funkcionál momentumai

**10. lemma.** *Ha $p$ olyan pozitív egész, melyre $\frac{p}{2} < \nu$ teljesül, akkor*

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{E}(Y_m^p) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{p}\left(\nu - \frac{k}{2}\right)} < \infty.$$

Az alábbi negatív momentumokról szóló eredmény egyszerű kombinatorikai és analízisbeli eszközökkel bizonyítható.

**11. lemma.** *$p \geq 1$ esetén a következő eredményhez juthatunk:*

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{E}(Y_m^{-p}) = \lim_{m\to\infty} \mathbf{E}(Y_m^{-1}) \prod_{k=1}^{p-1}\left(\nu + \frac{k}{2}\right),$$

*ahol* $\lim_{m\to\infty} \mathbf{E}(Y_m^{-1}) < \infty$.

Végül bebizonyítjuk, hogy $Y_m^{-1}$ az $L^p$ térben konvergál $\mathcal{I}^{-1}$-hez. Ez lehetővé teszi, hogy a bizonyítsuk Yor Dufresne ([4] és [19]) eredményét.

**12. tétel.** *A következő állítások teljesülnek:*

*(a) $Y_m^{-1}$ $\mathcal{I}^{-1}$hez konvergál $L^p$-ben minden $p \geq 1$ valós számra és $\lim_{m\to\infty} \mathbf{E}(Y_m^{-p}) = \mathbf{E}(\mathcal{I}^{-p}) < \infty$;*

*(b) $\mathcal{I} \overset{\mathrm{d}}{=} 2/Z_{2\nu}$, ahol $Z_{2\nu}$ gamma eloszlású valószínűségi változó $2\nu$ indexszel és $1$ paraméterrel;*

*(c) $Y_m$ konvergál $\mathcal{I}$-hez $L^p$-ben minden $p$, $1 \leq p < 2\nu$ tulajdonsággal rendelkező (tegyük fel, hogy $\nu > \frac{1}{2}$). Ekkor $\lim_{m\to\infty} \mathbf{E}(Y_m^p) = \mathbf{E}(\mathcal{I}^p) < \infty$. Ez az állítás érvényes $q$, $1 \leq q < p$ valós szám esetén is.*

### 3.4.2. Az exponenciális-funkcionál folyamat tulajdonságai

A 12. tétel azt állítja, hogy az $X(\nu) = \frac{1}{\mathcal{I}(\nu)}$, $0 \leq \nu$ folyamat marginális eloszlásai gamma valószínűségi változók ugyanúgy, mint a gamma folyamatnál. Ennek ellenére $X$ nem gamma folyamat, ugyanis trajektóriái folytonosak:

**4. állítás.** *A*

$$X(\nu) := \frac{1}{\int_0^\infty \mathrm{e}^{B_s - \nu s}\,\mathrm{d}s}$$

*folyamat trajektóriái egy valószínűséggel folytonos függvények.*

Érdekes következménye a 11. lemma bizonyításában használt módszernek az alábbi lemma. Azt állítja, hogy a $(\mathcal{I}^{-1}(\nu))_{\nu>0}$ folyamat multiindexes momentumai kiszámolhatóak az egyes koordinátánként nagyobb multiindexes momentumokból. Megjegyezzük, hogy ez az állítás jelen tudásunk szerint nem használható arra, hogy kiszámoljuk $X(\nu)$ tetszőleges multiindexes momentumát.

Az egyszerűség kedvéért bevezetünk néhány jelölést.
Rögzítsünk egy $d$, pozitív egész számot és a $\underline{k} \in {\mathbb{Z}_+}^d$, $\underline{\nu} \in \mathbb{R}_+^d$ vektorokat. Legyen

$$M((\underline{\nu}, \underline{k})) = \mathbf{E}\left(\mathcal{I}(\nu_1)^{-k_1} \dots \mathcal{I}(\nu_d)^{-k_d}\right)$$

és $(\underline{\nu}, \underline{k})_i := (\underline{\nu}, (k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \ldots k_d))$.

Az $M((\underline{\nu}, \underline{k}))$ momentumra a következő rekurziót adhatjuk:

**12. lemma.**

$$M((\underline{\nu}, \underline{k})) = \left( \frac{k_1 + \cdots + k_d}{2} + \frac{k_1\nu_1 + \cdots + k_d\nu_d}{k_1 + \cdots + k_d} \right)^{-1} \sum_{i=1}^{d} \frac{k_i}{k_1 + \cdots + k_d} M((\underline{\nu}, \underline{k})_i).$$

# References


[1] Carmona, P., Petit, F. and Yor, M. (1997) On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. In: Yor, M., ed. *Exponential functionals and principal values related to Brownian motion*, pp. 73-121. Biblioteca de la Revista Matemática Iberoamericana.

[2] Dubins, L. E.; Émery, Michel and Yor, M. (1993) On the Lévy transformation of Brownian motions and continuous martingales. In: *Séminaire de Probabilités, XXVII, Lecture Notes in Math., 1557*, pp. 122–132, Springer, Berlin.

[3] Dubins, L. E. and Smorodinsky, M. (1992) The Modified, Discrete, Lévy-Transformation is Bernoulli. In: *Séminaire de Probabilités, XXVI, Lecture Notes in Math., 1526*, Springer.

[4] Dufresne, D. (1990) The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding. *Scand. Actuarial J.*, 39-79.

[5] Karandikar, R.L. (1983) On the quadratic variation process of continuous martingales. *Illinois J. Math.* **27**, 178-181.

[6] Karandikar, L. Rajeeva (1995) On pathwise stochastic integration. *SPA* **57**, 11-18.

[7] Kiefer, J. (1969) On the deviation in the Skorokhod-Strassen approximation scheme. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **13** 321-332.

[8] Knight, F.B. (1962) On the random walk and Brownian motion. *Trans. Amer. Math. Soc.* **103**, 218-228.

[9] Marchal, P. (2003) Constructing a sequence of random walks strongly converging to Brownian motion, Preprint

[10] Ocone, D.L. (1993) A symmetry characterization of conditionally independent increment martingales. In: D. Nualart and M. Sanz-Solé, eds. *Barcelona Seminar on Stochastic Analysis, Progress in Probability, 32*, pp. 147-167, Birkhäuser, Basel.

[11] Révész, P. (1990) *Random Walk in Random and Non-Random Environments.* World Scientific, Singapore.

[12] Revuz, D. and Yor, M. (1999) *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Third edition, Springer, Berlin.

[13] Simon, K., Solomyak, B., and Urbański, M. (2001) Invariant measures for parabolic IFS with overlaps and random continued fractions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **353**, 5145-5164.

[14] Stanley, R. (1986) Enumerative Combinatorics. Vol. 1. Wadsworth and Brooks/Cole Mathematics Series, Monterey, Calif.

[15] Szabados, T. (1996) An elementary introduction to the Wiener process and stochastic integrals. *Studia Sci. Math. Hung.* **31**, 249-297.

[16] Szabados, T. and Székely, B. (2003) An exponential functional of random walks. *J. Appl. Prob.* **40**, 413-426.

[17] Szabados, T. and Székely, B. (2004) Moments of an exponential functional of random walks and permutations with given descent sets, *Periodicam Math. Hung.*, to appear

[18] Székely, B. and Szabados, T (2003) Strong approximation of continuous local martingales,

[19] Yor, M. (1992) On certain exponential functionals of real-valued Brownian motion. *J. Appl. Prob.*, **29**, 202-208.

[20] Vostrikova, L. and Yor, M. (2000) Some invariance properties (of the laws) of Ocone's martingales. In: *Séminaire de Probabilités, XXXIV, Lecture Notes in Math., 1729*, pp. 417–431, Springer, Berlin.