BME Matematika Intézet
Analízis Tanszék

Réffy Júlia

Asymptotics of random unitaries

Tézisfüzet

Témavezető: Petz Dénes
Egyetemi tanár,
Matematikai tudományok doktora

2005

1. Bevezetés a véletlen mátrixok elméletébe

A véletlen mátrixok mátrix értékű valószínűségi változók, más szóval olyan mátrixok, melynek elemei valószínűségi változók. A mátrix mérete, valamint az elemek együttes eloszlása alapján különböző véletlen mátrixokat definiálhatunk.

Wishart foglalkozott elsőként véletlen mátrixokkal a többdimenziós statisztikában. Olyan véletlen mátrixokat tanulmányozott, amelynek n darab oszlopát m dimenziós független azonos eloszlású valószínűségi vektorváltozók alkotják. Ezen mátrix kovarianciamátrixa egy $m \times m$-es véletlen mátrix várható értékeként adódik. Ezt a véletlen mátrixot normális eloszlású valószínűségi változók esetén Wishart mátrixnak nevezzük.

A véletlen mátrixok vizsgálatának fizikai motivációi is voltak. Wigner az atommag energiaszintjeit modellezte komplex önadjungált, vagy valós szimmetrikus véletlen mátrixok sajátértékeivel.

Mindkét esetben a fő kérdés a véletlen mátrixok sajátértékeinek viselkedése volt. Ha ismerjük a sajátértékek együttes sűrűségfüggvényét, akkor természetesen minden információ rendelkezésünkre áll a sajátértékekről, de ezen sűrűségfüggvény meghatározására csak akkor van esélyünk, ha ismerjük az elemek együttes sűrűségfüggvényét, és a mátrix eloszlása invariáns az untér konjugálásra. Így bár Wigner kiszámolta a normális elemű önadjungált véletlen mátrix sajátértékeinek együttes sűrűségfüggvényét [15], általános esetben azonban csak az sajátértékekből képzett tapasztalati eloszlásfüggvényt vizsgálta. Így önadjungált $n \times n$-es A_n véletlen mátrixsorozatra beátta az

$$F_n(x) := \frac{\#\{i : \lambda_i(A_n) < x\}}{n}$$

véletlen eloszlásfüggvények várható értékének konvergenciáját [14]. Később mások a fenti eloszlásfüggvény 1 valószínűségű és sztochasztikus konvergenciáját is bebizonyították az önadjungált és a kovariancia típusú mátrixok esetén [4, 10, 12]. Normális eloszlású elemekből kiindulva azt is tudjuk, hogy a tapasztalati eloszlásfüggvény sorozatra teljesül a nagy eltérés elv, azaz konvergenciasebesség exponenciális valamilyen alulról félig folytonos exponensfüggvénnyel.

A nem önadjungált mátrixok esete is érdekesnek bizonyult. Ilyen például az a mátrix, amelynek elemei független azonos eloszlású valószínűségi változók. Ez a mátrix egy egész véletlen mátrix családot definiál, ha a mátrixnak és adjungáltjának különböző lineáris kombinációit tekintjük. A normális eloszlású esetben a lineáris kombináció is normális, így a sajátértékek tapasztalati eloszlásának konvergenciáján túl, amihez elég tudnunk bizonyos momentumok végességét [7], az exponenciális konvergenciasebességhez tartozó exponensfüggvény is kiszámolható [13].

Másik nagyon fontos típusa a véletlen mátrixoknak az unitér véletlen mátrixok. Itt az elemek nem függetlenek, így a véletlen unitérek konstrukciója is érdekes. Az $n \times n$-es unitér mátrixok tere nem altér az $n \times n$-es mátrixok terében, de a mátrixszorzásra és az elemenkénti topológiára nézve kompakt topologikus csoportot alkotnak, így a legtermészetesebb módon adódó eloszlás az unitér mátrixok halmazán a Haar eloszlás. Ezen eloszlás szerinti véletlen mátrixok a Haar unitérek, és az unitérek eloszlását is erre a mértékre nézve tekintjük az eddigi Lebesgue mérték helyett. Az eloszlás definíciója alapján Haar unitér véletlen mátrix invariáns az unitérrel való szorzásra, így a sajátértékek együttes eloszlása meghatározható.

2. A disszertáció kivonata

A fenti témákat az alábbi sorrendben tárgyalom.

Az első fejezetben áttekintést adok a különböző véletlen mátrixokról. Normális eloszlású elemek esetén Wigner bizonyításánál részletesebben [11, 15] ismertetem a sajátértékek együttes sűrűségfüggvényének meghatározását. Nem normális esetben a sajátértékek tapasztalati eloszlásának konvergenciájáról szóló tételeket elevenítem fel növő mátrixméret esetén, és megemlítem, hogy ebben az esetben bár nem teljesül a nagy eltérés elv, más értelemben a konvergenciasebesség bizonyos feltételek mellett exponenciális [8].

A második fejezetben a nagy eltérés elmélet alapfogalmait és a véletlen mátrixokra vonatkozó nagy eltérés tételeket tekintem át. Ez az elmélet olyan valószínűségi változó sorozatról szól, amelynek határértéke determinisztikus. A normális elemű önadjungált véletlen mátrixok sajátértékeiből képzett tapasztalati eloszlássorozatra vonatkozó első nagy eltérés tételt Ben

Arous és Guionnet bizonyította [5]. Ezen a tételen kívül itt olvashatók az 1. fejezetben felsorolt normális elemű mátrixokra vonatkozó nagy eltérés tételek [13]. Az exponensfüggvény minden esetben egy súlyozott logaritmikus energia funkcionál, így mivel a sorozat határértékét az exponensfüggvény minimuma adja áttekintünk néhany potenciálelméleti tételt a logaritmikus energiáról, illetve annak egyensúlyi mértékéről.

A harmadik fejezetben ismertetem a Haar unitér véletlen mátrix konstrukcióját, majd az ebből adódó tulajdonságait, úgy mint az elemek sűrűségfüggvénye, az elemek korrelációja, és a sajátértékek együttes sűrűségfüggvénye. Itt található Diaconis és Shashahani tételének egy elemibb bizonyítása, mely szerint a Haar unitér mátrix különböző hatványainak nyoma aszimptotikusan független normális eloszlású. Ebből a Fourier transzformált egyértelműsége miatt következik a sajátértékek tapasztalati eloszlásának konvergenciája. Ugyanez a módszert használom Haar eloszlású ortogonális véletlen mátrixokra is. Végül bemutatom a Hiai és Petz [9] tételét, amely a Haar unitérek sajátértékeire mondja ki a nagy eltérés elvet.

A negyedik fejezetben új fajta mátrixból indulunk ki, melyet az $m \times m$-es unitér mátrix $n \times n$-es csonkításával kapunk. Itt részletesebb bizonyítást adok a Życzkowski és Sommers tételére, amely ezen mátrix sajátértékeinek együttes sűrűségfüggvényét adja meg, kiegészítve a normalizáló konstans pontos értékével [1]. Az együttes sűrűségfüggvényből kiszámolható a sajátértékek tapasztalati eloszlására vonatkozó nagy eltérés tétel exponensfüggvénye, $n \to \infty$, $m/n \to \lambda$ esetén $(0 < \lambda < 1)$, ami a disszertáció fő eredménye. Ennek következménye, hogy a tapasztalati eloszlásokból álló véletlen mértéksorozat konvergál az exponensfüggvényt adó logaritmikus energia egyensúlyi mértékéhez.

Az ötödik fejezetben a nemkommutatív valószínűségelméleti bevezető után bevezetem azt a nemkommutatív valószínűségi változót, amelynek véletlen mátrix modellje éppen a Haar unitér mátrix csonkítása.

3. Fő eredmények

A harmadik fejezet a Haar unitér véletlen mátrixokkal foglalkozik. A Fourier transzformált egyértelműségéből következik, hogy ha $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ egy $n \times n$-es Haar unitér véletlen mátrix sajátértékei,akkor $m \geq n$ esetén a $\lambda_1^m, \dots \lambda_n^m$ független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók az egyseégkörvonalon [1].

A momentum módszer alkalmazása új bizonyítást ad Diaconis and Shahshahani tételére [6]. Az első lépésben a 3.4. Tétel kimondja, hogy

$$\operatorname{Tr} U_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$$

eloszlásban, ahol ξ standard komplex normális eloszlású valószínűségi változó. Hasonló eredményt ad U_n magasabb hatványainak nyomára a 3.5. Tétel, mely szerint

$$\operatorname{Tr} U_n^l \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{l}\xi.$$

Végül a 3.6. Tétel az aszimptotikus függetlenséget mutatja meg. A bizonyítás annak igazolásán alapszik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{l} \left(\operatorname{Tr} U_n^i\right)^{a_i} \left(\overline{\operatorname{Tr} U_n^i}\right)^{b_i}\right) = \prod_{i=1}^{l} \delta_{a_i b_i} a_i! i^{a_i},$$

azaz a nyomok együttes momentumai konvergálnak az l darab független standard komplex normális eloszlású valószínűségi változó együttes momentumaihoz.

A 3.5. alfejezetben hasonló állításokat bizonyítok Haar eloszlású ortogonális véletlen mátrixokra. A Haar ortogonális véletlen mátrix konstrukciójából adódik, hogy a mátrix egy O_{ij} elemének sűrűségfüggvénye

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{n-3}{2}},$$

a $[0,1]$ intervallumon. Emiatt $\sqrt{n}O_{ij}$ eloszlása a standard normális eloszláshoz tart növő mátrixméret esetén. A momentum módszer alkalmazásával azt is megkapjuk, hogy $\operatorname{Tr} O_n$ eloszlása is aszimptotikusan normális.

A negyedik fejezet az $n \times n$-es Haar unitér $m \times m$-es csonkításával foglalkozik. A sajátértékek a $\mathcal{D}$ egységkörlapon vannak. A fejezet elején részletesen bebizonyítom, hogy a sajátértékek együttes sűrűségfüggvénye a Życzkowski and Sommers [17] által kiszámolt

$$C_{[n,m]} \prod_{i<j} |\zeta_i - \zeta_j|^2 \prod_{i=1}^{m} (1-|\zeta_i|^2)^{n-m-1}$$

formulával adható meg, ahol a normalizáló konstans kiszámolható komplex vonalintegrál bevezetésével [1]

$$C_{[n,m]}^{-1} = \pi^m m! \prod_{k=0}^{m-1} \binom{n-m+k-1}{k}^{-1} \frac{1}{n-m+k}.$$

A disszertáció fő eredményét a 4.3. Tétel adja, ami nagy eltérés tételt mond ki az $U_{[n,m]}$ mátrix sajátértékeinek tapasztalati eloszlására [2, 3]. Ha $n \to \infty$ esetén $m/n \to \lambda$, ahol $0 < \lambda < 1$, továbbá a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ az $U_{[n,m]}$ mátrix sajátértékei, akkor a

$$\hat{P}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta(\lambda_i),$$

véletlen mértéksorozatra, azaz olyan valószínűségi változó sorozatra, amely értékeit a $\mathcal{D}$ egységkörön értelmezett valószínűségi mérték $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ halmazán veszi fel, teljesül a nagy eltérés elv $1/n^2$ skálán $I : \mathcal{M}(\mathcal{D}) \to [0, \infty]$

$$\begin{aligned} I(\mu) := -\iint_{\mathcal{D}^2} \log|z-w| \, d\mu(z) \, d\mu(w) \\ -(\lambda-1) \int_{\mathcal{D}} \log(1-|z|^2) \, d\mu(z) + B, \end{aligned}$$

exponensfüggvénnyel, ahol

$$B := -\frac{\lambda^2 \log \lambda}{2} + \frac{\lambda^2 \log(\lambda-1)}{2} - \frac{\log(\lambda-1)}{2} + \frac{\lambda-1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy a mértéksorozat P_n eloszlására teljesül

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \log P_n(G) \geq - \inf_{\mu\in G} I(\mu),$$

minden $G \subset \mathcal{M}(\mathcal{D})$ nyílt halmaz esetén, és

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \log P_n(F) \leq - \inf_{\mu\in F} I(\mu),$$

minden $F \subset \mathcal{M}(\mathcal{D})$ zárt halmaz esetén.

A 4.3. Lemma a körlapon értelmezett szimmetrikus súlyfüggvénnyel adott logaritmikus energia egyensúlyi mértékének meghatározásáról szól. Tegyük fel, hogy $Q : \mathcal{D} \to (-\infty, \infty]$ olyan függvény, melyre teljesül, hogy $Q(z) = Q(|z|)$, továbbá tegyük fel, hogy Q differenciálható (alulról korlátos abszolút folytonos deriváltfüggvénnyel) és $rQ'(r)$ monoton növő a $(0, 1)$ intervallumon, és

$$\lim_{r\to 1} rQ'(r) = \infty.$$

Legyen $r_0 \geq 0$ a legkisebb olyan szám, amelyre $Q'(r) > 0$ minden $r > r_0$ esetén, és legyen R_0 a $RQ'(R) = 1$ egyenlet legkisebb megoldása. Nyilván $0 \leq r_0 < R_0 < 1$. Ekkor az

$$I_Q(\mu) := \iint_{\mathcal{D}^2} \log \frac{1}{|z-w|}\, d\mu(z)\, d\mu(w) + 2\int_{\mathcal{D}} Q(z)\, d\mu(z)$$

funkcionál egy $\mu_Q \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$ mértéken veszi fel a minimumát, melynek tartója az

$$S_Q = \{z : r_0 \leq |z| \leq R_0\},$$

körgyűrű, sűrűségfüggvénye pedig

$$d\mu_Q(z) = \frac{1}{2\pi}(rQ'(r))'\,dr\,d\varphi, \qquad z = re^{\mathrm{i}\varphi}.$$

A 4.3. Lemma következménye, hogy a $\{z : |z| \le 1/\sqrt{\lambda}\}$ halmazon a

$$d\mu_0(z) = \frac{(\lambda-1)r}{\pi\,(1-r^2)^2}\,dr\,d\varphi, \quad z = re^{\mathrm{i}\varphi}$$

sűrűségfüggvénnyel adott $\mu_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$ az egyetlen olyan mérték, melyre az I exponensfüggvény minimális, azaz $I(\mu_0) = 0$, és így ez a határertéke a sajátértékek tapasztalati eloszlásának.

A 4.4. Tétel állítása hasonló a 4.3. Tételéhez, de a nagy eltérés tételt a $Q_m U_n Q_m$ mátrixsorozat tapasztalati eloszlására mondja ki, ahol U_n Haar unitér, Q_m pedig $n \times n$-es m rangú determinisztikus projekció, és $n \to \infty$ esetén $m/n \to \lambda$, ahol $0 < \lambda < 1$. A skála megint $1/n^2$, az exponensfüggvény pedig

$$\tilde{I}(\widetilde{\mu}) := \begin{cases} I(\mu), & \text{if} \quad \widetilde{\mu} = (1-\lambda^{-1})\delta(0) + \lambda^{-1}\mu, \\ \\ +\infty, & \text{különben} \end{cases}$$

és a

$$\widetilde{\mu}_0 = (1-\lambda^{-1})\delta(0) + \lambda^{-1}\mu_0$$

mérték minimalizálja a $\tilde{I}$ függvényt, így a $Q_m U_n Q_m$ sajátértékeinek tapasztalati eloszlása a $\widetilde{\mu}_0$ mértékhez tart.

Az ötödik fejezet célja az (Q_m, U_n, U_n^*) sorozat határértékének meghatározása, azaz olyan nemkommutatív valószínűségi változók keresése az $(\mathcal{A}, \varphi)$ nemkommutatív valószínűségi mezőben, amelyeknek véletlen mátrix modellje éppen a fenti sorozat. A határérték (q, u, u^*), ahol q egy projekció, melyre

$$\varphi(q) = \frac{1}{\lambda},$$

u egy Haar unitér elem, továbbá u és q szabad kapcsolatban vannak. Ráadásul azt a $Q_m U_n Q_m$ sorozat sajátértékeinek tapasztalati eloszlása is éppen a quq operátor Brown-mértékéhez tart.

Saját publikációk

[1] D. Petz and J. Réffy. On asymptotics of large Haar distributed unitary matrices. *Period. Math. Hungar.*, 49:103–117, 2004.

[2] D. Petz and J. Réffy. Large deviation for the empirical eigenvalue density of truncated Haar unitary matrices. *Probab. Theory Related Fields*, to appear.

[3] J. Réffy. Asymptotics of large truncated haar unitary matrices. *Quantum Probability and Infinite Dimensional Analysis. From Foundations to Applications*, XVIII:448–456, 2005.

Egyéb hivatkozások

[4] L. Arnold. On the asymptotic distribution of the eigenvalues of random matrices. *J. Math. Anal. Appl.*, 20:262–268, 1967.

[5] G. Ben Arous and A. Guionnet. Large deviations for Wigner's law and Voiculescu's non-commutative entropy. *Probab. Theory Related Fields*, 108:517–542, 1997.

[6] P. Diaconis and M. Shahshahani. On the eigenvalues of random matrices. *J. Appl. Probab.*, 31A:49–62, 1994. Studies in applied probability.

[7] V. L. Girko. Strong elliptic law. *Random Oper. Stochastic Equations*, 5(3):269–306, 1997.

[8] A. Guionnet and O. Zeitouni. Concentration of the spectral measure for large matrices. *Electron. Comm. Probab.*, 5:119–136 (electronic), 2000.

[9] F. Hiai and D. Petz. A large deviation theorem for the empirical eigenvalue distribution of random unitary matrices. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 36:71–85, 2000.

[10] D. Jonsson. Some limit theorems for the eigenvalues of a sample covariance matrix. *J. Multivariate Anal.*, 12(1):1–38, 1982.

[11] M. L. Mehta. *Random matrices.* Academic Press Inc., Boston, MA, second edition, 1991.

[12] F. Oravecz and D. Petz. On the eigenvalue distribution of some symmetric random matrices. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 63:383–395, 1997.

[13] D. Petz and F. Hiai. Logarithmic energy as an entropy functional. In *Advances in differential equations and mathematical physics (Atlanta, GA, 1997)*, volume 217 of *Contemp. Math.*, pages 205–221. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[14] E. P. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *Ann. of Math. (2)*, 62:548–564, 1955.

[15] E. P. Wigner. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. *Ann. of Math. (2)*, 67:325–327, 1958.

[16] J. Wishart. Genaralized product moment distribution in samples. *Biometrika*, 20 A:32–52, 1928.

[17] K. Życzkowski and H.-J. Sommers. Truncations of random unitary matrices. *J. Phys. A*, 33:2045–2057, 2000.