A DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

GRÖBNER BASES IN COMBINATORICS
(Gröbner–bázisok a kombinatorikában)

HEGEDŰS GÁBOR

BUDAPEST
2005

1. Bevezetés

Legyen $\mathbb{F}$ egy test. Ebben a munkában véges $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{F}^n$ ponthalmazokon értelmezett polinomfüggvényeket vizsgálunk. A $\mathcal{V}$–ből $\mathbb{F}$-be képező polinomfüggvények kódolják a $\mathcal{V}$ kombinatorikai és geometriai tulajdonságait. Ahhoz, hogy jobban megérthessük ezeket a függvényeket, bevezetjük a $\mathcal{V}$ ponthalmazhoz tartozó ideált:

$$I(\mathcal{V}) := \{f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] : \; f(v) = 0 \text{ minden } v \in \mathcal{V}\text{-re}\}.$$

Az $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ polinomgyűrű ideáljaihoz fontos speciális generátorrendszerek is tartoznak, amelyeket Gröbner–bázisoknak mondunk. A munkánk egyik alapvető célja az volt, hogy leírjunk bizonyos kombinatorikai jellegű ponthalmazok ideáljaihoz tartozó Gröbner–bázisokat és a hozzá kapcsolódó struktúrákat (elsősorban a standard monomokat és a Hilbert függvényt). Olyan kombinatorikai alkalmazásokat is bemutatunk, amelyek mutatják ennek a megközelítésnek a hatékonyságát.

1.1. Összefoglaló a Gröbner–bázisok elméletéről

A következőkben röviden értelmezzük a Gröbner–bázis és a standard monom fogalmát. Először bevezetünk néhány jelölést. Jelölje $S := \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ az $x_1, \dots, x_n$ változók polinomgyűrűjét az $\mathbb{F}$ test felett. Legyen $\mathrm{Mon}(n, d)$ az összes d fokú $x^u \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ monom halmaza és

$$\mathrm{Mon}(n, \leq d) := \cup_{i=0}^{d} \mathrm{Mon}(n, i)$$

a legfeljebb d fokúaké. Ha $J \subseteq [n]$, akkor legyen $x^J := \prod_{j \in J}(x_j - 1)$, míg $x_J := \prod_{j \in J} x_j$. Speciálisan $x^{\emptyset} = x_{\emptyset} = 1$.

Egy $\prec$ lineáris rendezést az $x_1, \dots, x_m$ változókból felépített monomokon *tagrendezésnek* mondunk, ha 1 a minimális elem a $\prec$-re nézve és ha $u \prec v$, akkor $uw \prec vw$ teljesül minden w monomra. Értelmezünk két fontos tagrendezést: a $\prec_{lex}$ lexikografikus rendezést és a $\prec_{deg}$ deglex rendezést. Legyen $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_m^{i_m}$ és $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_m^{j_m}$ két tetszőleges monom. Ekkor

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_m^{i_m} \prec_{lex} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_m^{j_m}$$

pontosan akkor, ha $i_k < j_k$ teljesül a legkisebb olyan k indexre, amelyre $i_k \neq j_k$.

A deglex rendezést hasonlóan értelmezzük: $u \prec_{deg} v$ pontosan akkor, ha $\deg u < \deg v$, vagy $\deg u = \deg v$ és $u \prec_{lex} v$.

Egy $f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ polinom $\mathrm{lm}(f)$ *főmonomja* egy $\prec$ rögzített tagrendezésre nézve a legnagyobb olyan monom, amelyik megjelenik f-ben nem nulla együtthatóval, ha f-et a kanonikus módon felírjuk monomok $\mathbb{F}$-lineáris kombinációjaként.

Most bevezetjük a Gröbner–bázis fogalmát. Egy $I \neq (0)$ ideál $\text{in}(I)$ *kezdőideálja* az az ideál, amelyet az I-beli polinomok főmonomjai generálnak. Egy $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_t\} \subseteq I$ véges polinomhalmazt az I ideál *Gröbner–bázisának* nevezünk, ha a polinomok $\text{lm}(g_1), \dots, \text{lm}(g_t)$ főmonomjai generálják az $\text{in}(I)$ kezdőideált. Könnyű belátni, hogy tetszőleges Gröbner–bázis az I ideál bázisa is egyúttal.

Az $I \subseteq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ ideál egy $\{g_1, \dots, g_t\}$ Gröbner bázisát *redukáltnak* mondjuk, ha minden $\text{lm}(g_i)$ főmonom együtthatója az g_i polinomban 1, és egyetlen g_i-beli nem nulla monom sem osztható bármely másik $\text{lm}(g_j)$, $j \neq i$ főmonommal. Buchberger egyik tétele ([1, Theorem 1.8.7]) szerint bármely $\prec$ tagrendezésre nézve az $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ polinomgyűrű tetszőleges nem nulla ideáljának egyértelműen létezik redukált Gröbner–bázisa.

Legyen $\prec$ egy fix tagrendezés a monomokon. Egy $w \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ monomot az I ideál *standard monomjának* mondunk, ha $w \notin \text{in}(I)$, azaz w egyetlen $f \in I$ polinomnak sem a főmonomja. Jelöljük $\text{Sm}(\prec, I)$-vel az I ideál standard monomjainak a halmazát a $\prec$ tagrendezésre nézve.

Végül bevezetjük az affin Hilbert függvény fogalmát. Legyen $I := I(\mathcal{V})$ egy $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{F}^n$ véges ponthalmaz ideálja. Ekkor jelölje $h_I(m)$ azoknak a $\mathcal{V}$-ből $\mathbb{F}$-be képező függvények terének az $\mathbb{F}$ test feletti dimenzióját, amelyeket felírhatunk mint egy legfeljebb m fokú polinomot. Ekkor $h_I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az $I = I(\mathcal{V})$ ideál Hilbert függvénye.

A kombinatorikai szakirodalomban ezt a fogalmat a tartalmazási mátrixokkal ragadják meg. Legyen $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G} \subseteq 2^{[n]}$ két tetszőleges halmazrendszer. Ekkor az $I(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *tartalmazási mátrix* egy olyan $|\mathcal{F}| \times |\mathcal{G}|$ méretű $(0,1)$ mátrix, amelynek a sorait $\mathcal{F}$-fel, míg az oszlopait $\mathcal{G}$-vel indexeljük. Az (F, G) párnak megfelelő helyen 1 áll a mátrixban, ha $G \subseteq F$, és 0 egyébként (itt $F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}$).

1.2. Történeti előzmények

A Gröbner–bázisok elméletének érdekes a történeti háttere. A fogalom előképe már Macaulay polinomgyűrűkről szóló munkáiban is megjelent. Először H. Hironaka vezette be a Gröbner–bázisokat a 60-as években. Ő a többváltozós polinomok redukciós algoritmusát a szingularitások feloldásáról szóló alapvető cikkében használta fel. Később B. Buchberger fedezte fel a Gröbner–bázisokat újra, majd leírta őket a doktori értekezésében. Buchberger használta először a Gröbner–bázis elnevezést, a témavezetőjének, W. Gröbnernek a tiszteletére. Buchberger értekezése egyúttal tartalmazza a Buchberger–kritériumot és a nevezetes Buchberger–algoritmust is implicit formában.

A lineáris algebrai módszer az eredményeink másik fő forrása. Ez a módszer sokféle kombinatorikai struktúra méretére ad felső korlátokat. Általánosan fogalmazva, ezen a következőket értjük. Jelöljön $\mathcal{F}$ egy kombinatorikai jellegű véges ponthalmazt az $\mathbb{F}^n$ affin térben. Tegyük fel, hogy minden $v \in \mathcal{F}$ vektorra értelmezhetünk egy $p_v(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ polinomot oly módon, hogy a $\{p_v : v \in \mathcal{F}\}$ polinomok lineárisan függetlenek lesznek az $\mathbb{F}$ felett. Jelöljük $\mathcal{T}$–vel a p_v polinomokban szereplő monomok halmazát. Ekkor a lineáris algebra korlát módszer az $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{T}|$ felső becsléshez vezet.

Ezt az egyszerű módszert kötöttük össze a Gröbner–bázisok redukciójával. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ valamely rögzített $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{F}^n$ véges ponthalmazra. Bizonyos esetekben a $\mathcal{T}$ választható az $\mathrm{Sm}(I(\mathcal{G}), \prec)$ részhalmazának, ahol $\mathcal{G}$ egy jól kezelhető ponthalmaz abban az értelemben, hogy elég sok információnk van a standard monomjairól. Ekkor a korábbiaknál élesebb korlát nyerhető $|\mathcal{F}|$-re. Erre a változatra példa Babai és Frankl egy sejtésére talált megoldásunk.

Az eredményeink előzményei között feltétlenül meg kell említenünk R. Smolensky Boole függvényekről szóló munkáját. A [17] cikkben gyümölcsöző összefüggéseket talált a Boole függvények bonyolultságelmélete és a Gröbner-bázisok elmélete között. Smolensky a következő megközelítéssel élt.

Az $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ n változós Boole függvényt reprezentálhatjuk olyan $g(x_1, \ldots, x_n)$ valós többváltozós polinommal, amelynek a zéróhalmaza ugyanaz, mint az f és az $x_i^2 - x_i$, $i = 1, \ldots, n$ polinomok együttes nullhelyei.

Tekintsük azt a véges ponthalmazt, amelyet a $g = 0$ és az $x_i^2 - x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$ egyenletek értelmeznek. Ekkor megvizsgálhatjuk az ehhez a ponthalmazhoz tartozó ideál affin Hilbert függvényét. Smolensky megmutatta a [17] cikkben, hogy ennek a Hilbert függvénynek az értékei közvetlenül kapcsolódnak bizonyos bonyolultságelméleti alsó korlátokhoz.

Végül legyen $0 \leq d_1 < \ldots < d_t \leq n$ nemnegatív egészek szigorúan monoton növő sorozata. Jelölje

$$\mathcal{F} := \binom{[n]}{d_1} \cup \ldots \cup \binom{[n]}{d_t}$$

a $\{0,1\}^n$ Boole–kocka egy szimmetrikus részhalmazát, azaz az $\binom{[n]}{d_i}$ teljes uniform családok unióját. Nyilván $V(\mathcal{F})$, az $\mathcal{F}$ karakterisztikus vektorainak a halmaza egy megfelelő szimmetrikus Boole–függvény zéróhalmaza. A [3] cikkben Bernasconi és Egidi teljesen meghatározta a szimmetrikus Boole–függvények zéróhalmazaihoz rendelt ideálok Hilbert függvényét $\mathbb{Q}$ felett. Ennek a leírásnak a segítségével elemezték a többségi függvény viselkedését a Boole–kocka szimmetrikus részhalmazain.

2. Az értekezés eredményei

2.1. A teljes ℓ-széles és a teljes d-uniform halmazrendszerek vizsgálata

Először értelmezzük az ℓ-széles családokat.

Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ egy tetszőleges halmazrendszer. Jelölje $v_F \in \{0,1\}^n$ az $F \subseteq [n]$ halmaz karakterisztikus vektorát. Ekkor

$$V(\mathcal{F}) := \{v_F : F \in \mathcal{F}\} \subseteq \{0,1\}^n \subseteq \mathbb{F}^n$$

az $\mathcal{F}$ halmazrendszer karakterisztikus vektorainak a halmaza.

Jelölje

$$\mathcal{F}^{k,\ell} = \{F \subseteq [n] : k - \ell < |F| \leq k\}$$

a *teljes ℓ-széles* családot. Egy $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszert *ℓ-szélesnek* mondunk, ha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{k,\ell}$ egy megfelelő k-ra.

A disszertáció 3. és 4. fejezetében leírjuk a teljes d-uniform és a teljes ℓ-széles családok karakterisztikus vektoraihoz tartozó ideál redukált Gröbner–bázisát és a kezdőideálok minimális generátorrendszerét. Ezt az eredményt az $\mathcal{F}^{k,\ell}$ családhoz kapcsolódó tartalmazási mátrixok rangjának meghatározására alkalmazzuk. Bebizonyítjuk egyúttal Frankl egyik sejtésének a speciális esetét is, amely azon maximális halmazrendszer méretére kérdez rá, amelyhez nem létezik t elemű szétzúzott halmaz, és amely nem tartalmaz $\ell + 1$ elemű láncot.

A most következő definíciókban bevezetjük a teljes ℓ-széles családokhoz tartozó ideál redukált Gröbner–bázisaiban szereplő polinomokat.

Legyenek ℓ és t pozitív egészek. Jelölje $\mathcal{H}(t,\ell)$ az $[n]$ azon $H = \{s_1 < \ldots < s_t\}$ részhalmazainak a halmazát, amelyekre t a legkisebb olyan j index, amelyre $s_j < 2j - \ell + 1$ teljesül. Az $\ell = 1$ speciális esetben legyen $\mathcal{H}(t) := \mathcal{H}(t,1)$, ha $t \geq 1$.

Megjegyezzük, hogy a $\mathcal{H}(t,\ell) = \emptyset$ ha $t < \ell$. A $\mathcal{H}(t,\ell)$ elemei az $[n]$ t elemű részhalmazai és $H \in \mathcal{H}(t,\ell)$ pontosan akkor, ha

$$s_1 \geq 3 - \ell, s_2 \geq 5 - \ell, \ldots, s_{t-1} \geq 2t - \ell - 1$$

és $s_t < 2t - \ell + 1$ teljesül. Ezek szerint $s_t = 2t - \ell$ (a $t = 1$ csak az $\ell = 1$ esetben jön szóba). Ha $t > 1$, ekkor $s_{t-1} = 2t - \ell - 1$ is igaz lesz.

Legyen $J \subseteq [n]$ egy tetszőleges részhalmaz és $0 \leq i \leq |J|$ egy nemnegatív egész. Ekkor $\sigma_{J,i}$-vel jelöljük az x_j, $j \in J$ változók i. elemi szimmetrikus polinomját:

$$\sigma_{J,i} := \sum_{T \subseteq J, |T| = i} x_T \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n].$$

Most legyen $0 < \ell \leq t < (n+\ell)/2$, $0 \leq k \leq n$ és $H \in \mathcal{H}(t,\ell)$. Vezessük be a $H' = H \cup \{2t-\ell+1, 2t-\ell+2, \ldots, n\}$ jelölést.

Értelmezzük az $f_{H,k}$ polinomot a következő képlettel:

$$f_{H,k} = f_{H,k}(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{j=0}^{t} (-1)^{t-j} \binom{k-j}{t-j} \sigma_{H',j}.$$

Megjegyezzük, hogy az $f_{H,k}$ a H-n keresztül a t-től és az ℓ-től is függ. Továbbá a H egyértelműen meghatározza t-t és az ℓ-et.

Legyenek $0 \leq \ell - 1 \leq k \leq n$ tetszőleges egészek. Ekkor értelmezzük a $D(k,\ell)$ halmazt a következőképp:

$$D(k,\ell) := \{\{g_1 < \ldots < g_t\} \subseteq [n] : \ t \leq k \text{ és } g_j \geq 2j - \ell + 1 \text{ ha } 1 \leq j \leq t\}.$$

R. P. Anstee és Sali Attila után (lásd [2]) azt mondjuk, hogy egy

$$S = \{s_1 < s_2 < \ldots < s_d\} \subseteq [n]$$

halmazt rendezés-szétzúz egy $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer, ha a következők teljesülnek: az $S = \emptyset$ esetben az $\mathcal{F}$ család nem üres, míg ha $|S| > 0$, akkor találunk 2^d olyan $\mathcal{F}$-beli halmazt, amelyet két részcsaládba, $\mathcal{F}_0$-ba és $\mathcal{F}_1$-be oszthatunk úgy, hogy $s_d \notin F$ minden $F \in \mathcal{F}_0$-ra, míg $s_d \in F$ minden $F \in \mathcal{F}_1$-re, és mindkét részcsalád, $\mathcal{F}_0$ és $\mathcal{F}_1$ is rendezés-szétzúzza az $S \setminus \{s_d\}$ halmazt, továbbá $T \cap F_0 = T \cap F_1$ teljesül a $T = \{s_d+1, s_d+2, \ldots, n\}$-re és minden $F_0 \in \mathcal{F}_0, F_1 \in \mathcal{F}_1$-re. Legyen

$$\mathrm{osh}\,(\mathcal{F}) := \{S \subseteq [n] : \mathcal{F} \text{ rendezés–szétzúzza } \ S\text{-t}\}.$$

A [2] cikkben R. P. Anstee, Rónyai L. és Sali A. ballot sorozatok segítségével megkapta az $\binom{[n]}{d}$ teljes uniform család rendezés-szétzúzott halmazait, ahol $d \leq n/2$:

$$\mathrm{osh}\left(\binom{[n]}{d}\right) = \{\{s_1 < \ldots < s_j\} \subset [n] : \ j \leq d \text{ és } s_i \geq 2i \text{ minden } 1 \leq i \leq j\text{-re}\}. \tag{1}$$

Nyilvánvaló a definícióból, hogy tetszőleges nem üres $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ családra $\mathrm{osh}(\mathcal{F}) = \mathrm{osh}(\mathrm{co}(\mathcal{F}))$, ahol $\mathrm{co}(\mathcal{F}) = \{[n] \setminus F : \ F \in \mathcal{F}\}$. Speciálisan $\mathrm{osh}\binom{[n]}{d} = \mathrm{osh}\binom{[n]}{n-d}$.

A következő Tétel a teljes uniform család rendezés-szétzúzásának a leírását általánosítja teljes ℓ-széles családokra.

2.1. Tétel *(Thm. 4.6 az értekezésben) Legyen* $0 \leq k < (n+\ell)/2$. *Ekkor*

$$\mathrm{osh}(\mathcal{F}^{k,\ell}) = D(k,\ell).$$

(b) Ha $k \geq (n+\ell)/2$, *ekkor*

$$\mathrm{osh}(\mathcal{F}^{k,\ell}) = D(n-k+\ell-1,\ell).$$

Tekintsük az $[n]$ részhalmazainak egy tetszőleges $\mathcal{F}$ családját. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ szétzúzza S-t, ha

$$\{E \cap S:\ E \in \mathcal{F}\} = 2^S. \tag{2}$$

Ekkor definiáljuk az $\mathcal{F}$ halmazrendszer szétzúzottját, $\mathrm{sh}(\mathcal{F})$-t mint

$$\mathrm{sh}(\mathcal{F}) := \{S \subseteq [n]:\ \mathcal{F} \text{ szétzúzza } S\text{-t}\}. \tag{3}$$

Emlékeztetünk arra, hogy egy p méretű lánc $2^{[n]}$-ben $[n]$ részhalmazainak egy tetszőleges olyan $A_1, \ldots, A_p$ sorozata, amelyre $A_1 \subset \ldots \subset A_p$.

Jelölje $g(n,t,d)$ azon $2^{[n]}$-beli halmazrendszerek maximális elemszámát, amelyek nem zúznak szét t elemű halmazt, és nem tartalmaznak egyúttal $d+1$ elemű láncot sem. Frankl P. [6]-ben a következőt sejtette:

2.2. Sejtés *Tegyük fel, hogy* $2t \leq n+d$. *Ekkor*

$$g(n,t,d) \leq \sum_{i=\max(0,t-d)}^{t-1} \binom{n}{i}. \tag{4}$$

A következő Tétel ennek a sejtésnek a speciális esete.

2.3. Tétel *(Thm. 4.1 az értekezésben) Tegyük fel, hogy* $2t \leq n+\ell$ *és legyen* $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ *egy tetszőleges olyan* ℓ*–széles család, amely nem zúz szét* t *elemű halmazt. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=\max(0,t-\ell)}^{t-1} \binom{n}{i}.$$

Jelölje $I(k,\ell) := I(V(\mathcal{F}^{k,\ell}))$ az $\mathcal{F}^{k,\ell}$ teljes ℓ-széles család karakterisztikus vektorainak az ideálját. Az $\ell = 1$ speciális esetben $I(d) := I(d,1)$ jelöli a teljes d-uniform családhoz tartozó ideált.

A következő két tételben leírjuk az $I(k,\ell)$ ideálok redukált Gröbner bázisait és az $\mathrm{in}(I(k,\ell))$ kezdőideál minimális generátorrendszerét.

Legyen $0 < \ell \leq k+1$. Jelöljük $\mathcal{B}(k,\ell)$-lel az $[n]$ azon U részhalmazainak a rendszerét, amelyre $U = \{u_1 < \ldots < u_{k+1}\}$ és $u_j \geq 2j - \ell + 1$ fennáll minden $j = 1,\ldots,k$-ra. Az $\ell = 1$ speciális esetben legyen $\mathcal{B}(d) := \mathcal{B}(d,1)$.

2.4. Tétel *(Corollary 3.4 és Corollary 3.5 az értekezésben) Legyenek d és n olyan egészek, amelyekre $n > 0$ és $0 \le d \le n/2$ teljesül. Legyen $\mathbb{F}$ egy tetszőleges test és $\prec$ egy tetszőleges tagrendezés az $S = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ polinomgyűrű monomjain, amelyre $x_n \prec \dots \prec x_1$. Ekkor az alábbi monomhalmaz*

$$\cup_{t=1}^{d}\{x_H : \ H \in \mathcal{H}(t)\} \cup \{x_U : \ U \in \mathcal{B}(d)\} \cup \{x_i^2 : \ i = 2, \dots, n\}$$

az $in(I(d)) = in(I(n-d))$ kezdőideál egy minimális generátorrendszere. A polinomok alábbi $\mathcal{G}$ halmaza az $I(d)$ ideál redukált Gröbner–bázisa:

$$\{x_2^2 - x_2, \dots, x_n^2 - x_n\} \cup \{x_J : \ J \in \mathcal{B}(d)\} \cup$$

$$\{f_{H,d} : \ H \in \mathcal{H}(t) \text{ valamely } 0 < t \le d\text{-re}\}.$$

Hasonlóan, a következő $\mathcal{G}^*$ halmaz az $I(n-d)$ ideál redukált Gröbner–bázisa:

$$\{x_2^2 - x_2, \dots, x_n^2 - x_n\} \cup \{x^J : \ J \in \mathcal{B}(d)\} \cup$$

$$\{f_{H,n-d} : \ H \in \mathcal{H}(t) \text{ valamely } 0 < t \le d\text{-re}\}.$$

2.5. Tétel *(Corollary 4.3 és Corollary 4.4 az értekezésben) Legyen $n > 0$, k és ℓ olyan egészek, amelyekre $0 < \ell - 1 \le k \le n$ teljesül. Legyen $\mathbb{F}$ egy tetszőleges test és $\prec$ egy tetszőleges olyan tagrendezés az $S = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ polinomgyűrű monomjain, amelyre $x_n \prec \dots \prec x_1$. Ha $k < (n+\ell)/2$, ekkor*

$$\{x_i^2 : \ i = 1, \dots, n\} \cup \{x_U : \ U \in \mathcal{B}(k,\ell)\} \cup$$

$$\{x_H : \ H \in \mathcal{H}(t,\ell) \text{ valamely } \ \ell \le t \le k\text{-re}\}$$

az $in(I(k,\ell))$ kezdőideál egy minimális generátorrendszere és az alábbi $\mathcal{G}$ polinomhalmaz az $I(k,\ell)$ ideál redukált Gröbner–bázisa a $\prec$ tagrendezésre nézve:

$$\{x_1^2 - x_1, \dots, x_n^2 - x_n\} \cup \{x_J : \ J \in \mathcal{B}(k,\ell)\} \cup$$

$$\{f_{H,k} : \ H \in \mathcal{H}(t,\ell) \text{ valamely } \ell \le t \le k\text{-re}\}.$$

A $k \ge (n+\ell)/2$ esetben

$$\{x_i^2 : \ i = 1, \dots, n\} \cup \{x_U : \ U \in \mathcal{B}(n-k+\ell-1,\ell)\} \cup$$

$$\{x_H : \ H \in \mathcal{H}(t,\ell) \text{ valamely } \ \ell \le t \le n-k+\ell-1\text{-re}\}$$

adja az $in(I(k,\ell))$ kezdőideál egy minimális generátorrendszerét és a következő halmaz az $I(k,\ell)$ ideál redukált Gröbner–bázisa a $\prec$ tagrendezésre nézve:

$$\{x_1^2 - x_1, \dots, x_n^2 - x_n\} \cup \{x^J : \ J \in \mathcal{B}(n-k+\ell-1,\ell)\} \cup$$

$$\{f_{H,k} : \ H \in \mathcal{H}(t,\ell) \text{ valamely } \ell \le t \le n-k+\ell-1\text{-re}\}.$$

Az eredményeink egyszerű alkalmazásaként Frankl P. következő becslésének egy új bizonyítását nyerjük:

Legyen p egy tetszőleges prím és k egy tetszőleges egész. Jelölje $\mathcal{F}(k,p)$ a következő halmazrendszert:

$$\mathcal{F}(k,p) = \{K \subseteq [n] : \ |K| \equiv k \pmod{p}\}.$$

2.6. Tétel *(Corollary 3.10 az értekezésben) Ha $0 \leq \ell \leq p-1$ és $2\ell \leq n$, akkor*

$$rank_{\mathbb{F}_p}\ I(\mathcal{F}(k,p), \binom{[n]}{\leq \ell})) \leq \binom{n}{\ell}.$$

2.2. Babai és Frankl egy sejtése

Legyen p egy tetszőleges prím és k tetszőleges egész. Legyen $q = p^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$ a p egy tetszőleges hatványa. Jelölje $\mathcal{F}(k,q)$ a következő halmazrendszert:

$$\mathcal{F}(k,q) = \{K \subseteq [n] : \ |K| \equiv k \pmod{q}\}.$$

A 2.7. Tétel Babai L. és Frankl P. egyik sejtése volt. Az értekezés 5. fejezetében az $I(V(\mathcal{F}(k,q)))$ ideál Gröbner–bázisaival való redukciós érveléssel bizonyítjuk be ezt a sejtést.

2.7. Tétel *(Thm. 5.7 az értekezésben) Legyen k egy tetszőleges egész és $q = p^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$, egy tetszőleges prímhatvány. Tegyük fel, hogy $2(q-1) \leq n$. Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ az $[n]$ részhalmazainak egy olyan rendszere, amelyre teljesül a következő két feltétel:*

$$(a)\ |A_i| \equiv k \ (mod\ q)\ ha\ i = 1, \dots, m$$

és

$$(b)\ |A_i \cap A_j| \not\equiv k\ (mod\ q)\ ha\ 1 \leq i,j \leq m,\ i \neq j.$$

Ekkor

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{q-1}.$$

A következő eredmény Frankl P. egyik jól ismert rangbecslésének (2.6. Tétel) az általánosítása prímhatványokra.

2.8. Tétel *(Thm. 5.9 az értekezésben) Legyen p egy tetszőleges prím és k egy tetszőleges egész. Legyen $q = p^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$. Ha $\ell \leq q-1$ és $2\ell \leq n$, ekkor*

$$rank_{\mathbb{F}_p}\ I(\mathcal{F}(k,q), \binom{[n]}{\leq \ell})) \leq \binom{n}{\ell}.$$

Ezt a Tételt az $I(V(\mathcal{F}(k,q)))$ ideál deglex standard monomjainak a vizsgálatával bizonyítottuk be.

2.3. A permutációk Gröbner–bázisa és standard monomjai

A 6. fejezetben a permutációk redukált Gröbner–bázisát és standard monomjait adjuk meg tetszőleges $\prec$ tagrendezésre nézve.

Jelölje S_n an $[n]$-en ható szimmetrikus csoportot. Legyen $\mathbb{F}$ egy rögzített, de egyébként tetszőleges test. Válasszunk n különböző elemet az $\mathbb{F}$ testből, legyenek ezek $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Ekkor jelölje

$$V_{(1^n)} := V_{(1^n)}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \{(\alpha_{\pi(1)}, \dots, \alpha_{\pi(n)}) : \ \pi \in S_n\}$$

az α_i elemek összes permutációinak a halmazát, amelyet mint $\mathbb{F}^n$ egy részhalmazát tekintjük.

Legyen i egy tetszőleges nemnegatív egész és jelölje

$$h_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_n=i \\ a_1\geq 0,\dots,a_n\geq 0}} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$$

az i. teljes szimmetrikus polinomot. Ha $0 \leq i \leq n$, ekkor σ_i-vel jelöljük az i. elemi szimmetrikus polinomot:

$$\sigma_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{S\subset[n],\ |S|=i} x_S.$$

Az $1 \leq k \leq n$ egészekre értelmezzük az $f_k \in S$ polinomokat a következőképpen:

$$f_k := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i h_{k-i}(x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)\sigma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Megjegyezzük, hogy $f_k \in \mathbb{F}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_n]$. Továbbá deg $f_k = k$ és az f_k főmonomja x_k^k minden olyan $\prec$ tagrendezésre, amelyre $x_n \prec x_{n-1} \prec \dots \prec x_1$.

2.9. Tétel *(Thm. 6.2 az értekezésben) Legyen $\mathbb{F}$ egy tetszőleges test és $\prec$ egy tetszőleges olyan tagrendezés az $S = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ polinomgyűrű monomjain, amelyre $x_n \prec \dots \prec x_1$. Ekkor az $I(V_{(1^n)})$ ideál redukált Gröbner–bázisa*

$$\{f_i : \ 1 \leq i \leq n\}.$$

Továbbá a standard monomok halmaza:

$$\mathrm{Sm}(\prec, I(V_{(1^n)})) = \{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} : \ 0 \leq \alpha_i \leq i-1 \text{ minden } 1 \leq i \leq n\text{-re}\}. \quad (5)$$

Ennek a Tételnek egyik egyszerű alkalmazása a szimmetrikus polinomok alaptételének a következő általánosítása, amelyet Garsia adott meg először a [8] dolgozatban.

2.10. Tétel *Minden $f \in \mathbb{F}[y_1, \ldots, y_n]$ polinomot egyértelműen felírhatunk a következő alakban:*

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{w \in \mathcal{N}} \sum_{p \geq 0} a_{w,p} w \sigma_1^{p_1} \sigma_2^{p_2} \cdots \sigma_n^{p_n},$$

ahol $a_{w,p} \in \mathbb{F}$ és $\mathcal{N} = \{y_1^{\alpha_1} \ldots y_n^{\alpha_n} : \ 0 \leq \alpha_i \leq i-1 \text{ minden } 1 \leq i \leq n\text{-re}\}$ az Artin–monomok halmaza.

2.4. A partíciók standard monomjai

A 7. fejezetben kombinatorikai leírást adunk az $I(V_\lambda)$ ideál lexikografikus standard monomjaira, valamint a Hilbert függvényére (lásd V_λ definícióját lent). Alkalmazásként megadjuk az S^λ Specht modulus (James skalárszorzatra vonatkozó) $(S^\lambda)^\perp$ ortogonális kiegészítőjének egy bázisát.

Először megadunk néhány definíciót a témakörben.

Természetes számoknak egy $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ sorozatát az n egy partíciójának nevezünk, ha $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$ és $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k > 0$. Ha λ az n egy partíciója, akkor ezt $\lambda \vdash n$ jelöli.

Legyen $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ az n egy rögzített partíciója. A λ Ferrers diagramja egy n négyzetet tartalmazó mátrix, aminek k balra igazított sora van, és minden sora λ_i négyzetet tartalmaz, ahol $1 \leq i \leq k$. Egy t λ-tablót úgy kapunk a λ-hoz tartozó Ferrers diagramból, hogy tetszőleges módon kitöltjük ezt a diagramot $1, 2, \ldots, n$-nel bijektíven.

Például, ha $n = 7$, $\lambda = (4, 2, 1)$, ekkor

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 3 & 6 \\ \hline 4 & 1 \\ \cline{1-2} 7 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \text{és} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 7 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1} \end{array} \tag{6}$$

kettő a 7! λ–tabló közül.

Azt mondjuk, hogy t egy standard λ-tabló, ha minden sorában és oszlopában a számok szigorúan monoton nőnek.

Legyen $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ az $\mathbb{F}$ test k különböző eleme és $\lambda \vdash n$ egy tetszőleges partíció. Jelöljük V_λ-val az összes olyan $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$ vektor halmazát, amelyre

$$|\{j \in [n] : \ v_j = \alpha_i\}| = \lambda_{i+1}$$

teljesül minden $0 \leq i \leq k-1$-re.

A V_λ véges ponthalmaz standard monomjainak a leírásához először egy $\leq$ részbenrendezést definiálunk $\mathbb{N}^n$-en: ha $u = (u_1, \ldots, u_n)$ és $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ tetszőleges két vektor, akkor $u \leq v$ pontosan akkor teljesül, ha $u_i \leq v_i$ minden $1 \leq i \leq n$-re.

Egy $W \subseteq \mathbb{N}^n$ részhalmaz *lefelé zárt burkát* a következőképp értelmezzük:

$$W^{\leq} := \{w \in \mathbb{N}^n : \text{ létezik egy olyan } v \in W, \text{ amelyre } w \leq v\}.$$

Egy *ballot sorozat*, vagy *rácsszó* nemnegatív egészeknek egy olyan $m = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ vektora, amelynek bármely $m_k = (i_1, \dots, i_k)$ kezdőszeletére és bármely l nemnegatív egészre, az m_k-ban legalább annyi l szerepel, mint $l+1$.

Jól ismert (lásd [16]), hogy a rácsszavak bijekcióban állnak a standard tablókkal. Ha adott egy t standard tabló, amelyet kitöltöttünk n elemmel, akkor képezzük az $m_k = (i_1, \dots, i_k)$ sorozatot, ahol $i_k = i-1$ pontosan akkor, ha k-t a t tabló i. sorába írtuk be. Ezen a módon t-hez hozzárendeltük az m rácsszót. Az inverz leképezést is könnyű megkonstruálni.

Azt mondjuk, hogy egy rácsszó λ típusú, ha a rácsszónak megfelelő t tabló egy standard λ-tabló. Ekkor $\lambda \vdash n$-re értelmezzük $\mathrm{st}(\lambda)$-t:

$$\mathrm{st}(\lambda) := \{u \in \mathbb{N}^n : u \text{ egy } \lambda \text{ típusú rácsszó}\}.$$

Jelölje $b_\lambda := \mathrm{st}(\lambda)^{\leq}$-t és legyen $B_\lambda = \{x^u : u \in b_\lambda\}$. Nyilván $b_\lambda \subseteq \mathbb{N}^n$ lefelé zárt részhalmaz.

A következő Tételt már ismertük a $\lambda = (n-d, d)$ és a $\lambda = (1^n)$ speciális esetekben. Az előbbi esetben $d \leq n/2$ biztosan teljesül és egyszerűen be lehet bizonyítani, hogy B_λ azokból az $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_j}$ négyzetmentes monomokból áll, ahol $j \leq d$, $i_1 < i_2 < \dots < i_j$ és $i_\ell \geq 2\ell$ minden $1 \leq \ell \leq j$-re.

A [2] cikkben R. P. Anstee, Rónyai L. és Sali A. belátta, hogy

$$\mathrm{Sm}(\prec_{lex}, I(V_\lambda)) = B_\lambda.$$

A [11] cikkünkben ezt az eredményt általánosítottuk tetszőleges olyan $\prec$ tagrendezésre, amelyre $x_n \prec \dots \prec x_1$.

Legyen $\prec$ egy tetszőleges ilyen tagrendezés, és legyen $\lambda = (1^n)$. Ebben az esetben [10] 2.2 Tételében beláttuk, hogy

$$\mathrm{Sm}(\prec, I(V_\lambda)) = \{x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} : 0 \leq \beta_i \leq i-1 \text{ minden } 1 \leq i \leq n\text{-re}\}. \quad (7)$$

Nyilván $g = (0, 1, \dots, n-1)$ az egyetlen $\lambda = (1^n)$ típusú rácsszó, tehát $\mathrm{st}(\lambda) = \{g\}$ teljesül. Ekkor (7) szerint $\mathrm{Sm}(\prec, I(V_\lambda)) = B_\lambda$ most is igaz.

Az értekezés 7. fejezetének a fő eredménye a következő:

2.11. Tétel *(Thm. 7.8, Thm. 7.12 és Corollary 7.13 az értekezésben) Legyen $\mathbb{F}$ egy tetszőleges test és λ az n egy tetszőleges partíciója. Ekkor*

$$\mathrm{Sm}(\prec_{lex}, I(V_\lambda)) = B_\lambda.$$

Továbbá

$$h_{I(V_\lambda)}(m) = |B_\lambda \cap \mathrm{Mon}(n, \leq m)|,$$

ha $m \geq 0$.

A. M. Garsia és C. Procesi a q-Kostka polinomokat vizsgálva bebizonyították, hogy az $\mathrm{Sm}(\prec_{deg}, V_\lambda) = B_\lambda$ egyenlőség is fennáll minden λ partícióra (Proposition 3.2 [9]-ben). Ők a racionális számtest felett dolgoztak, de a bizonyítások érvényben maradnak tetszőleges test felett. Egyúttal a gr $S/I(V_\lambda)$ asszociált fokszámozott gyűrűt is leírták.

A 2.11. Tételből egy új, talán egyszerűbb bizonyítást kaphatunk Garsiának és Procesinek a V_λ deglex standard monomjairól szóló eredményére. Ezáltal elkerülhetjük a Tanisaki–ideálok használatát (lásd (1.5) [9]-ben). A 2.11. Tételt úgy is tekinthetjük, mint Garsia és Procesi eredményének a kiterjesztését a lexikografikus esetre.

Hivatkozások

[1] W. W. Adams, P. Loustaunau, *An Introduction to Gröbner Bases,* American Mathematical Society, 1994.

[2] R.P. Anstee, L. Rónyai, A. Sali, Shattering news, *Graphs and Combinatorics* **18** (2002), 59–73.

[3] A. Bernasconi, L. Egidi, Hilbert function and complexity lower bounds for symmetric Boolean functions, *Information and Computation* **153**(1999), 1–25.

[4] L. Babai, P. Frankl, *Linear algebra methods in combinatorics,* September 1992.

[5] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.

[6] P. Frankl, Intersection theorems and mod p rank of inclusion matrices, *J. Combin. Theory A* **54** (1990), 85–94.

[7] K. Friedl, L. Rónyai, Order-shattering and Wilson's theorem, *Discrete Mathematics,* **270** (2003), 127–136..

[8] A. M. Garsia, Pebbles and expansions in the polynomial ring, *Polynomial identities and combinatorial methods (Pantelleria 2001)*, 261–285, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 235, Dekker, New York, 2003.

[9] A. M. Garsia, C. Procesi, On certain graded S_n-modules and the q-Kostka polynomials, *Advances in Mathematics,* **94** (1992), 82–138

[10] G. Hegedűs, A. Nagy, L. Rónyai, Gröbner bases for permutations and oriented trees, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sect. Comp. 23 (2004), 137–148.

[11] G. Hegedűs, L. Rónyai, Gröbner bases for complete uniform families, *J. of Algebraic Combinatorics* **17** (2003), 171–180.

[12] G. Hegedűs, L. Rónyai, Standard monomials for q-uniform families and a conjecture of Babai and Frankl, *Central European Journal of Mathematics* **1** (2003), 198 - 207.

[13] G. Hegedűs, L. Rónyai, Gröbner bases for complete ℓ-wide families, manuscript

[14] G. Hegedűs, L. Rónyai, Standard monomials for partitions, submitted to the Acta Math. Hung.

[15] G. D. James, *The Representation Theory of the Symmetric Groups,* Springer Lecture Notes in Mathematics 682, Springer-Verlag, 1978.

[16] B. E. Sagan, *The symmetric group, representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions,* GTM 203, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2001.

[17] R. Smolensky, On representations by low-degree polynomials, *Proc. of the 34th IEEE Symposium on the Foundations of Computer Science,* 1993, pp. 130–138.