Gráfok entrópiái, kapacitásai és színezései

Habilitációs tézisek

Simonyi Gábor
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
H-1364 Budapest, Pf. 127.
simonyi@renyi.hu

Bevezetés

Az egyik legfontosabb és legtöbbet vizsgált gráfelméleti paraméter a kromatikus szám, azon színek minimális száma, melyekkel a gráf csúcsai kiszínezhetők úgy, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.

A G gráf $\chi(G)$ kromatikus számának egyik legtermészetesebb alsó becslése a gráf $\omega(G)$ klikkszáma, a csúcshalmaz legnagyobb olyan részhalmazának elemszáma, amelyben minden csúcspár össze van kötve. Ez a becslés sokszor nagyon gyenge, egy háromszögmentes gráf kromatikus száma is lehet tetszőlegesen nagy, ezt bizonyítja pl. Mycielski [64] konstrukciója.

Az információelmélet ún. zéró-hiba tételekre vezető vizsgálataiban fontos szerepet játszik gráfok konormálisnak nevezett szorzata, illetve hatványa. E művelet során a klikkszám és a kromatikus szám ellentétesen viselkedik: előbbi szupermultiplikatív, utóbbi szubmultiplikatív erre a szorzásra nézve, melynek definíciója a következő.

Definíció. *Az F és G gráfok* konormális szorzata *az az $F \cdot G$ gráf, melyre*

$$\begin{aligned} V(F \cdot G) &= V(F) \times V(G) \\ E(F \cdot G) &= \{\{(f,g),(f',g')\} : \{f,f'\} \in E(F) \text{ vagy } \{g,g'\} \in E(G)\}. \end{aligned}$$

G^t a G gráf önmagával vett t-szeres konormális szorzata, amit G t-edik konormális hatványának hívunk.

A most definiált hatványozásra úgy érdemes gondolni, hogy amennyiben G élei a csúcsok valamiféle megkülönböztethetőségét jelentik, akkor a konormális hatványozás ezt a relációt terjeszti ki a csúcsok t hosszú sorozataira: két ilyen sorozat pontosan akkor megkülönböztethető, ha legalább egy koordinátában az.

Nem nehéz belátni, hogy, mint fent említettük, tetszőleges F és G gráfra fennáll az

$$\omega(F \cdot G) \geq \omega(F)\omega(G) \quad \text{valamint a} \quad \chi(F \cdot G) \leq \chi(F)\chi(G)$$

egyenlőtlenség.

A fentiből következik, hogy a

$$\chi^*(G) := \lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{\chi(G^t)}$$

és a

$$c(G) := \lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{\omega(G^t)}$$

határértékek egyaránt léteznek, és rájuk $\omega(G) \leq c(G) \leq \chi^*(G) \leq \chi(G)$ teljesül.

Az elsőként felírt $\chi^*(G)$ határérték jól ismert mennyiség. A kromatikus szám felírható egy egészértékű programozási feladat megoldásaként. Ennek valós relaxációját megoldva jutunk a frakcionális kromatikus szám fogalmához, mely McEliece és Posner [62] egy tételéből adódóan (ld. Berge és Simonovits [11] dolgozatát is) megegyezik a fenti $\chi^*(G)$ határértékkel.

A klikkszám is felírható egészértékű programozási feladat megoldásaként, ennek valós relaxációja a frakcionális klikkszám fogalmához vezet, amelynek értéke a lineáris programozás dualitástétele révén mindig azonos a frakcionális kromatikus szám, tehát $\chi^*(G)$ értékével. Várható volna mindezek alapján, hogy $c(G)$ is ezzel a közös értékkel legyen egyenlő. Ez azonban nincs így.

A $c(G)$ mennyiség, pontosabban annak logaritmusa, Shannon [74] információelméleti vizsgálataiban bukkant fel először.

Definíció. (Shannon [74]) *Egy G gráf (logaritmikus) Shannon kapacitása*[1] *a*

$$C(G) = \lim \frac{1}{t} \log_2 \omega(G^t)$$

mennyiség.

A logaritmálás oka az információelméleti háttér, a fenti mennyiség ugyanis egy zajos csatorna bitekben mért ún. zéró-hiba kapacitását fejezi ki. Innen adódik az is, hogy a logaritmus alapja 2. A továbbiakban is minden logaritmus kettes alapú lesz, ezentúl ezt nem írjuk ki.

A Shannon kapacitás a modern kombinatorika egyik különösen érdekes fogalma. Vizsgálatát számos váratlan kapcsolat, valamint némely vele kapcsolatos probléma meglepő nehézsége egyaránt indokolja. Az a talán ártatlannak látszó kérdés például, hogy egy háromszögmentes gráfra a $C(G)$ érték lehet-e tetszőlegesen nagy, ekvivalens Erdősnek egy máig megoldatlan problémájával, mely azt kérdezi, hogy az $R(3:t) := R(3,3,\ldots,3)$ Ramsey szám (az a legkisebb r szám, amire a K_r teljes gráf éleit t színnel színezve biztosan keletkezik egyszínű háromszög) gyorsabban nő-e, mint bármilyen rögzített c konstans t-edik hatványa (ld. Erdős, McEliece és Taylor [27], Alon és Orlitsky [3], valamint Rosenfeld és Nešetřil [66] cikkeit).

Shannon [74] meghatározta minden legfeljebb 4 csúcsú gráf Shannon kapacitását és az 5 csúcsúakét is egy kivétellel. Az 5 hosszúságú C_5 kör Shannon kapacitásáról csak több mint húsz évvel később bizonyította be Lovász [56], hogy a Shannon által megadott alsó korláttal, $\log\sqrt{5}$-tel egyenlő. A Shannon kapacitás probléma nehézségét a fentieken túl az is jól mutatja, hogy az ötnél hosszabb páratlan körökre mindmáig ismeretlen a $C(G)$ érték, és még azt is csak egy 2003-ban megjelent cikkben igazolta Bohman és Holzman [14], hogy $C(C_{2k+1}) > \log 2$ minden k-ra, azaz minden háromnál hosszabb páratlan kör Shannon kapacitása meghaladja a klikkszámából adódó egyszerű alsó korlátot.

A Shannon kapacitás vizsgálata által inspirálva vezette be Berge [7, 8, 9] a perfekt gráfokat (ld. Berge és Ramírez-Alfonsín [10]).

Definíció. (Berge [8]) *Egy G gráf* perfekt*, ha minden G' feszített részgráfjára $\chi(G') = \omega(G')$ teljesül.*

A perfekt gráfok rendkívül fontos és sokat vizsgált gráfosztályt alkotnak. Ennek legfőbb oka az, hogy kapcsolatot teremtenek olyan látszólag távolabbi területek között,

[1] Megjegyezzük, hogy számos tárgyalás a $C(\bar{G})$ mennyiséget nevezi a G gráf Shannon kapacitásának, ahol $\bar{G}$ a G gráf komplementere. Maga Shannon is ezt a nyelvezetet használja, mi azért nem ezt követjük, mert az irányított gráfok kapacitásainak tárgyalása így természetesebb lesz.

mint a gráfelmélet, a poliéderes kombinatorika és az információelmélet. Számos ilyen kapcsolatot részletesen tárgyal a Ramírez-Alfonsín és Reed által szerkesztett [69] könyv, valamint Schrijver [73] monumentális monográfiájának három perfekt gráfokról szóló fejezete. Igen sok érdekes gráf perfekt. Ilyenek például a páros gráfok és élgráfjaik, az intervallumgráfok, vagy a részben rendezett halmazokhoz rendelhető ún. összehasonlítási gráfok.

A perfekt gráfok számos szép struktúrális tulajdonsága önmagában figyelemre méltó. Kiemelkednek ezek közül a Berge [7, 8] híres sejtéseiből mára tétellé vált állítások, a megfogalmazása után körülbelül egy évtizeddel Lovász [54] által bebizonyított Perfekt Gráf Tétel és a kimondása után negyven évvel igazolt Erős Perfekt Gráf Tétel, melyről 2002-ben jelentette be Chudnovsky, Robertson, Seymour és Thomas [17, 18], hogy bebizonyították. A Perfekt Gráf Tétel szerint egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha a komplementere az. Az ezt általánosító Erős Perfekt Gráf Tétel azt állítja, hogy egy gráf pontosan akkor perfekt, ha feszített részgráfként nem tartalmaz páratlan kört vagy ilyennek komplementerét. Utóbbi, a megoldásáig Erős Perfekt Gráf Sejtésként ismert állítás, a gráfelmélet kiemelkedő problémája volt az elmúlt évtizedekben.

Közvetve tehát mindez Shannon [74] zéró-hiba kapacitás vizsgálataiból eredt.

Cohennel és Körnerrel a [19] cikkben a Shannon kapacitás fogalmát gráfcsaládokra terjesztettük ki, majd Körnerrel a [50] dolgozatban egy olyan extremális halmazelméleti kérdést vizsgáltunk, ami lefordítható volt irányított gráfcsaládok egy kapacitás típusú paraméterének vizsgálatára. Ezt általánosítva Gargano, Körner és Vaccaro [33] bevezette az irányított gráfokra értelmezett Sperner kapacitás fogalmat és ennek gráfcsaládokra való kiterjesztését. Ezzel megteremtették számos érdekes extremális halmazelméleti probléma közös tárgyalásának lehetőségét és [34, 35] cikkeikben bebizonyítottak egy mély tételt, mely számos ilyen problémát egyszerre megold. Ezek között a legnevezetesebb Rényinek az ún. kvalitatív 2-függetlenségre vonatkozó problémája, mely így felvetése után több, mint húsz évvel szintén megoldást nyert. Megjegyezzük, hogy a [19]-beli problémafelvetés eredetileg infomációelméleti indíttatású volt, a gráfcsaládok Shannon kapacitásaként értelmezett fogalom az ún. összetett csatorna zéró-hiba kapacitásának felel meg. Nayak és Rose [65] nemrégiben észrevette, hogy gráfcsaládok Sperner kapacitására is adható ehhez hasonló információelméleti interpretáció.

A Sperner kapacitás a Shannon kapacitás formális általánosításának tekinthető amennyiben az irányítatlan gráfokat olyan irányított gráfoknak tekintjük, melyek minden élüket mindkét lehetséges irányításukkal tartalmazzák. Látva, hogy a Shannon kapacitás értékét konkrét kis gráfokra sem mindig könnyű meghatározni, nem meglepő, hogy a helyzet hasonló a Sperner kapacitás esetében is. (Már egy ciklikusan irányított háromszög Sperner kapacitásának megállapítása sem triviális, ld. Calderbank, Frankl, Graham, Li, Shepp [15] és Blokhuis [13] dolgozatait.) Ugyanakkor nem egyszerűen egy megoldatlan probléma még nehezebbé tételéről van szó, hiszen a Sperner kapacitás meghatározása sokszor olyan gráfokra is érdekes, melyek irányítatlan verziójára ismerjük a Shannon kapacitás értékét. Különösen érdekes továbbá az irányítás hatását figyelni, vagyis összehasonlítani egy irányítatlan gráf Shannon kapacitását irányított változatai Sperner kapacitásával. Utóbbi sohasem lehet nagyobb az előbbinél, az egyenlőség pontos feltételei nem ismertek.

A Shannon kapacitáshoz hasonlóan az információelméletből származó gráfelméleti fogalom a gráfentrópia. Körner [44] vezette be 1973-ban megjelent cikkében és a frakcionális kromatikus szám egyfajta valószínűségi finomításaként is felfogható. A gráfentrópia teljesít egy szintén Körner [45] által észrevett szubadditivitási egyenlőtlenséget (ld. (2)), mely alkalmassá tette különféle kombinatorikus becslésekre, ld. pl. Körner [45], Newman, Ragde, Wigderson [67], Radhakrishnan [68] dolgozatait. Körner és Marton [48] a gráfentrópia és a rá vonatkozó alapvető egyenlőtlenség közvetlen általánosításával uniform hipergráfok entrópiájának segítségével adtak jobb becslést a Körner által a [45] dolgozatban Fredman és Komlós [31] nyomán vizsgált ún. "perfect hashing" problémára. A gráfentrópia talán legnagyobb sikere Kahn és Kim [43] áttörést jelentő eredménye, melyben először adtak meg konstans szorzó erejéig optimális számú összehasonlítást használó, és ezeket determinisztikusan és polinomidőben megválasztó algoritmust arra a sokat vizsgált rendezési problémára, melyben egy ismert részben rendezést kell minél kevesebb elempár összehasonlításával kiterjeszteni teljes rendezéssé. Ebben már az a Körner és Marton [47] által sejtett és a Csiszár, Körner, Lovász és Marton társszerzőkkel írt [21] cikkben bizonyított eredmény is szerepet játszott, mely szoros összefüggést állapított meg a gráfentrópia és a perfekt gráfok között.

A tézisek első csoportja a gráfentrópiával kapcsolatos. A [75] és a [77] dolgozatokban szereplő 1. és 2. Tétel a perfekt gráfok és a gráfentrópia kapcsolatát kimondó [21]-beli tétel egy-egy kiterjesztését tárgyalja, a 3. Tétel a 2. Tétel további általánosítása. A [78] cikken alapuló 4. Tétel a Witsenhausen ráta[2] nevű rokon fogalom gráfcsaládos változatát vezeti be és erre mond ki egy információelméleti tartalmát tekintve talán meglepő tételt.

A tézisek második csoportja gráfkapacitásokkal kapcsolatos. A Galluccioval, Garganoval és Körnerrel közös [32] cikken alapuló 6. és 5. Tétel irányított gráfoknak a Sperner kapacitáshoz hasonlóan extremális halmazelméleti kérdésekre is lefordítható kapacitás jellegű paraméterére, illetve ennek egy irányítatlan gráfokra vonatkozó rokonára vonatkozik. A [32] cikkben fogalkoztunk a Sperner kapacitással is, és megmutattuk, hogy az öt hosszú körnek van olyan irányítása, aminek Sperner kapacitása eléri a $C(C_5) = \log\sqrt{5}$ értéket. A Salival közös [70] cikken alapuló 8. Tételben ezt az észrevételt általánosítjuk tetszőleges csúcstranzitív önkomplementer gráfra. A 7. Tétel ez utóbbi bizonyításának alapvető segédtétele, mely talán önmagában is érdekes és meglepő. A Körnerrel és Pilotoval közös [49] cikkben szereplő 9. Tételben Alon [1] korábbi eredményét általánosító új felső korlátot adunk a Sperner kapacitásra. Ebben főszerepet játszik az Erdős, Füredi, Hajnal, Komjáth, Rödl és Seress [25] által bevezetett lokális kromatikus szám nevű paraméter, illetve annak irányított gráfokra való általánosítása. A 10. Tételben azt is kimondjuk, hogy a lokális kromatikus szám sohasem kisebb a frakcionális kromatikus

[2] Az angol *rate* szót az információelméletben gyakran *sebesség*nek fordítják, ha annak maximalizálása a cél. Itt azonban minimalizálni szeretnénk, ezért választottuk inkább az idegenebbül hangzó, de talán kevésbé félrevezető szót.

számnál. Ez utóbbi eredmény a tézisek harmadik csoportjához vezető vizsgálatok kiindulópontja. A lokális kromatikus számról nyilvánvaló, hogy a kromatikus számnál sohasem nagyobb, így az előbbi eredmény szerint mindig a frakcionális kromatikus szám és a kromatikus szám közé esik. Ez motiválja, hogy olyan gráfokra próbáljuk meghatározni az értékét, amire ez utóbbi két paraméter távol esik egymástól.

Viszonylag kevés olyan gráfcsalád ismert, amelynél e két paraméter messze van egymástól, és az ilyenekbe tartozó gráfoknál gyakran magának a kromatikus számnak a meghatározása is nehézségekbe ütközik. E nehézséget sok esetben azzal a váratlan, Lovász [55] Kneser gráfokkal kapcsolatos úttörő munkájából származó technikával lehet legyőzni, amely megfelelő előkészületek után az algebrai topológia híres tételét, a Borsuk-Ulam tételt hívja segítségül. A Tardos Gáborral közös [80] cikkekből származó 11.–14. Tételekben látni fogjuk, hogy ez a technika, az ún. topologikus módszer, a lokális kromatikus szám, sőt egy másik színezési paraméter, a cirkuláris kromatikus szám vizsgálatára is alkalmas. A lokális kromatikus számra sok esetben éles alsó becslést adunk, az élességet kombinatorikus úton láttuk be. A cirkuláris kromatikus számra kapott eredményünk részlegesen (páros kromatikus gráfok esetén) igazolja Johnson, Holroyd és Stahl [42], valamint Chang, Huang és Zhu [16] egy-egy sejtését. Az előbbi sejtéssel kapcsolatos eredményt tőlünk függetlenül Meunier [63] is elérte. A szintén Tardos Gáborral közös [81] cikken alapuló 15. Tételben szintén a topologikus módszert használva a 11.–14. Tételekben is vizsgált G gráfok optimális ($\chi(G)$ színt használó) színezéseiről látjuk be, hogy bennük minden elépzelhető $\chi(G)$ csúcsú teljesen tarka teljes páros gráf megjelenik részgráfként. Ez egyfajta ellenpontja a lokális kromatikus számra bizonyított eredményeinknek, melyek interpretálhatók úgy, hogy ha a kromatikus számnál csak eggyel több színt is használhatunk, akkor ezen tarka teljes páros gráfok közül egy kivételével mindegyik elkerülhető. E tétel bizonyításának fő eszköze a Borsuk-Ulam tétel egy Tuckertől [84] és Bacontól [5] származó általánosítása, melynek a 16. Tételben egy további következményét is bemutatjuk.

A topologikus módszer, ezen belül is a Borsuk-Ulam tételt használó technika jelentőségét nehéz túlbecsülni, itt most csak Matoušek [59] remek könyvére hivatkozunk, további előzményeket pedig a 11.–14. Tételek bővebb bemutatásakor tárgyalunk.

Gráfok entrópiái

A tézisek ezen csoportjának alapja a [75] és a [78] cikk, valamint a [77] dolgozat egy része.

Gráfentrópia

A gráfentrópia nevű információelméleti függvényt Körner [44] definiálta. A kiindulópont egy információelméleti probléma volt, ez vezetett a következő mennyiség bevezetéséhez, melyet Körner a G gráf P eloszláshoz tartozó entrópiájának nevezett el:

$$H_\varepsilon(G,P) := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \min_{P^t(U)>1-\varepsilon} \chi(G^t[U]),$$

ahol $G^t[U]$ a G gráf fentebb bevezetett t-edik konormális hatványának az $U \subseteq [V(G)]^t$ csúcshalmazon feszített részgráfja, $\varepsilon \in (0,1)$, P pedig egy $V(G)$-n adott valószínűségeloszlás, mely $P^t(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^t P(x_i)$ módon adja az $\boldsymbol{x} = x_1 \dots x_t$ sorozat valószínűségét és $P^t(U) = \sum_{\boldsymbol{x}\in U} P^t(\boldsymbol{x})$. Körner [44] megadott $H(G,P)$-re egy másik formulát is, a kettő egyenlőségének bizonyításával belátta, hogy a fenti határérték létezik és független ε-tól. Ennek a második formulának a további alakítása a [21] cikkben elvezetett ahhoz a harmadikhoz, amit az alábbi definícióban megadunk. Egy F (hiper)gráfban független halmaznak nevezzük a csúcsok minden olyan részhalmazát, amely nem tartalmaz élet, a $VP(F)$ csúcspakolási politóp pedig a független halmazok karakterisztikus vektorainak konvex burka.

Definíció. *Legyen F (hiper)gráf a $V(F) = \{1,...,n\}$ csúcshalmazon, $P = (p_1,...,p_n)$ pedig valószínűségeloszlás $V(F)$-en. Ekkor az F (hiper)gráf P eloszlásra vonatkozó entrópiája a*

$$H(F,P) = \min_{\boldsymbol{a}\in VP(F)} \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{a_i} \tag{1}$$

mennyiség.

Körner [45] a nyolcvanas években észrevette, hogy a gráfentrópia teljesíti a következő szubadditivitási tulajdonságot. Ha F és G két gráf ugyanazon a V csúcshalmazon, P tetszőleges V-n vett eloszlás, $F \cup G$ pedig a $V(F\cup G) = V, E(F\cup G) = E(F) \cup E(G)$ módon megadható gráf, akkor

$$H(F\cup G,P) \le H(F,P) + H(G,P). \tag{2}$$

Ez az egyenlőtlenség lényegében az egyszerűen belátható $\chi(F \cup G) \le \chi(F)\chi(G)$ összefüggés következménye. A bevezetőben már említettük, hogy a fenti egyenlőtlenségre alapozva nemtriviális becslések nyerhetők egyes kombinatorikai problémákban, ilyen alkalmazások találhatók például Körner [45], Newman, Ragde és Wigderson [67], vagy Radhakrishnan [68] cikkeiben. Mindez felvetette a szubadditivitási egyenlőtlenség élességének kérdését, melynek már információelméleti megfontolások szerint is kitüntetett speciális esete volt az, amikor a két gráf egymás komplementere (ld. Körner és Longo [46]). Körner és Marton [47] sejtette, a [21] cikkben pedig bizonyítást nyert, hogy a $H(G,P) + H(\bar{G},P) = H(K_{|V|},P) = H(P)$ egyenlőség pontosan akkor áll fenn minden P eloszlás esetén, ha G perfekt gráf. Itt $H(P)$ a P eloszlás entrópiája, ami megegyezik a $|V(G)|$ csúcsú teljes gráf P-hez tartozó entrópiájával.

Ennek az eredménynek adja két különböző kiterjesztését a 1. és a 2. Tétel.

A [75] dolgozat tartalmazza azon 3-uniform hipergráfok karakterizálását, amelyek a fentivel analóg azonosságot teljesítenek. Az idézett cikkben a probléma az általános k-uniform esetre is meg van oldva, de $k > 3$-ra az derül ki, hogy a kívánt egyenlőség csak a triviális esetekben teljesül.

Hipergráfok entrópiáját Körner és Marton [48] definiálták a gráfentrópia általánosításaként (ld. a fenti definíciót), a szubadditivitási egyenlőtlenség itt is érvényben marad és a korábbiakhoz hasonlóan alkalmazható, ld. [48]. Ha F k-uniform hipergráf a V csúcshalmazon, akkor F-nek $\bar{F}$ komplementerén azt a V-n megadható hipergráfot értjük, melynek élei az F-nek $E(F)$ élhalmazában nem szereplő V-beli k-asok.

Egy 3-uniform F hipergráfot nevezzünk *levélmintá*nak, ha reprezentálható a következőképpen. Legyen T fa, melyben a legalább 2 fokú csúcsok mindegyike meg van jelölve 0-val vagy 1-gyel. Az így megjelölt T fához tartozó levélminta az a 3-uniform hipergráf, melynek csúcsai T levelei (1 fokú csúcsai), élei pedig azon $\{x, y, z\}$ hármasok, melyekre a fabeli xy, yz és xz utak egyetlen közös pontja 1-gyel van megjelölve. Az n csúcsú teljes 3-uniform hipergráfot jelölje $K_n^{(3)}$.

1. Tétel. ([75]) *Az F 3-uniform hipergráfra akkor és csak akkor teljesül minden P eloszlás mellett a*

$$H(F, P) + H(\bar{F}, P) = H(K_{|V|}^{(3)}, P),$$

egyenlőség, ha F levélminta.

A tétel kiterjeszthető arra az esetre is, amikor $K_{|V|}^{(3)}$-at kettőnél több hipergráf uniójára bontjuk.

A [77] dolgozatban egyebek mellett a gráfentrópia és az ún. imperfektségi hányados kapcsolatát is tárgyaljuk[3] Az imperfektségi hányados fogalmát Gerke és McDiarmid vezették be [36] dolgozatukban. Frekvenciakiosztási problémákat vizsgálva minden G gráfhoz hozzárendeltek egy $\mathrm{imp}(G) \geq 1$ mennyiséget, mely pontosan akkor egyenlő 1-gyel, ha G perfekt. Az új fogalom további szép tulajdonsága, hogy $\mathrm{imp}(G) = \mathrm{imp}(\bar{\mathrm{G}})$ teljesül minden G gráfra. A gráfentrópia és az imperfektségi hányados között a következő összefüggést sikerült igazolni.

2. Tétel. ([77]) *Tetszőleges G gráfra teljesül, hogy*

$$\log \mathrm{imp}(G) = \max_P \{H(G, P) + H(\bar{G}, P) - H(P)\}.$$

A tétel tehát azt mutatja, hogy a Gerke és McDiarmid által definiált, imperfektséget mérő mennyiség és a [21]-beli eredményből adódó imperfektségi mérőszám lényegében ugyanaz.

[3]Ennek az összefoglaló dolgozatnak a megírására nagyrészt az alább tárgyalt eredmény révén került sor, részben emiatt kért fel a [69] könyv egyik szerkesztője, Bruce Reed, korábbi [76] összefoglaló cikkem ezt is tartalmazó átdolgozására.

A gráfentrópia definíciójának alábbi általánosítása szintén [21]-ból való.

Egy $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n_{+,0}$ halmazt *konvex sarok*nak nevezünk, ha zárt, konvex, belseje nemüres, és teljesül rá, hogy amennyiben $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$ és $0 \leq a'_i \leq a_i$ minden i-re, akkor $\boldsymbol{a}' \in \mathcal{A}$.

A gráfentrópia általánosításaként értelmezhető egy konvex sarok entrópiája is az alábbi formulával:

$$H_{\mathcal{A}}(P) := \min_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}} \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{a_i}.$$

McDiarmid [61] bevezeti két konvex sarok, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n_{+,0}$ *dilatációs hányados*át az alábbi módon:

$$\mathrm{dil}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \min\{t : \mathcal{B} \subseteq t\mathcal{A}\}.$$

Gerke és McDiarmid egyik eredménye szerint ez a fogalom általánosítása az imperfektségi hányadosnak, utóbbi ugyanis kifejezhető két, a szóbanforgó gráfhoz rendelt speciális konvex sarok dilatációs hányadosaként.

Az 2. Tételhez hasonlóan bizonyítható annak következő általánosítása is.

3. Tétel. ([77])

$$\log \mathrm{dil}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max_{P} \{H_{\mathcal{A}}(P) - H_{\mathcal{B}}(P)\}.$$

Witsenhausen ráta

A gráfentrópia eredeti definíciójában másik (az ún. normális) gráfhatványozást alkalmazva valamivel kisebb értékű mennyiséghez jutunk, melyet Körner és Longo [46] vezetett be szintén információelméleti megfontolásból. Ez a függvény tekinthető úgy, mint a (csak valamivel később bevezetett) Witsenhausen rátaként ismert mennyiség valószínűségi finomítása. A Witsenhausen [86] dolgozatában definiált Witsenhausen ráta azt fejezi ki, hogy 0 hibavalószínűségű dekódolást elvárva átlagosan mekkora hányadára lehet összetömöríteni egy üzenetet, ha a vevő rendelkezik valamilyen, az adó által nem ismert, de az üzenet tartalmával korreláló mellékinformációval. A Shannon kapacitás esetéhez hasonlóan itt is egy gráffal jellemezhető az információelméleti szituáció (a csúcsok a lehetséges üzenetek, és kettő össze van kötve éllel, ha van olyan mellékinformáció, mely nem különbözteti meg őket, tehát a hozzájuk tartozó üzeneteknek különbözniük kell). Jelölje $G^{\wedge t}$ a G gráf már említett normális hatványát, mely legegyszerűbben a $G^{\wedge t} = \overline{(\bar{G})^t}$ egyenlőséggel definiálható, ahol mindkét felülvonás komplementálást jelent. (Két különböző csúcsot alkotó sorozat pontosan akkor van összekötve, ha minden olyan koordinátában, ahol nem egyenlők, G-nek élét alkotják.)

Definíció. (Witsenhausen [86]) *A G gráf Witsenhausen ráta nevű paramétere az*

$$R(G) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \chi(G^{\wedge t})$$

mindig létező határérték.

A [78] dolgozatban azt vizsgáltuk, hogy ha egyetlen adó sok különböző vevőnek küldi ugyanazt az üzenetet, s ezen adók mind más-más mellékinformációval rendelkeznek, akkor minden egyes vevőnél 0 hibavalószínűségű dekódolást elvárva, átlagosan mekkora hányadára tömöríthető össze az üzenet. A meglepő válasz az, hogy ugyanakkorára, mint amekkorára akkor lenne, ha csak azzal az egy vevővel kellene kommunikálnia az adónak, amelyik a leggyengébb tömörítést teszi lehetővé. Formálisan, ha k vevő van és G_i írja le az i-edik vevővel való kommunikációhoz tartozó gráfot ($i = 1, \ldots, k$), $\mathcal{G} = \{G_1, \ldots, G_k\}$ és a keresett mennyiséget $R(\mathcal{G})$ jelöli (meggondolható, hogy $R(\mathcal{G}) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(\chi(\cup_i G_i^{\wedge t}))$), akkor a következő igaz.

4. Tétel. ([78])

$$R(\mathcal{G}) = \max_{G_i \in \mathcal{G}} R(G_i).$$

A bizonyítás Gargano, Körner és Vaccaro [35] mély tételén alapul, mely gráfok kapacitásainak valószínűségi finomítására mond ki erős eredményt. A Witsenhausen rátára ez azért alkalmazható, mert a Witsenhausen ráta már említett valószínűségi finomítása és a Shannon kapacitás Csiszár és Körner [20] által bevezetett valószínűségi finomítása között egy Marton [58] által igazolt szoros öszefüggés áll fönn.

Gráfok kapacitásai

A tézisek ezen csoportjának alapja a Gallucioval, Garganoval és Kőrnerrel közös [32], a Salival közös [70], valamint a Körnerrel és Pilottoval közös [49] dolgozat.

Variációk kapacitásfogalmakra

Legyen $\mathcal{F}$ tetszőleges, a konormális szorzásra zárt gráfcsalád. A G gráfban feszített részgráfként megjelenő legnagyobb (legtöbb csúcsú) $\mathcal{F}$-beli gráf csúcsainak számát $c_{\mathcal{F}}(G)$-vel jelölve $c_{\mathcal{F}}(G^t) \geq [c_{\mathcal{F}}(G)]^t$ nyilvánvalóan teljesül. Ilyenkor létezik a $C_{\mathcal{F}}(G) := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log c_{\mathcal{F}}(G^t)$ határérték, ami $\mathcal{F}$-nek a teljes gráfok családját választva éppen a Shannon kapacitás. Ha az $\mathcal{F}$ gráfcsaládra még azt a további természetes feltételt is szabjuk, hogy a feszített részgráf képzésre is zárt legyen, akkor egy egyszerű észrevétel mutatja, hogy $\mathcal{F}$ megválasztására mindössze néhány lehetőségünk marad. Triviális eseteket leszámítva $\mathcal{F}$ nem lehet más, mint az összes üres (vagyis éleket nem tartalmazó), az összes teljes, vagy az összes teljes sokrészes gráf családja. (Utóbbiba azon gráfok tartoznak, melyek csúcshalmaza partícionálható néhány élet nem tartalmazó osztályra úgy, hogy bármely két különböző osztályba eső csúcs össze legyen kötve. Ez a gráfcsalád tartalmazza mindkét előzőt.) A megfelelő $C_{\mathcal{F}}(G)$ értékek közül az első mindig a függetlenségi szám logaritmusával lesz egyenlő, mert a legnagyobb független halmaz mérete pontos multiplikativitást mutat a konormális szorzás esetén. A második családhoz tartozó érték a Shannon kapacitás. Egyedül a harmadik család ad új, nemtriviális mennyiséget. Egyebek mellett ezt a mennyiséget vizsgáltuk *kaszkád kapacitás* néven az Anna Galluccioval, Luisa Garganoval és Körner Jánossal közös [32] dolgozatban. A G-beli legtöbb csúcsú feszített teljes sokrészes részgráf csúcsainak számát $W(G)$-vel jelölve beláttuk, hogy egy alkalmasan definiált G^* segédgráf kromatikus számának logaritmusa felső korlátja G kaszkád kapacitásának. Ez közvetlen következménye az alábbi tételnek, melynek kimondásához definiáljuk a G^* gráfot.

A $G = (V, E)$ irányítatlan gráf *függetlenségi gráfja* az a G^* irányítatlan gráf, melynek csúcsai és élei az alábbi módon adhatók meg:

$$\begin{aligned} V(G^*) &= \{(x, A) : A \subseteq V \text{ független halmaz } G\text{-ben és } x \in A\}, \\ E(G^*) &= \{\{(x, A), (y, B)\} : A = B \text{ és } x \neq y, \text{ vagy } \forall a \in A, \forall b \in B, \{a, b\} \in E\}. \end{aligned}$$

5. Tétel. ([32]) *Tetszőleges G irányítatlan gráfra fennáll a*

$$W(G^t) \leq [\chi(G^*)]^t$$

egyenlőtlenség.

A tétel alkalmazásaként [32]-ben mutattunk olyan gráfosztályokat, amelyekre a $W(G)$ mennyiség multiplikatívan viselkedik.

A fenti eredményhez irányított gráfok analóg paramétereit vizsgálva jutottunk el. A konormális szorzás egyszerűen kiterjeszthető irányított gráfokra: az F és G irányított gráfok $F \cdot G$ konormális szorzata az a $V(F) \times V(G)$ csúcshalmazú irányított gráf, melyben az (f_1, g_1) csúcsból pontosan akkor megy (irányított) él (f_2, g_2)-be, ha $(f_1, f_2) \in E(F)$ vagy $(g_1, g_2) \in E(G)$ teljesül. Az irányított esetben is G^t jelöli a G gráf önmagával vett t-szeres konormális szorzatát. Érdemes megjegyezni, hogy G^t-ben két csúcs között futhat mindkét irányban él olyankor is, ha G-ben ez nem fordul elő.

Irányított gráfok konormális hatványozása segítségével definiálta Gargano, Körner és Vaccaro [33] a Sperner kapacitás fogalmát, amiről említettük a bevezetőben, hogy különböző extremális halmazelméleti problémák közös tárgyalását tette lehetővé. Hasonló motivációk alapján, szintén a [32] dolgozatban, bevezettük az *antilánc kapacitás* fogalmát, mely olyan G^t-beli részgráfok maximális csúcsszámának aszimptotikus exponensét méri, melyekben bármely két csúcs vagy összekötetlen, vagy mindkét irányban összekötött. Jelöléssel: ha $M(G, t)$ a legnagyobb ilyen tulajdonságú részgráf csúcsszáma G^t-ben, akkor G antilánc kapacitása az

$$A(G) := \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log M(G, t)$$

mennyiség. A teljes sokrészes gráfokhoz mindez annak révén kapcsolódik, hogy $A(G)$ legtermészetesebb alsó becslését bizonyos speciálisan irányított G-beli teljes sokrészes gráfok maximális csúcsszámának logaritmusa adja.

Ha a G alapgráfban tetszőleges két csúcs legfeljebb az egyik irányban lehet összekötve, akkor az antilánc kapacitásra is felső becslést ad egy segédgráf kromatikus számának logaritmusa. Ennek a szintén G^*-gal jelölt gráfnak a csúcshalmaza ugyanúgy adható meg, mint az irányítatlan esetben, élhalmaza pedig az alábbi:

$$E(G^*) = \{\{(x, A), (y, B)\} : A = B \text{ és } x \neq y, \text{ vagy } \forall a \in A, \forall b \in B, (a, b) \in E\}.$$

Az irányítatlan gráfok függetlenségi gráfjának definíciójához képest tehát annyi az eltérés, hogy ha A és B olyan független halmazok, melyekre minden $a \in A$ és $b \in B$ között van él (ilyenkor adódik, hogy diszjunktnak kell lenniük), akkor az is lényeges, hogy az A és B között valamelyik kitüntetett irányba futó valamennyi él jelen van-e. Ha az irányítatlan gráfokat olyan irányított gráfokkal azonosítjuk, melyekben minden él mindkét irányban szerepel, akkor az újabb definíció magában foglalja a korábbit, s ez indokolja az azonos jelölést.

Az antilánc kapacitást becslő tétel tehát a következő.

6. Tétel. ([32]) *Ha a G irányított gráfban bármely két pont között legfeljebb az egyik irányban van él, akkor*

$$A(G) \leq \log \chi(G^*).$$

Pontosabban, fennáll az

$$M(G, t) \leq [\chi(G^*)]^{t-1} \alpha(G)$$

egyenlőtlenség, ahol $\alpha(G)$ a G gráf függetlenségi számát jelöli.

A 6. Tétel és az előbb már kimondott 5. Tétel bizonyítása sokban hasonlít ugyan, ennek ellenére a 5. Tétel bizonyítása nem teljesen automatikus a 6. Tétel bizonyításának ismeretében sem. Ennek az az oka, hogy míg az irányított probléma esetén a kielégítendő feltétel csúcspárok között áll fönn, az irányítatlan esetben csúcsok hármasait kell vizsgálni annak megállapításához, hogy szerepelhetnek-e együtt egy számunkra megfelelő halmazban, vagyis egy teljes sokrészes gráfban.

Sperner kapacitás becslései

Gargano, Körner és Vaccaro [33] a következő módon általánosította a Shannon kapacitás fogalmát irányított gráfokra. Jelentse $\omega_s(G)$ a G irányított gráf legnagyobb olyan $U \subseteq V(G)$ csúcshalmazának elemszámát, amire $x, y \in U$-ból $(x, y) \in E(G)$ és $(y, x) \in E(G)$ is következik. (Az ilyen U által feszített részgráfot *szimmetrikus klikk*nek nevezzük.)

Definíció (Gargano, Körner, Vaccaro [33]) *A G irányított gráf (logaritmikus) Sperner kapacitása a*

$$\Sigma(G) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \omega_s(G^t)$$

mennyiség.

A definícióból adódik, hogy ha egy irányítatlan gráfot ismét azzal az irányított gráffal azonosítunk, mely minden éle helyén annak mindkét lehetséges irányított változatát tartalmazza, akkor az így kapott irányított gráf Sperner kapacitása az eredeti irányítatlan gráf Shannon kapacitásával lesz azonos. Ebből az is azonnal látható, hogy egy irányítatlan G gráf összes lehetséges irányított $\hat{G}$ változatára $\Sigma(\hat{G}) \leq C(G)$ igaz. Felmerül a kérdés, hogy ha $\hat{G}$ csak olyan irányított gráfot jelenthet, ami G minden élének egyik, de csak egyik irányítását tartalmazza, akkor van-e az így kapható irányított változatok között mindig olyan, amire $\Sigma(\hat{G}) = C(G)$. Általánosságban a kérdés nyitott, alább néhány speciális esetéről szólunk.

Nem nehéz belátni, hogy minden irányított G gráfra fennáll $\Sigma(G) \geq \log \mathrm{tr}(G)$, ahol $\mathrm{tr}(G)$ a gráf *tranzitív klikkszám*a, vagyis a benne lévő legnagyobb olyan klikk mérete, melynek csúcsai megcímkézhetők különböző egész számokkal úgy, hogy kisebb címkéjű csúcsból nagyobb címkéjűbe mindig menjen él[4]. Ebből könnyen adódik, hogy amennyiben egy G irányítatlan gráfra $\chi(G) = \omega(G)$ teljesül, akkor egy legnagyobb klikkjét tranzitívan (többi élét pedig tetszőlegesen) irányítva a keletkező $\hat{G}$ irányított gráfra fenn fog állni a $\Sigma(\hat{G}) = C(G)$ egyenlőség. A [32] dolgozat vizsgálatainak egyik melléktermék az az észrevétel, hogy C_5-nek van olyan irányítása, melynek négyzetében megjelenik egy öt csúcsú tranzitív klikk. Ebből $C(C_5) = \log \sqrt{5}$ alapján azonnal adódik, hogy C_5 is rendelkezik a fenti tulajdonsággal (noha $\chi(C_5) > \omega(C_5)$). A [70] dolgozatban ezt az észrevételt általánosítottuk. Az itt ismertetett, Sali Attilával közös eredmény szerint a vizsgált tulajdonsággal minden csúcstranzitív önkomplementer gráf rendelkezik. A bizonyításhoz az alábbi tételt igazoljuk. (A tétel kimondásában egy halmaz ρ-val jelölt lineáris rendezése úgy értendő, hogy $\rho(k)$ a halmaz azon elemét jelöli, ami ρ szerint a k-adik helyre kerül.)

7. Tétel. ([70]) *Legyen $G = (V, E)$ önkomplementer gráf a $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ csúcshalmazon és legyen $\tau : V \to V$ a V elemeinek az önkomplementerséget tanúsító permutációja, vagyis olyan egy-egy értelmű leképezés, amire $\{i, j\}$ akkor és csak akkor nem éle G-nek, ha $\{\tau^{-1}(i), \tau^{-1}(j)\} \in E$. Ekkor létezik V elemeinek olyan σ lineáris rendezése, amire fennáll, hogy ha $\{i, j\} \notin E$ és $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$, akkor $\sigma^{-1}(\tau^{-1}(i)) < \sigma^{-1}(\tau^{-1}(j))$.*

Kevésbé formálisan ez azt jelenti, hogy minden önkomplementer gráf irányítható úgy a komplementérével együtt, hogy irányított gráfként is izomorfak legyenek (ráadásul egy előre megadott, irányítatlan változataik között érvényes izomorfizmus szerint), és az uniójukként előálló irányított teljes gráf irányítása tranzitív legyen. (Ilyen irányítást kapunk, ha a tételbeli lineáris rendezéssel konzisztensen irányítjuk a gráf éleit.)

Ebből Lovász [56] egy tételét is felhasználva adódik a következő.

[4]Röviden azt mondhatnánk, hogy egy klikk tranzitív, ha nincs benne irányított kör, de mivel a hatványokban oda-vissza élek is megjelenhetnek, biztosabban kerüli el a félreértést a kicsit bonyolultabb fogalmazás.

8. Tétel. ([70]) *Ha G csúcstranzitív és önkomplementer gráf, akkor az összes irányításán vett Sperner kapacitások maximuma egyenlő a Shannon kapacitásával.*

Calderbank, Frankl, Graham, Li és Shepp [15] bizonyították először, hogy egy irányított gráf Sperner kapacitása lehet ténylegesen kisebb, mint irányítatlan megfelelőjének Shannon kapacitása. Azt mutatták meg, hogy egy ciklikusan irányított háromszög Sperner kapacitása $\log 2$, míg $C(C_3) = \log 3$ nyilvánvaló. A bizonyítás lineáris algebrai módszert használ. Blokhuis [13] rövidesen másik elegáns lineáris algebrai bizonyítást közölt ugyanerre az állításra. Az ő bizonyítását általánosította valamivel később Alon [1], aki belátta, hogy

$$\Sigma(G) \leq \log(\min\{\Delta_+(G), \Delta_-(G)\} + 1),$$

ahol $\Delta_+(G)$ és $\Delta_-(G)$ a G irányított gráf egy-egy csúcsából kiinduló, illetve oda befutó élek maximális számát jelöli. Ezt az eredményt sikerült tovább általánosítani a Körner Jánossal és Concetta Pilottoval közös [49] dolgozatban. Az eredmény kimondásához definiálnunk kell az irányított lokális kromatikus szám fogalmát, mely egy Erdős, Füredi, Hajnal, Komjáth, Rödl és Seress [25] által bevezetett, irányítatlan gráfokon definiált fogalom általánosítása. Először ez utóbbit definiáljuk.

Definíció. ([25]) *Egy G irányítatlan gráf lokális kromatikus száma a*

$$\psi(G) := \min_{c:\ V(G)\to\mathbb{N}} \max_{v\in V(G)} |\{c(u) : u \in \Gamma_G(v)\}|$$

mennyiség, ahol a minimalizálást az összes c jó színezésre végezzük, $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza, $\Gamma_G(v)$ pedig a v csúcs “zárt szomszédsága”, vagyis $\Gamma_G(v) = \{u \in V(G) : \{u, v\} \in E(G) \text{ vagy } u = v\}$.

A lokális kromatikus szám tehát az a minimális szám, amire igaz, hogy ennyi színnek minden jó színezésben elő kell fordulnia valamely zárt szomszédságban.

Definíció. *A G irányított gráf irányított lokális kromatikus száma a*

$$\psi_d(G) := \min_{c:\ V(G)\to\mathbb{N}} \max_{v\in V(G)} |\{c(w) : w \in \Gamma^+_G(v)\}$$

mennyiség, ahol a minimalizálást az összes c jó színezésre végezzük, vagyis olyanokra, amelyekben összekötött csúcsok színe nem lehet azonos, $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza, $\Gamma^+_G(v)$ pedig a v csúcs “zárt kiszomszédsága”, vagyis $\Gamma^+_G(v) = \{u \in V(G) : (v, u) \in E(G) \text{ vagy } u = v\}$.

Nyilvánvaló, hogy egy irányítatlan gráf minden élét két ugyanazon csúcsok között vezető ellentétes irányítású élre cserélve az utóbbi fogalom az előbbit adja vissza.

9. Tétel. ([49])

$$\Sigma(G) \leq \log \psi_d(G).$$

A 9. Tétel azonnali következménye például, hogy egy irányított páratlan kör Sperner kapacitása csak úgy lehet nagyobb a triviális $\log 2$ alsó korlátnál, ha részgráfként tartalmaz egy "alternáló" irányítású páratlan kört, vagyis egy olyat, melyben egy kivételével minden csúcsnak 0 vagy 2 a kifoka. Bohman és Holzman [14] 2003-ban megjelent, a bevezetőben már említett eredménye, hogy minden páratlan kör Shannon kapacitása nagyobb a triviális $\log 2$-nél. Ha tehát a Shannon kapacitás értékét C_{2k+1} valamely irányított változatának Sperner kapacitása eléri, akkor ez az irányított változat csakis az alternáló módon irányított lehet. (Öt hosszú páratlan kör esetén szükségképpen ezt az irányítást szolgáltatta a 7. Tétel bizonyítása.)

A 9. Tételt irányítatlan (azaz ezzel egyenértékűen, szimmetrikusan irányított) gráfokra alkalmazva azt kapjuk, hogy $C(G) \leq \log \psi(G)$ igaz. Szemben az irányított esettel, ez itt nem jelent új korlátot. Jelölje ugyanis $\chi^*(G)$ ismét a G gráf frakcionális kromatikus számát. Jól ismert (ld. Shannon [74], Lovász [56]) és a bevezetőben (logaritmálás nélkül) láttuk is, hogy $C(G) \leq \log \chi^*(G)$, ugyanakkor [49]-ben azt is beláttuk, hogy a lokális kromatikus számra fennáll a következő.

10. Tétel. ([49])

$$\psi(G) \geq \chi^*(G).$$

Gráfok színezései

A tézisek ezen csoportjának alapja elsősorban a Tardos Gáborral közös [80] és [81] dolgozat, de felhasználjuk a Tardos Gáborral és Siniša Vrećicaval közös [82] dolgozat egyik tételét, valamint a [79] dolgozatot is.

Lokális színezés

A korábbiakban már szereplő lokális kromatikus számnak triviális felső korlátja a kromatikus szám. Erdős, Füredi, Hajnal, Komjáth, Rödl és Seress [25] belátták, hogy az eltérés tetszőlegesen nagy lehet: minden $k \geq 3$-hoz megadható olyan G gráf, amire $\psi(G) = 3$ és $\chi(G) \geq k$. Az előző rész végén láttuk, hogy a lokális kromatikus szám ugyanakkor nem lehet kisebb a gráf frakcionális kromatikus számánál. Ahogy a bevezetőben már említettük, ez indokolja, hogy a lokális kromatikus szám viselkedését olyan gráfokra vizsgáljuk, amelyekre e két korlát, a kromatikus szám és a frakcionális kromatikus szám, távol esik egymástól.

Ilyen tulajdonságú gráfokra alapvető példák a Kneser gráfok és a Mycielski gráfok (ld. Scheinerman és Ullman [71] könyvét), valamint ezek különféle variánsai, például az ún. Schrijver gráfok és általánosított Mycielski gráfok. Ha $\chi(G)$ távol esik $\chi^*(G)$-től, akkor a kromatikus számnak nem lehet éles becslése az egyébként triviális $|V(G)|/\alpha(G)$ alsó korlát (ahol $\alpha(G)$ ismét a G gráf függetlenségi száma), mivel ez a mennyiség a frakcionális kromatikus számot is alulról becsli. Részben ez a magyarázata, hogy számos ilyen gráf kromatikus számának meghatározásához a megszokott kombinatorikus módszerek nem elegendőek.

A Kneser gráfok kromatikus számát Kneser 1955-ben leírt sejtését bizonyítva Lovász [55] határozta meg több, mint két évtizeddel később. A bizonyítás az algebrai topológia híres tételét, a Borsuk-Ulam tételt használta, s a topológiai kombinatorika elnevezésű terület egyik kiindulópontjává vált, (ld. de Longueville [23] jubileumi cikkét, Björner [12] összefoglalóját és Matoušek [59] már említett könyvét). Szintén a topologikus módszerrel igazolta Schrijver [72], hogy a Kneser gráfok róla elnevezett (csúcs-)színkritikus feszített részgráfjainak kromatikus száma megegyezik a megfelelő Kneser gráfok kromatikus számával.

Mycielski [64] konstrukciója tetszőleges (legalább egy élet tartalmazó) gráfból olyan másikat állít elő melynek klikkszáma változatlan, kromatikus száma pedig 1-gyel nagyobb az eredeti gráfénál. A kromatikus szám növekedése itt kombinatorikus érveléssel (is) igazolható. (Mycielski gráfoknak az egyetlen élből kiindulva a konstrukció iterált alkalmazásával kapható gráfokat szokás hívni.) Az általánosított Mycielski konstrukció ennek a konstrukciónak olyan módosítása, mely (egy triviális eset kivételével) szintén változatlanul hagyja a klikkszámot, a kromatikus számot pedig minden olyan esetben növeli 1-gyel, amikor a gráf eleget tesz egy bizonyos topologikus feltételnek. Ennek a ténynek szintén topológiai bizonyítása Stiebitz [83] eredménye (ld. még Gyárfás, Jensen, Stiebitz [39], Matoušek [59]).

A Tardos Gáborral közös [80] cikkben azt kezdtük vizsgálni, hogy a topológiai módszer segítségével tudunk-e valamit mondani a fenti típusú gráfok lokális kromatikus számáról.

A Lovász-Kneser tétel bizonyításának mára számos (szintén topológiát használó, vagy legalábbis azon alapuló) variánsa ismert (ld. pl. Bárány [6], Dolnyikov [24], Greene [38]). Matoušek és Ziegler [60] cikke, valamint Matoušek [59] könyve Alon, Frankl, Lovász [2] és Křiž [51] munkái nyomán ún. *box komplexusok* bevezetésével hoz közös nevezőre sok rokon, de számos fontos részletben mégis különböző bizonyítást. E box komplexusok segítségével topologikus terek rendelhetők gráfokhoz, melyeknek egyes topológiai paraméterei alsó becslést szolgáltatnak a gráf kromatikus számára. Ennek részletes leírását valamint a box komplexusok definícióját ebben a rövid összefoglalóban terjedelmi okokból mellőzzük, mindez megtalálható a [80] dolgozatban. Az eredmények kimondásához alkalmazzuk a szintén e dolgozatban szereplő konvenciót, miszerint *topologikusan t-kromatikus*nak mondunk egy G gráfot, ha egy bizonyos box komplexusának egy bizonyos paramétere (a $B_0(G)$-vel jelölt komplexus $\mathbb{Z}_2$-coindexe) olyan értéket vesz föl, hogy abból $\chi(G) \geq t$ következik. Megjegyezzük, hogy a t-kromatikus Kneser és Schrijver gráfok toplogikusan t-kromatikus gráfok. Szintén ilyenek azok az általánosított Mycielski konstrukcióval nyerhető gráfok, melyeknél az eredeti gráf, amire a konstrukciót alkalmazzuk, topologikusan $(t-1)$-kromatikus.

A Borsuk-Ulam tétel egy Ky Fan-tól származó [29]-beli általánosítását használva a következő alsó becslést adjuk a lokális kromatikus számra.

11. Tétel. ([80]) *Ha G topologikusan t-kromatikus gráf, akkor*

$$\psi(G) \geq \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + 1.$$

Ez a tétel a következő, [80]-ban Cikk-cakk tételnek (angolul "Zig-zag Theorem"-nek) nevezett, Ky Fan tételéből adódó általánosabb tétel közvetlen következménye, melynek Kneser gráfokra vonatkozó speciális esetét Ky Fan maga is igazolta [30].

Cikk-cakk tétel. ([80]) *Legyen G topologikusan t-kromatikus gráf és c ennek tetszőleges jó színezése tetszőleges számú színnel, melyekről feltesszük, hogy lineárisan rendezettek. Ekkor G tartalmaz egy olyan $K_{\lceil \frac{t}{2} \rceil, \lfloor \frac{t}{2} \rfloor}$ teljes páros részgráfot, melynek a c színezés szerint mind a t csúcsa különböző színű és ezek a színek természetes sorrendjükben felsorolva felváltva helyezkednek el a teljes páros gráf két oldalán.*

A 11. Tétel alsó becslése sok esetben pontos. Ilyen eredményeket megfelelő paraméterű Schrijver gráfokra, általánosított Mycielski gráfokra és ún. Borsuk gráfokra bizonyítottunk [80]-ban. Itt példaként a Schrijver gráfok esetét részletezzük, ehhez először megadjuk pontos definíciójukat. Használni fogjuk az $[n] = \{1, \dots, n\}$ jelölést.

Definíció. (Schrijver [72]) *Tetszőleges k és $n \geq 2k$ pozitív egészekhez az* $\mathrm{SG}(n,k)$ Schrijver gráf *csúcsainak és éleinek halmaza így adható meg:*

$$\begin{aligned} V(\mathrm{SG}(n,k)) &= \{A \subseteq [n] : |A| = k, \forall i \ \{i, i+1\} \nsubseteq A \ \text{ és } \ \{1, n\} \nsubseteq A\}, \\ E(\mathrm{SG}(n,k)) &= \{\{A, B\} : A \cap B = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Megemlítjük, hogy a $\mathrm{KG}(n,k)$ Kneser gráf definíciója ettől annyiban tér el, hogy ott a csúcshalmaz $[n]$-nek minden k elemű részhalmazát tartalmazza.

Schrijver [72] tétele szerint $\chi(\mathrm{SG}(n,k)) = n - 2k + 2$ és bármely csúcs elhagyása esetén a kromatikus szám csökken.

A Schrijver gráfok lokális kromatikus számára vonatkozik a következő eredmény.

12. Tétel. ([80]) *Ha $t = n - 2k + 2 > 2$ páratlan és $n \geq 4t^2 - 7t$, akkor*

$$\psi(\mathrm{SG}(n,k)) = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + 1.$$

A tételbeli egyenlőséghez az alsó becslést a 11. Tétel és az a tény szolgáltatja, hogy a Schrijver gráfok toplogikusan t-kromatikusak a kromatikus számukkal egyenlő t-re. A felső becslés bizonyítása kombinatorikus módszerrel történik. Ennek fő ötlete, hogy a gráfot úgy színezzük kromatikus számának megfelelő számú színnel, hogy mindazon csúcsok, amelyek túl sok (az összes felénél több) színt látnak, együttesen független szomszédsággal rendelkezzenek. Ekkor az összes ilyen szomszédság alkotta független halmaz kiszínezhető egyetlen új színnel, és ezzel az egy csúcs által látható színek maximális száma körülbelül a felére csökken. (Akkor mondjuk, hogy egy csúcs "lát" egy színt, ha az szerepel a szomszédainak színei között.)

Bizonyos, az előbbi feltételt teljesítő (az új szín bevezetése előtti) színezéseket *széles színezés*eknek hívunk. Nem minden G gráfnak van széles színezése $\chi(G)$ színnel. A Kneser gráfoknak például nincs, a Schrijver gráfoknak viszont a fenti tételben előírt paraméterek esetén van, és ez adja a felső korlátot.

Mivel $\mathrm{SG}(n,k)$ feszített részgráfja $\mathrm{SG}(n+1,k)$-nak, a 12. Tételből az is azonnal következik, hogy ha $t = n - 2k + 2$ rögzített páros szám és n, k kellően nagy, akkor

$$\psi(\mathrm{SG}(n,k)) \in \left\{\frac{t}{2} + 1, \frac{t}{2} + 2\right\}.$$

A Tardos Gáborral és Siniša Vrećicaval közös [82] dolgozatban beláttuk, hogy a felső korlát a pontos, vagyis a fenti feltételek mellett a

$$\psi(\mathrm{SG}(n,k)) = \frac{t}{2} + 2$$

egyenlőség teljesül.

A megfelelő paraméterű általánosított Mycielski gráfoknak szintén megadható kromatikus számuknak megfelelő számú színt használó széles színezésük, így rájuk is a fentihez hasonló eredmények kaphatók. Ez azt jelenti, hogy megfelelő gráfból kiindulva és megfelelő paraméterekkel iterálva az általánosított Mycielski konstrukciót, a lokális kromatikus szám iterációnként átlagosan 1/2-del nő. Ezzel kapcsolatban megemlítjük még, hogy a hagyományos Mycielski konstrukció viszont ugyanúgy 1-gyel növeli a lokális kromatikus számot, mint a kromatikus számot, ez szintén a [80] dolgozat egyik eredménye, melynek bizonyítśa kombinatorikus.

Cirkuláris színezés

Egy G gráf Vince [85] által bevezetett $\chi_c(G)$ cirkuláris kromatikus száma a következő módon definiálható.

Valamely p, q pozitív egészekre egy gráf (p,q)-színezésén a csúcsok olyan $c : V(G) \to [p]$ színezését értjük, amire igaz, hogy ha u és v szomszédos csúcsok, akkor $q \leq |c(u) - c(v)| \leq p - q$. G cirkuláris kromatikus száma a következő mennyiség:

$$\chi_c(G) = \inf\left\{\frac{p}{q} : \text{létezik } G\text{–nek } (p,q)\text{-színezése}\right\}.$$

A cirkuláris kromatikus számra mindig fennáll, hogy $\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leq \chi(G)$, ezért szokás a kromatikus szám egyfajta finomításának tekinteni. A cirkuláris kromatikus számot az utóbbi időben nagyon sokat vizsgálták, ld. pl. Zhu [87] összefoglaló cikkét, mely idézi az alábbi két sejtést.

Sejtés. (Johnson, Holroyd, Stahl [42]) *A* KG(n,k) *Kneser gráfra minden* $n \geq 2k$ *esetén fennáll, hogy*

$$\chi_c(\mathrm{KG}(n,k)) = \chi(\mathrm{KG}(n,k)).$$

Johnson, Holroyd és Stahl [42] belátták a sejtést a $k = 2$, valamint az $n = 2k + 1$, $n = 2k + 2$ esetekre. Schrijver gráfok cirkuláris kromatikus számát is vizsgálta Lih és Liu [53] valamint Hajiabolhassan és Zhu [40]. Utóbbi szerzők [40]-ban megmutatták, hogy minden k-hoz létezik olyan $n_0(k)$ küszöb, hogy $n \geq n_0(k)$ esetén $\chi_c(\mathrm{SG}(n,k)) = \chi(\mathrm{SG}(n,k))$, amiből az ilyen esetekben $\chi_c(\mathrm{KG}(n,k)) = \chi(\mathrm{KG}(n,k))$ is következik.

Sejtés. (Chang, Huang, Zhu [16]) *A* K_n *teljes gráfból a Mycielski konstrukció* d*-szeres alkalmazásával kapható* $M^d(K_n)$*-nel jelölt* $(n+d)$*-kromatikus gráfra* $n \geq d+2$ *esetén fennáll*

$$\chi_c(M^d(K_n)) = \chi(M^d(K_n)).$$

Chang, Huang és Zhu [16] a $d = 1, 2$ esetre belátták a sejtést, valamint megmutatták, hogy ha $\chi(G) = d + 1$, akkor a G gráfból a Mycielski konstrukció d-szeres alkalmazásával kapható $M^d(G)$ gráfra $\chi_c(M^d(G)) \leq \chi(M^d(G)) - 1/2$ igaz. Szintén a Mycielski gráfok cirkuláris kromatikus számát vizsgálta Fan [28] és Hajiabolhassan és Zhu [41]. Az utóbbi cikkben azt mutatták meg, hogy $n \geq d+2$ helyett $n \geq (2^d + 2)$-t írva már igaz a sejtés.

A Cikk-cakk tétel segítségével egyszerűen belátható a következő állítás, amely mindkét fenti sejtést igazolja azokban az esetekben, amikor a bennük szereplő gráf kromatikus száma páros. A Kneser és Schrijver gráfokra vonatkozó speciális esetet tőlünk függetlenül Frédéric Meunier [63] is bebizonyította.

13. Tétel. ([80]) *Ha* G *topologikusan* t*-kromatikus gráf és* t *páros, akkor* $\chi_c(G) \geq t$.

Következmény. (ld. Meunier [63] is) *A Johnson-Holroyd-Stahl sejtés igaz minden páros* n*-re. Páros* n*-re az erősebb*

$$\chi_c(\mathrm{SG}(n,k)) = \chi(\mathrm{SG}(n,k))$$

egyenlőség is fönnáll.

Következmény. *Ha* $n + d$ *páros, akkor* $\chi_c(M^d(K_n)) = \chi(M^d(K_n))$.

Megjegyezzük, hogy az előbbi Következmény erősebb formában is kimondható: K_n helyén számos más gráf (tetszőleges topologikusan n-kromatikus, n színnel jól színezhető gráf) is állhat és a Mycielski konstrukció helyett az általánosított Mycielski konstrukció is alkalmazható.

Lam, Lin, Gu és Song [52] megadott egy pontos formulát olyan gráfok cirkuláris kromatikus számára, melyek egy teljes gráfból az általánosított Mycielski konstrukció egyszeri alkalmazásával állnak elő. Eredményüket felhasználva megmutattuk, hogy a fenti, a Johnson-Holroyd-Stahl Sejtéssel kapcsolatos Következményben Schrijver gráfok esetén nem hagyható el a párossági feltétel.

14. Tétel. ([80]) *Minden $\varepsilon > 0$ és $t \geq 3$ páratlan szám esetén, ha $t = n - 2k + 2$ és $n \geq t^3/\varepsilon$, akkor fennáll*

$$1 - \varepsilon < \chi(\mathrm{SG}(n, k)) - \chi_c(\mathrm{SG}(n, k)) < 1.$$

Kneser jellegű gráfok tarka részgráfjai és nyakláncok kettéosztása

A lokális kromatikus számmal kapcsolatos eredményeink megmutatták, hogy egy topologikusan t-kromatikus gráf sok esetben kiszínezhető úgy $t + 1$ színnel, hogy benne a Cikk-cakk tétel által előírt $K_{\lceil \frac{t}{2} \rceil, \lfloor \frac{t}{2} \rfloor}$ részgráfok mellett ne forduljon elő más t csúcsú teljes páros részgráf, aminek minden csúcsa különböző színű. (Páratlan t esetén láttuk, hogy egy ilyen páros gráf mindkét oldalán legfeljebb $\lceil \frac{t}{2} \rceil$ csúcs lehet, különben a $\psi(G)$-re adott alsó becslés nem volna pontos. A felső becslést adó színezést kicsit közelebbről szemügyre véve adódik, hogy nem lehet mindkét oldalon ennyi csúcs.)

Ha nem használhatunk a kromatikus számnál több színt, akkor a helyzet drasztikusan megváltozik. Könnyen belátható, hogy tetszőleges t-kromatikus gráf t színnel való színezésében lesz (minden színosztályban) olyan csúcs, ami az összes sajátjától eltérő színt látja a szomszédságában. A Tardos Gáborral közös [81] dolgozatban megmutattuk, hogy topologikusan t-kromatikus gráfokra jóval több is igaz.

Az eredmény kimondása előtt megemlítjük még Csorba, Lange, Schurr és Waßmer [22] tételét, ami azt mondja ki, hogy egy a topologikus t-kromatikusságnál valamivel enyhébb feltételt teljesítő gráf részgráfként tartalmaz minden olyan $K_{\ell,m}$ teljes páros gráfot, amire $\ell + m = t$. Olyan topologikusan t-kromatikus gráfok esetén, melyek kromatikus száma pontosan t, az alábbi tétel általánosítja ezt az eredményt.

15. Tétel. ([81]) *Legyen G topologikusan t-kromatikus gráf, $\chi(G) = t$ és $c : V(G) \to [t]$ G-nek jó színezése. Legyen továbbá $A, B \subseteq [t]$ a színhalmaznak tetszőleges bipartíciója, vagyis $A \cup B = [t]$ és $A \cap B = \emptyset$.*

Ekkor van G-nek olyan $K_{\ell,m}$ teljes páros részgráfja, aminek minden csúcsa különböző színű, $\ell = |A|, m = |B|$, és az ℓ méretű oldalon az A-beli, az m méretű oldalon a B-beli színek szerepelnek.

A tétel bizonyításához a Borsuk-Ulam tételnek egy Tucker [84] és Bacon [5] nevéhez köthető általánosítását használjuk.

A 15. Tétel alkalmazható minden olyan gráfra, melyre a topologikus t-kromatikusságot definiáló topologikus paraméter éles becslést ad a kromatikus számra. Ilyenek például a Kneser, a Schrijver, a(z általánosított) Mycielski, valamint a Borsuk gráfok. Az itt bemutatott eredmények révén ez a lista kibővíthető néhány olyan gráffal, melyekről a fenti eredmények éppen azt mutatták meg, hogy a most felsorolt gráfok valamelyike éltartóan (azaz homomorf módon) beleképezhető.

Megemlítjük még a Tucker-Bacon tételnek egy másik, a [79] cikkben szereplő alkalmazását. Előbbi témáinkhoz ez nem a gráfok színezésén, hanem az alkalmazott technika rokonságán keresztül kapcsolódik.

Tekintsünk egy nyitott, tehát két véggel rendelkező nyakláncot, melyen k különféle drágakő példányai sorakoznak, mindegyik fajtából páros számú. Az alapprobléma az, hogy minimálisan hány helyen kell elvágnunk a nyakláncot ahhoz, hogy a keletkező darabokat két osztályba tudjuk osztani úgy, hogy minden drágakő fajtából ugyanannyi kerüljön mindkét osztályba. Goldberg és West [37] ismert tétele, hogy k vágás mindig elegendő, s könnyű belátni, hogy van a köveknek olyan elrendezése, amikor ennyi vágás kell is. (Ez a helyzet, ha az azonos fajtájú kövek egymás mellett vannak.) Alon és West [4] új bizonyítást adott az említett tételre a Borsuk-Ulam tétel egyszerű és elegáns alkalmazásával. Az ő módszerüket, s a Borsuk-Ulam tétel helyett a Tucker-Bacon tételt használva adódik az alábbi erősebb eredmény.

16. Tétel. ([79]) *Legyen adott egy nyitott nyaklánc, melyen k különböző fajtájú drágakő mindegyikéből páros számú található, az i-edikből $2a_i$ darab ($i = 1, \dots, k$). Ekkor vagy létezik a nyakláncnak k-nál kevesebb vágással történő kettéosztása úgy, hogy minden i-re mindkét osztályba az i-edik drágakőből pontosan a_i kerül, vagy ha nem, akkor teljesül viszont a következő. A kövek fajtáinak akárhogyan adjuk meg két diszjunkt $A, B \subseteq \{1, \dots, k\}$ részhalmazát, melyre $A \cup B \neq \emptyset$, létezik a nyakláncnak olyan, legfeljebb $k-1$ vágást igénylő kettéosztása, melynél minden i-re igaz, hogy pontosan akkor kerül az i-edik drágakőből az első osztályba a_i-nél több, ha $i \in A$, és pontosan akkor kerül belőle a_i-nél több a második osztályba, ha $i \in B$.*

Köszönetnyilvánítás

Sokaknak tartozom köszönettel, mert tanítottak, segítettek, figyelemmel követték a munkámat. Kandidátusi dolgozatom témavezetőjeként Körner János alapvetően alakította az érdeklődésemet. Számos tőle hallott szép probléma a mai napig meghatározó a munkámban. Sok-sok figyelmet és bátorítást köszönök Lovász Lászlónak, Simonovits Miklósnak és T. Sós Verának. Mindig bizalommal fordulhattam mások mellett Csiszár Imréhez, Győri Ervinhez, Katona Gyulához és Recski Andráshoz. Köszönöm Bárány Imre, Füredi Zoltán, Gyárfás András és Marton Katalin inspiráló érdeklődését egy-egy dolgozatom iránt. A közös munka élményét köszönöm minden társszerzőmnek, a még nem említettek közül külön is Sali Attilának és Tardos Gábornak. Végül köszönöm még számos név szerint nem említett kollégámnak azt a légkört, amiben mindig örömmel dolgozhattam.

Hivatkozások

[1] N. Alon, On the capacity of digraphs, *European J. Combin.*, **19** (1998), 1–5.

[2] N. Alon, P. Frankl, L. Lovász, The chromatic number of Kneser hypergraphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **298** (1986), 359–370.

[3] N. Alon, A. Orlitsky, Repeated communication and Ramsey graphs, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **41** (1995), 1276–1289.

[4] N. Alon, D. B. West, The Borsuk-Ulam theorem and bisection of necklaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **98** (1986), no. 4, 623–628.

[5] P. Bacon, Equivalent formulations of the Borsuk-Ulam theorem, *Canad. J. Math.*, **18** (1966), 492–502.

[6] I. Bárány, A short proof of Kneser's conjecture *J. Combin. Theory Ser. A*, **25** (1978), no. 3, 325–326.

[7] C. Berge, Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind, *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe*, **10** (1961), 114.

[8] C. Berge, Some classes of perfect graphs, in: *Six papers on graph theory*, Indian Statistical Institute, McMillan, Calcutta, 1963(?). (Az évszám bizonytalan, mert az eredeti kiadványon nincs dátum, de több forrás is ezt az évszámot valószínűsíti.)

[9] C. Berge, Sur une conjecture relative au problème des codes optimaux, In: Comm. 13ème assemblée générale de l'URSI, Tokyo, 1963.

[10] C. Berge, J. L. Ramírez-Alfonsín, Origins and genesis, in: *Perfect Graphs*, (Reed, Ramírez-Alfonsín eds.), John Wiley and Sons, Chichester, 2001, Chapter 1, 1–12.

[11] C. Berge, M. Simonovits, The coloring numbers of the direct product of two hypergraphs, in: *Hypergraph Seminar* (Proc. First Working Sem., Ohio State Univ., Columbus, Ohio, 1972; dedicated to Arnold Ross), Lecture Notes in Math., Vol. 411, Springer-Verlag, Berlin, 1974, 21–33.

[12] A. Björner, Topological methods, in: *Handbook of Combinatorics* (Graham, Grötschel, Lovász eds.), 1819–1872, Elsevier, Amsterdam, 1995.

[13] A. Blokhuis, On the Sperner capacity of the cyclic triangle, *J. Algebraic Combin.*, **2** (1993), 123–124.

[14] T. Bohman, R. Holzman, A nontrivial lower bound on the Shannon capacities of the complements of odd cycles, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **49** (2003), 721–722.

[15] R. Calderbank, P. Frankl, R. L. Graham, W. Li, L. Shepp, The Sperner capacity of the cyclic triangle for linear and non-linear codes, *J. Algebraic Combin.*, **2** (1993), 31–48.

[16] G. J. Chang, L. Huang, X. Zhu, Circular chromatic numbers of Mycielski's graphs, *Discrete Math.*, **205** (1999), 23–37.

[17] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. D. Seymour, R. Thomas, The Strong Perfect Graph Theorem, *Ann. of Math.*, **164** (2006), 51-229.

[18] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. D. Seymour, R. Thomas, Progress on perfect graphs, *Math. Program.* **97** (2003), no. 1-2, Ser. B, 405–422.

[19] G. Cohen, J. Körner, G. Simonyi, Zero-error capacities and very different sequences, in: *Sequences. Combinatorics, Security and Transmission,* papers presented at the Advanced International Workshop on Sequences, Positano, Italy, June 1988, Springer, New York, 1990, R. M. Capocelli (ed.), 144–155.

[20] I. Csiszár, J. Körner, On the capacity of the arbitrarily varying channel for maximum probability of error, *Z. Warsch. Verw. Gebiete*, **57** (1981), 87–101.

[21] I. Csiszár, J. Körner, L. Lovász, K. Marton, G. Simonyi, Entropy splitting for antiblocking corners and perfect graphs, *Combinatorica*, **10** (1990), 27–40.

[22] P. Csorba, C. Lange, I. Schurr, A. Waßmer, Box complexes, neighbourhood complexes, and chromatic number, *J. Combin. Theory Ser. A*, **108** (2004), 159-168, arXiv:math.CO/0310339.

[23] M. de Longueville, 25 years proof of the Kneser conjecture, *EMS-Newsletter*, **53** (2004), 16-19. (See also in German: 25 Jahre Beweis der Kneservermutung - Der Beginn der topologischen Kombinatorik, *DMV-Mitteilungen*, **4** (2003), 8-11.)

[24] Dol'nikov, V. L. Transversals of families of sets in $\mathbb{R}^n$ and a relationship between Helly and Borsuk theorems, (Russian) *Mat. Sb.*, **184** (1993), no. 5, 111–132; translation in *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **79** (1994), no. 1, 93–107.

[25] P. Erdős, Z. Füredi, A. Hajnal, P. Komjáth, V. Rödl, Á. Seress, Coloring graphs with locally few colors, *Discrete Math.*, **59** (1986), 21–34.

[26] P. Erdős, A. Hajnal, On chromatic graphs, (Hungarian), *Mat. Lapok*, **18** (1967), 1–4.

[27] P. Erdős, R. J. McEliece, H. Taylor, Ramsey bounds for graph products, *Pacific J. Math.*, **37** (1971), 45–46.

[28] G. Fan, Circular chromatic number and Mycielski graphs, *Combinatorica*, **24** (2004), 127–135.

[29] K. Fan, A generalization of Tucker's combinatorial lemma with topological applications, *Ann. of Math. (2)*, **56** (1952), no. 2, 431–437.

[30] K. Fan, Evenly distributed subsets of $\mathbb{S}^n$ and a combinatorial application, *Pacific J. Math.*, **98** (1982), no. 2, 323–325.

[31] M. L. Fredman, J. Komlós, On the size of separating systems and perfect hash functions, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, **5** (1984), 61–68.

[32] A. Galluccio, L. Gargano, J. Körner, G. Simonyi, Different capacities of a digraph, *Graphs Combin.*, **10** (1994), 105–121.

[33] L. Gargano, J. Körner, U. Vaccaro, Sperner theorems on directed graphs and qualitative independence, *J. Combin. Theory Ser. A*, **61** (1992), 173–192.

[34] L. Gargano, J. Körner, U. Vaccaro, Sperner capacities, *Graphs Combin.*, **9** (1993), 31–46

[35] L. Gargano, J. Körner, U. Vaccaro, Capacities: from information theory to extremal set theory, *J. Combin. Theory Ser. A*, **68** (1994), 296–316.

[36] S. Gerke, C. McDiarmid, Graph imperfection, *J. Combin. Theory Ser. B*, **83** (2001), 58–78.

[37] C. H. Goldberg, D. B. West, Bisection of circle colorings, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* **6** (1985), no. 1, 93–106.

[38] J. E. Greene, A new short proof of Kneser's conjecture, *Amer. Math. Monthly*, **109** (2002), no. 10, 918–920.

[39] A. Gyárfás, T. Jensen, M. Stiebitz, On graphs with strongly independent color-classes, *J. Graph Theory*, **46** (2004), 1–14.

[40] H. Hajiabolhassan, X. Zhu, Circular chromatic number of Kneser graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, **88** (2003), no. 2, 299–303.

[41] H. Hajiabolhassan, X. Zhu, Circular chromatic number and Mycielski construction, *J. Graph Theory*, **44** (2003), 106–115.

[42] A. Johnson, F. C. Holroyd, S. Stahl, Multichromatic numbers, star chromatic numbers and Kneser graphs, *J. Graph Theory*, **26** (1997), no. 3, 137–145.

[43] J. Kahn, J. H. Kim Entropy and sorting, *J. Comput. System Sci.*, **51** (1995), 390–399. (Preliminary version in: Proc. 24th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, 1992, 178-187.)

[44] J. Körner, Coding of an information source having ambiguous alphabet and the entropy of graphs, in: *Transactions of the 6th Prague Conference on Information Theory, etc.*, 1971, Academia, Prague, (1973), 411–425.

[45] J. Körner, Fredman-Komlós bounds and information theory *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, **7** (1986), 560–570.

[46] J. Körner, G. Longo, Two-step encoding of finite memoryless sources, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **19** (1973), 778-782.

[47] J. Körner, K. Marton, Graphs that split entropies, *SIAM J. Discrete Math.*, **1** (1988), 71–79.

[48] J. Körner, K. Marton, New bounds for perfect hashing via information theory, *European J. Combin.*, **9** (1988), 523–530.

[49] J. Körner, C. Pilotto, G. Simonyi, Local chromatic number and Sperner capacity, *J. Combin. Theory Ser. B*, **95** (2005), 101-117.

[50] J. Körner, G. Simonyi, A Sperner-type theorem and qualitative independence, *J. Combin. Theory Ser. A*, **59** (1992), 90–103.

[51] I. Kříž, Equivariant cohomology and lower bounds for chromatic numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **333** (1992), no. 2, 567–577; I. Kříž, A correction to: "Equivariant cohomology and lower bounds for chromatic numbers", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352** (2000), no. 4, 1951–1952.

[52] P. C. B. Lam, W. Lin, G. Gu, Z. Song, Circular chromatic number and a generalization of the construction of Mycielski, *J. Combin. Theory Ser. B*, **89** (2003), no. 2, 195–205.

[53] K-W. Lih, D. D-F. Liu, Circular chromatic numbers of some reduced Kneser graphs, *J. Graph Theory*, **41** (2002), no. 1, 62–68.

[54] L. Lovász, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, *Discrete Math.* **2** (1972), 253–267.

[55] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy, *J. Combin. Theory Ser. A*, **25** (1978), no. 3, 319–324.

[56] L. Lovász, On the Shannon capacity of a graph, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **25** (1979), 1–7.

[57] L. Lovász, Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **45** (1983), 317–323.

[58] K. Marton, On the Shannon capacity of probabilistic graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, **57** (1993), 183–195.

[59] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem, Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[60] J. Matoušek, G. M. Ziegler, Topological lower bounds for the chromatic number: A hierarchy, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, **106** (2004), no. 2, 71–90, arXiv:math.CO/0208072.

[61] C. McDiarmid, Graph imperfection and channel assignment, in: *Perfect Graphs* (J. L. Ramírez-Alfonsín, B. A. Reed eds.), John Wiley and Sons, Chichester, 2001, Chapter 10, 215–231.

[62] R. J. McEliece, E. C. Posner, Hide and seek, data storage, and entropy, *Ann. Math. Statist.*, **42** (1971), 1706–1716.

[63] F. Meunier, A topological lower bound for the circular chromatic number of Schrijver graphs, *J. Graph Theory*, **49** (2005), 257–261.

[64] J. Mycielski, Sur le coloriage des graphs, *Colloq. Math.*, **3** (1955), 161–162.

[65] J. Nayak and K. Rose, Graph capacities and zero-error transmission over compound channels, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **51** (2005), 4374–4378.

[66] J. Nešetřil, M. Rosenfeld: I. Schur, C. E. Shannon and Ramsey numbers, a short story; Combinatorics, graph theory, algorithms and applications, *Discrete Math.*, **229** (2001), no. 1-3, 185–195.

[67] I. Newman, P. Ragde, A. Wigderson, Perfect hashing, graph entropy and circuit complexity, *Proceedings of the fifth annual conference on structure in Complexity Theory*, 1990, 91–100.

[68] J. Radhakrishnan, $\Sigma\Pi\Sigma$ threshold formulas, *Combinatorica*, **14** (1994), 345–374.

[69] J. L. Ramírez-Alfonsín, B. A. Reed (eds.), *Perfect Graphs*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley and Sons, Chichester, 2001.

[70] A. Sali, G. Simonyi, Orientations of self-complementary graphs and the relation of Sperner and Shannon capacities, *European J. Combin.*, **20** (1999), 93–99.

[71] E. R. Scheinerman, D. H. Ullman, *Fractional Graph Theory*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley and Sons, Chichester, 1997.

[72] A. Schrijver, Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs, *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, **26** (1978), no. 3, 454–461.

[73] A. Schrijver, *Combinatorial optimization. Polyhedra and efficiency*, Algorithms and Combinatorics, 24, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[74] C. E. Shannon, The zero-error capacity of a noisy channel, *IRE Transactions on Information Theory*, **2** (1956), 8–19. (Reprinted in: *Key papers in the Development of Information Theory*, D. Slepian ed., IEEE Press, New York, 1974.)

[75] G. Simonyi, Entropy splitting hypergraphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, **66** (1996), 310–323.

[76] G. Simonyi: Graph entropy: a survey, in: *Combinatorial Optimization*, (W. Cook, L. Lovász, P. D. Seymour eds.), DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Volume 20, AMS, 1995, 399-441.

[77] G. Simonyi, Perfect Graphs and Graph Entropy. An Updated Survey, in: *Perfect Graphs* (J. L. Ramírez-Alfonsín, B. A. Reed eds.), John Wiley and Sons, Chichester, 2001, Chapter 13, 293–328.

[78] G. Simonyi, On Witsenhausen's zero-error rate for multiple sources, *IEEE Trans. Inform. Theory,* **49** (2003), 3258–3261.

[79] G. Simonyi, Necklace bisection with one cut less than needed, *Electron. J. Combin.*, 15 (2008), no. 1, Note 16.

[80] G. Simonyi, G. Tardos, Local chromatic number, Ky Fan's theorem, and circular colorings, to appear in *Combinatorica*, arXiv:math.CO/0407075.

[81] G. Simonyi, G. Tardos, Colorful subgraphs in Kneser-like graphs, to appear in *European J. Combin.*, arxiv:math.CO/0512019.

[82] G. Simonyi, G. Tardos, S. Vrećica, Local chromatic number and distinguishing the strength of topological obstructions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, közlésre elfogadva, arxiv:math.CO/0502452

[83] M. Stiebitz, Beiträge zur Theorie der färbungskritischen Graphen, Habilitation, TH Ilmenau, 1985.

[84] A. W. Tucker, Some topological properties of disk and sphere, *Proc. First Canadian Math. Congress, Montreal, 1945*, University of Toronto Press, Toronto, 1946, 285–309.

[85] A. Vince, Star chromatic number, *J. Graph Theory*, **12** (1988), no. 4, 551–559.

[86] H. S. Witsenhausen, The zero-error side-information problem and chromatic numbers, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **22** (1976), 592–593.

[87] X. Zhu, Circular chromatic number: a survey, *Discrete Math.*, **229** (2001), no. 1–3, 371–410.

A tézisek az alábbi dolgozatok felhasználásával készültek:

Gráfok entrópiái:

G. Simonyi, Entropy splitting hypergraphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, **66** (1996), 310–323.

G. Simonyi, Perfect Graphs and Graph Entropy. An Updated Survey, Chapter 13 in: *Perfect Graphs* (J. L. Ramírez-Alfonsín, B. A. Reed eds.), John Wiley and Sons, Chichester, 2001, 293–328.
(A felhasznált rész a 13.4.2 jelű, melynek alcíme "Imperfection ratio".)

G. Simonyi, On Witsenhausen's zero-error rate for multiple sources, *IEEE Trans. Inform. Theory,* **49** (2003), 3258–3261.

Gráfok kapacitásai:

A. Galluccio, L. Gargano, J. Körner, G. Simonyi, Different capacities of a digraph, *Graphs Combin.*, **10** (1994), 105–121.

A. Sali, G. Simonyi, Orientations of self-complementary graphs and the relation of Sperner and Shannon capacities, *European J. Combin.*, **20** (1999), 93–99.

J. Körner, C. Pilotto, G. Simonyi, Local chromatic number and Sperner capacity, *J. Combin. Theory Ser. B*, **95** (2005), 101-117.

Gráfok színezései:

G. Simonyi, G. Tardos, Local chromatic number, Ky Fan's theorem, and circular colorings, *Combinatorica*, 26 (2006), 587–626, arXiv:math.CO/0407075.

G. Simonyi, G. Tardos, Colorful subgraphs in Kneser-like graphs, *European J. Combin.*, 28 (2007), 2188-2200, arxiv:math.CO/0512019.

G. Simonyi, G. Tardos, S. Vrećica, Local chromatic number and distinguishing the strength of topological obstructions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, közlésre elfogadva, arxiv:math.CO/0502452

G. Simonyi, Necklace bisection with one cut less than needed, *Electron. J. Combin.*, 15 (2008), no. 1, Note 16.