Új konstrukciók a klasszikus invariánselméletben
PhD disszertáció tézisei

Frenkel Péter
Témavezetők: Domokos Mátyás és Szenes András
BMGE Matematika Intézet

2007. december 31.

1. Ortogonális vektor-invariánsok 2 karakterisztikában

1.1. Bevezetés

1.1.1. A fő eredmények

A disszertáció 1. része a Domokos Mátyással közös [DF1, DF2] cikkeken alapul. Szigorúan véve, csak ez a rész szól invariánselméletről, azaz egy bizonyos csoporthatásra nézve invariáns polinomok algebrájának szerkezetéről. Nevezetesen, azt mutatjuk meg, hogy az ortogonális csoport standard vektor-reprezentációja több példányának direkt összegén értelmezett invariáns polinomok 2 karakterisztikában teljesen másképp viselkednek, mint minden más esetben. Ennek következtében az egészek gyűrűje felett is nem-klasszikus viselkedést tapasztalunk.

Pontosabban, azon polinomok gyűrűjét vizsgáljuk, amelyek egy $n \times m$ méretű mátrix elemeitől függenek, és invariánsak a balról szorzással ható O_n, ill. SO_n csoportra. Nullkarakterisztikájú test felett e gyűrűk szerkezete (generátorok és definiáló relációk) mintegy száz éve ismert, elsősorban Hermann Weyl [W] munkájának köszönhetően. Az 1970-es években De Concini and Procesi [CP] megmutatták, hogy formálisan ugyanazok az eredmények igazak páratlan karakterisztikában is. Eredményeikre Richman [R] 1989-ben elemi bizonyítást adott. Az invariáns-gyűrű generátorai az O_n esetén másodfokúak, az SO_n esetén másod- és n-edfokúak.

A disszertáció 1.4.2., 1.4.5. és 1.4.8. tételeiben megmutatjuk, hogy a 2 karakterisztika esete teljesen másképp viselkedik: rögzített $n \geq 3$ és nagy m esetén tetszőlegesen magas fokú felbonthatatlan invariáns polinomok is megjelennek.

Hasonló jelenség lép fel $\mathbb{Z}$ felett is. Az ortogonális csoportot egy egész együtthatós, nemelfajuló kvadratikus alak stabilizátoraként definiáljuk. Ha a szokásos kvadratikus alakból (négyzetösszeg) indulunk ki, akkor De Concini és Procesi [CP] eredményei érvényesek („alacsony” fokú generátorok). Ha viszont páros $n = 2r$ dimenzió esetén az $x_1y_1 + \cdots + x_ry_r$, páratlan $n = 2r+1$ dimenzió esetén az $x_1y_1+\cdots+x_ry_r+z^2$ kvadratikus alakból indulunk ki (tehát a legegyszerűbb olyan kvadratikus alakból, amely minden karakterisztikában nemelfajuló), akkor a mi eredményünk („magas” fokú felbonthatatlan invariánsok létezése) érvényes. Ez a disszertáció 1.4.3., 1.4.6. és 1.4.9. korolláriumának állítása.

Másrészt megmutatjuk, hogy az invariáns racionális függvények 2 karakterisztikában is a megszokotthoz hasonlóan viselkednek. Ugyanez áll az invariáns polinomokra is, ha $m \leq n$. Minden n-re és m-re belátjuk, hogy az invariáns polinomok gyűrűje végesen generált modulus a másodfokú invariánsok generálta részalgebra felett.

1.1.2. Az ortogonális csoport

Legyen $\mathbb{F}$ algebrailag zárt test. Legyen $n > 0$ egész. Az $\mathbb{F}^n$ vektortérben a koordinátákat $x_1, y_1, \ldots, x_r, y_r$ jelöli, ha $n = 2r$, és $x_1, y_1, \ldots, x_r, y_r, z$ jelöli, ha $n = 2r+1$. Az n-változós *standard kvadratikus forma*:

$$\begin{aligned} q &= x_1y_1 + \cdots + x_ry_r && \text{ha } n = 2r, \\ q &= x_1y_1 + \cdots + x_ry_r + z^2 && \text{ha } n = 2r+1. \end{aligned}$$

Az $\mathrm{O}_n(\mathbb{F})$ csoport az $\mathbb{F}^n$ tér azon lineáris izomorfizmusaiból áll, amelyek invariánsan hagyják a q formát. Az $\mathrm{O}_n(\mathbb{F})$ csoport Zariski-zárt részvarietása az $M_n(\mathbb{F})$ mátrixgyűrűnek. Az $\mathrm{O}_n(\mathbb{F})$ minden elemének determinánsa ± 1. Az $\mathrm{SO}_n(\mathbb{F})$ csoportot az $\mathrm{O}_n(\mathbb{F})$ egységkomponenseként definiáljuk.

Az $\mathrm{O}_n(\mathbb{F})$ csoportot generálják a tükrözések. Az $\mathrm{SO}_n(\mathbb{F})$ csoport pontosan azon lineáris transzformációkból áll, amelyek előállnak páros sok tükrözés szorzataként [F0, T].

1.1.3. Invariánsok

Legyen $\mathbb{F}$ algebrailag zárt test. Tekintsük az $R = \mathbb{F}[n \times m]$ polinomgyűrűt $n \times m$ változóban. A változókat egy $n \times m$ méretű V mátrixba rendezzük el. A V oszlopai n–dimenziós vektorok: $v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}$. Az R egy tipikus eleme:

$$f(V) = f\left(v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}\right).$$

Legyen R^G a $G = \mathrm{O}_n(\mathbb{F})$ vagy a $G = \mathrm{SO}_n(\mathbb{F})$ csoportra invariáns polinomok alkotta részalgebra, ahol minden $g \in G$ a balról szorzással hat az $n \times m$ méretű mátrixokon (azaz lineáris helyettesítéssel hat az oszlopvektorokon):

$$g : V = \left(v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}\right) \mapsto gV = \left(gv^{(1)}, \ldots, gv^{(m)}\right).$$

Explicite,

$$R^G = \{f(V) \in R \mid f(gV) = f(V) \quad (g \in G)\}.$$

Tekintsük az R alábbi kitüntetett elemeit. Legyen

$$(kk) = (kk)_n = q\left(v^{(k)}\right) \qquad (1 \leq k \leq m)$$

és

$$(kl) = (kl)_n = \beta\left(v^{(k)}, v^{(l)}\right) \qquad (1 \leq k \leq m, \quad 1 \leq l \leq m, \quad k \neq l).$$

Explicite, ha $n = 2r$, akkor

$$(kl) = x_1^{(k)} y_1^{(l)} + y_1^{(k)} x_1^{(l)} + \cdots + x_r^{(k)} y_r^{(l)} + y_r^{(k)} x_r^{(l)} \qquad (k \neq l),$$

míg ha $n = 2r + 1$, akkor

$$(kl) = x_1^{(k)} y_1^{(l)} + y_1^{(k)} x_1^{(l)} + \cdots + x_r^{(k)} y_r^{(l)} + y_r^{(k)} x_r^{(l)} + 2z^{(k)} z^{(l)} \qquad (k \neq l).$$

Legyen

$$[i_1, \ldots, i_n] = \det \left[v^{(i_1)}, \ldots, v^{(i_n)} \right].$$

A (kl) polinomok ortogonális invariánsok, a $[i_1, \ldots, i_n]$ polinomok speciális ortogonális invariánsok.

Az invariáselmélet klasszikus „első alaptétele" szerint nullkarakterisztikájú $\mathbb{F}$ esetén az $\mathbb{F}[n \times m]^{\mathrm{O}_n(\mathbb{F})}$ algebrát generálják a (kl) alakú, az $\mathbb{F}[n \times m]^{\mathrm{SO}_n(\mathbb{F})}$ algebrát pedig a (kl) alakú és az $[i_1, \ldots, i_n]$ alakú elemek. Ezt részletesen tárgyalja (a többi klasszikus csoportra vonatkozó hasonló eredménnyel együtt) Hermann Weyl könyve [W2]. De Concini és Procesi [CP] karakterisztikamentesen tárgyalták a témát, és belátták, hogy a (speciális) ortogonális csoportra vonatkozó első alaptétel igaz páratlan karakterisztikában is. A 2 karakterisztikájú esetben Richman [Ri] belátta, hogy az $x_1^{(1)} x_1^{(2)} + \cdots + x_n^{(1)} x_n^{(2)}$ bilineáris forma stabilizátoraként definiált csoport invariánsainak algebrája első- és másodfokú elemekkel generálható. Csakhogy 2 karakterisztikában ez nem az ortogonális csoport: invariánsan hagyja ugyan az $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ kvadratikus formát, de ez 2 karakterisztikában egy lineáris forma négyzete, tehát elfajuló kvadratikus alak. Így 2 karakterisztikában az ortogonális csoport vektorinvariánsainak struktúrája nem ismeretes. Látni fogjuk, hogy a racionális O_n–invariánsok teste 2 karakterisztikában is generálható kézenfekvő alacsony fokú elemekkel, de az invariáns polinomok viselkedése lényegesen eltér a megszokottól.

1.2. Felbonthatatlan invariánsok konstrukciója

Ebben a fejezetben explicite konstruálunk felbonthatatlan m-lineáris invariáns polinomokat minden lehetséges m értékre. A konstrukció azon antiszimmetrikus mátrix Pfaff-féle polinomjának vizsgálatán alapul, amelyben az átló felett a vektorváltozók skaláris szorzatai állnak. Megállapítjuk a konstruált invariánsok néhány fontos tulajdonságát, amelyek a felbonthatatlanság bizonyításának alapjául szolgálnak majd az 1.4. fejezetben.

1.3. A pályák szétválasztása

Ebben a fejezetben olyan eredményeket tárgyalunk, amelyek 2 karakterisztikában is ugyanúgy érvényesek, mint máskor. Tehát e fejezet tételei minden algebrailag zárt $\mathbb{F}$ test felett igazak, de többségük jól ismert, ha $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$. Az érdekes eredmény az, hogy 2 karakterisztikában is igazak. A bizonyítások alapja Witt tétele [T, Theorem 7.4], valamint néhány alaptény a reduktív csoportok elméletéből és az affin algebrai geometriából.

1.3.1. A nullkúp

Az $\mathbb{F}[n \times m]$ polinomalgebra egy fokszámozott részalgebrájához tartozó nullkúp a pozitív fokú homogén elemek közös nullhelyeinek halmaza.

1.3.1. tétel. *A (speciális) ortogonális vektor-invariánsok algebrájához tartozó nullkúpot már a másodfokú invariáns polinomok definiálják.*

1.3.2. korollárium. *A (speciális) ortogonális vektor-invariánsok algebrája véges modulus a másodfokú invariáns polinomok generálta részalgebra felett.*

1.3.2. Algebro-geometriai lemmák

Ebben az alfejezetben nincs saját eredmény. Néhány jól ismert algebro-geometriai tényt gyűjtünk össze, amelyekre szükség lesz a következő alfejezetben.

1.3.3. Racionális invariánsok

Legyen $G = \mathrm{SO}_n(\mathbb{F})$ vagy $G = \mathrm{O}_n(\mathbb{F})$. Legyen $K = \mathbb{F}(n \times m)$ az $R = \mathbb{F}[n \times m]$ hányadosteste. A K elemei az $n \times m$ változós racionális függvények. Az invariáns racionális függvényeket az invariáns polinomokhoz hasonlóan definiáljuk.

Ebben az alfejezetben az invariáns racionális függvények K^G testét vizsgáljuk. A K^G az R^G hányadosteste.

1.3.3. tétel. *A (speciális) ortogonális racionális vektor-invariánsok teste tisztán transzcendens $\mathbb{F}$ felett.*

A disszertációban explicit transzcendencia-bázisokat adunk meg, amelyekben a maximális fokszám független a vektorváltozók m számától.

1.3.4. Az $m \leq n$ eset

Ebben az alfejezetben generátorok és definiáló relációk segítségével leírjuk az $\mathbb{F}[n \times m]^{\mathrm{SO}}$ és $\mathbb{F}[n \times m]^{\mathrm{O}}$ algebrákat, ha $m \leq n$. Ezek viselkedése 2 karakterisztikában lényegében olyan, mint máskor, azaz nincsenek „egzotikus" invariáns polinomok, ha $m \leq n$. Ez a disszertáció 1.3.16., 1.3.17. és 1.3.18. tételeinek állítása.

1.4. A felbonthatatlanság igazolása

Ebben a fejezetben válik teljessé az 1. rész fő eredménye: az 1.2 fejezetben konstruált magas fokú invariáns polinomokról megmutatjuk, hogy felbonthatatlanok.

1.5. Az ortogonális csoportséma

Definiáljuk az ortogonális csoportsémát és megmutatjuk, hogy invariánsai ugyanazok, mint a korábbi fejezetekben tárgyalt, elemi módon definiált invariánsok.

2. Klasszikus csoportok karakterformulái

2.1. Bevezetés

Ez a rész lényegében azonos az [F1] cikkel. Olyan formulákat adunk meg, amelyek egy G klasszikus csoport egy irreducibilis karakterének $\chi_\lambda(g)$ értékét a $g \in G$ mátrix hatványainak elemeivel hozzák kapcsolatba. Ez messzemenően általánosítja J. L. Cisneros-Molina egy eredményét, amely a GL_2 csoportra vonatkozott [C].

A Weyl-féle karakterformula [FH, GW, W1, W2] azt mondja meg, hogyan lehet egy (komplex, féligegyszerű, összefüggő) G Lie-csoportnak a V_λ irreducibilis reprezentációhoz tartozó χ_λ karakterét kiszámolni. Ha G egy klasszikus mátrixcsoport, akkor a Weyl-féle karakterformula a χ_λ karakter $g \in G$ helyen felvett értékét a g mátrix sajátértékeivel fejezi ki.

A disszertációban az összefüggő klasszikus csoportokkal foglalkozunk, és a Weyl-féle karakterformula olyan változatait bizonyítjuk, amelyek a $\chi_\lambda(g)$ értéket a g hatványainak elemeivel fejezik ki explicite megadott racionális függvényként, sok különböző módon. Valószínűnek tűnik, hogy e formulák adják a leggyorsabb és legegyszerűbb módot $\chi_\lambda(g)$ kiszámítására általános g esetén.

A komplex számok $\mathbb{C}$ teste felett dolgozunk. Az alábbi klasszikus csoportokkal foglalkozunk.

- A $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ általános lineáris csoport. Ennek elemei az $n \times n$ méretű invertálható mátrixok. Ezt a csoportot a disszertáció 2.2. fejezetében tárgyaljuk.

- Az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ speciális lineáris csoport. Elemei az $n \times n$ méretű 1 determinánsú mátrixok. Ezt a csoportot a disszertáció 2.3. fejezetében tárgyaljuk.

- Az $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ speciális ortogonális csoport. Elemei azok az $n \times n$ méretű 1 determinánsú mátrixok, amelyek invariánsan hagyják a standard nem-elfajuló kvadratikus formát. Ezt a csoportot a disszertáció 2.4. és 2.6. fejezetében tárgyaljuk.

- Az $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$ szimplektikus csoport. Elemei azok a $2r \times 2r$ méretű mátrixok, amelyek invariánsan hagyják a standard szimplektikus formát. Ezt a csoportot a disszertáció 2.5. fejezetében tárgyaljuk.

Legyen $M_n(\mathbb{C})$ a komplex $n \times n$ méretű mátrixok tere.

2.2. Az általános lineáris csoport

Legyen $G = \mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{C})$, s benne $H = (\mathbb{C}^*)^{r+1}$ az átlós mátrixok alkotta maximális tórusz. Legyen $\mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}^{r+1}$ a súlyrács. Ha $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$, legyen $z^\lambda : H \to \mathbb{C}^*$ a H megfelelő karaktere. Ha λ domináns, azaz $\lambda_0 \geq \cdots \geq \lambda_r$, legyen $\chi_\lambda : G \to \mathbb{C}$ a λ legmagasabb súlyú irreducibilis reprezentáció karaktere.

2.2.1. tétel. *Legyen* $\lambda = (\lambda_0 \geq \cdots \geq \lambda_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$ *és* $g \in \mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{C})$. *Ekkor*

$$\bigwedge_{i=0}^{r} g^{\lambda_i + r - i} = \chi_\lambda(g) \cdot \bigwedge_{i=0}^{r} g^{r-i}.$$

Ha $\lambda_r \geq 0$, akkor a tétel igaz nem feltétlenül invertálható $g \in M_{r+1}(\mathbb{C})$ mátrixra is.

2.2.2. korollárium. *Legyen Ω alternáló $(r+1)$-lineáris forma a $M_{r+1}(\mathbb{C})$ téren. Legyen $\lambda = (\lambda_0 \geq \cdots \geq \lambda_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$, ekkor*

$$\Omega\left(g^{\lambda_0+r}, g^{\lambda_1+r-1}, \ldots, g^{\lambda_r}\right) = \chi_\lambda(g) \cdot \Omega\left(g^r, g^{r-1}, \ldots, \mathbf{1}\right).$$

Ha $\chi_\lambda(g)$ értékét g hatványainak elemeivel akarjuk kifejezni, akkor olyan Ω-ra van szükségünk, amellyel a fenti jobb oldal nem azonosan nulla. Például $\Omega(g_0, \ldots, g_r)$ lehet azon mátrix determinánsa, melyet a g_i-k átlói, vagy első sorai, stb. alkotnak.

2.2.3. korollárium. *Az $M_{r+1}(\mathbb{C})$ téren tekintsünk egy olyan alternáló r-lineáris ω formát, amely eltűnik, ha egy argumentuma az egységmátrix. Ekkor, ha λ olyan, mint az előző korolláriumban, és $\lambda_r = 0$, akkor*

$$\omega\left(g^{\lambda_0+r}, g^{\lambda_1+r-1}, \ldots, g^{\lambda_{r-1}+1}\right) = \chi_\lambda(g) \cdot \omega\left(g^r, g^{r-1}, \ldots, g\right).$$

Ha $\chi_\lambda(g)$ értékét g hatványainak elemeivel akarjuk kifejezni, olyan ω-ra van szükség, mellyel a fenti jobb oldal nem azonosan nulla. Például $\omega(g_0, \ldots, g_{r-1})$ lehet azon $r \times r$ méretű mátrix determinánsa, melyet a g_i-k első elemtől megfosztott első sorai alkotnak.

A 2.2.3 korollárium $r = 1$ esete éppen J. L. Cisneros-Molinának a bevezetőben említett eredménye [C].

2.3. Speciális lineáris csoport

Legyen $G = \mathrm{SL}_{r+1}(\mathbb{C})$ s benne $H \simeq (\mathbb{C}^*)^r$ az a maximális tórusz, mely az 1 determinánsú átlós mátrixokból áll. Legyen $\mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}^{r+1}/\mathbb{Z}$ a súlyrács. Legyen

$$\rho = (r, r-1, \ldots, 0) + \mathbb{Z} \cdot (1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^{r+1}/\mathbb{Z}$$

a pozitív gyökök összegének fele. Ha $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}/\mathbb{Z}$, legyen $z^\lambda : H \to \mathbb{C}^*$ a H megfelelő karaktere. Ha λ domináns, legyen $\chi_\lambda : G \to \mathbb{C}$ a λ legmagasabb súlyú irreducibilis reprezentáció karaktere.

Ha $\ell \in \mathbb{Z}^{r+1}/\mathbb{Z}$ és $g \in G$, akkor az

$$\bigwedge_{i=0}^{r} g^{\ell_i} \in M_{r+1}(\mathbb{C})^{\wedge(r+1)}$$

antiszimmetrikus tenzor jóldefiniált.

2.3.1. tétel. *Legyen $\lambda = (\lambda_0 \geq \cdots \geq \lambda_r) + \mathbb{Z} \cdot (1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^{r+1}/\mathbb{Z}$ és $g \in \mathrm{SL}_{r+1}(\mathbb{C})$. Ekkor*

$$\bigwedge_{i=0}^{r} g^{\ell_i} = \chi_\lambda(g) \cdot \bigwedge_{i=0}^{r} g^{r-i},$$

ahol $\ell_i = \lambda_i + r - i$.

2.4. Páratlan speciális ortogonális csoport

Legyen $G = \mathrm{SO}_{2r+1}(\mathbb{C})$ az

$$x_1y_1 + \cdots + x_ry_r + z^2$$

kvadratikus formát invariánsan hagyó lineáris transzformációk csoportjának egységkomponense, s benne $H = (\mathbb{C}^*)^r$ az a maximális tórusz, amely a

$$\mathrm{diag}\left(z_1, z_1^{-1}, \ldots, z_r, z_r^{-1}, 1\right)$$

alakú mátrixokból áll. A $\mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}^r$ súlyrácsban a $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ súly a

$$z^\lambda = \prod_{j=1}^r z_j^{\lambda_j}$$

Laurent-monomnak felel meg. Legyen

$$\rho = (r - 1/2, r - 3/2, \ldots, 3/2, 1/2)$$

a pozitív gyökök fél-összege.

2.4.1. tétel. *Legyen $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ és $g \in \mathrm{SO}_{2r+1}(\mathbb{C})$. Ekkor*

$$\bigwedge_{i=1}^r \left(g^{\ell_i} - g^{-\ell_i}\right) = \chi_\lambda(g) \cdot \bigwedge_{i=1}^r \left(g^{r+1/2-i} - g^{-(r+1/2-i)}\right),$$

ahol $\ell = \lambda + \rho$, azaz $\ell_i = \lambda_i + r + 1/2 - i$, és a hatványokat $\sqrt{g} \in \mathrm{SO}_{2r+1}(\mathbb{C})$ bármely, de mindig ugyanazon értékével definiáljuk.

2.5. Szimplektikus csoport

Legyen $G = \mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$ a

$$\sum_{i=1}^r \left(x_i'y_i'' - y_i'x_i''\right)$$

$\mathbb{C}^{2r}$ téren értelmezett alternáló bilineáris forma stabilizátora, s benne $H = (\mathbb{C}^*)^r$ az a maximális tórusz, mely a

$$\mathrm{diag}\left(z_1, z_1^{-1}, \ldots, z_r, z_r^{-1}\right)$$

alakú mátrixokból áll. A $\mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}^r$ súlyrácsban $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ a

$$z^\lambda = \prod_{j=1}^r z_j^{\lambda_j}$$

Laurent-monomnak felel meg. Legyen $\rho = (r, r-1, \ldots, 1)$ a pozitív gyökök összegének fele.

2.5.1. tétel. *Legyen $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ és $g \in \mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$. Ekkor*

$$\bigwedge_{i=1}^r \left(g^{\ell_i} - g^{-\ell_i}\right) = \chi_\lambda(g) \cdot \bigwedge_{i=1}^r \left(g^{r+1-i} - g^{-(r+1-i)}\right),$$

ahol $\ell = \lambda + \rho$, azaz $\ell_i = \lambda_i + r + 1 - i$.

2.6. Páros speciális ortogonális csoport

Legyen $G = \mathrm{SO}_{2r}(\mathbb{C})$ a

$$q = x_1 y_1 + \cdots + x_r y_r$$

kvadratikus formát invariánsan hagyó lineáris transzformációk csoportjának egységkomponense, s benne $H = (\mathbb{C}^*)^r$ az a maximális tórusz, mely a

$$\mathrm{diag}\left(z_1, z_1^{-1}, \ldots, z_r, z_r^{-1}\right)$$

mátrixokból áll. A $\mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}^r$ súlyrácsban $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ a

$$z^\lambda = \prod_{j=1}^{r} z_j^{\lambda_j}$$

Laurent-monomnak felel meg. Legyen $\rho = (r-1, r-2, \ldots, 1, 0)$ a pozitív gyökök félösszege. Legyen

$$\epsilon = (1, 1, \ldots, 1, 1)$$

és

$$e = \epsilon + \rho = (r, r-1, \ldots, 2, 1).$$

2.6.1. tétel. *Legyen* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r$, *ahol* $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{r-1} \geq |\lambda_r|$. *Legyen*

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}, -\lambda_r).$$

Legyen $g \in \mathrm{SO}_{2r}(\mathbb{C})$. *Ekkor*

$$2 \bigwedge_{i=1}^{r} \left(g^{\ell_i} + g^{-\ell_i}\right) = (\chi_\lambda + \chi_{\bar{\lambda}})(g) \cdot \bigwedge_{i=1}^{r} \left(g^{r-i} + g^{-(r-i)}\right).$$

Továbbá,

$$\sqrt{-1}^r \mathrm{pf}_q\left(g - g^{-1}\right) \cdot \bigwedge_{i=1}^{r} \left(g^{\ell_i} - g^{-\ell_i}\right) =$$

$$= (\chi_\lambda - \chi_{\bar{\lambda}})(g) \cdot \bigwedge_{i=1}^{r} \left(g^{r+1-i} - g^{-(r+1-i)}\right).$$

Mindenütt $\ell = \lambda + \rho$, *azaz* $\ell_i = \lambda_i + r - i$.

Itt a

$$g - g^{-1} \in \mathfrak{so}_{2r}(\mathbb{C})$$

lineáris transzformáció q-ra vonatkozó Pfaff-féle formája a determináns négyzetgyöke. Ezt definiálhatjuk úgy, hogy kiszámítjuk a lineáris transzformáció mátrixát egy pozitív irányítású rendezett q–ortonormált bázisra nézve, és vesszük e mátrix Pfaff-féle polinomját. A $\left(2\sqrt{-1}\right)^r$ determinánsú q-ortonormált bázisokat tekintjük pozitív irányításúnak, a $-\left(2\sqrt{-1}\right)^r$ determinánsúakat pedig negatív irányításúnak.

3. Egyenlőtlenségek pozitív szemi-definit mátrixokra

3.1. Bevezetés

A disszertáció harmadik fejezete az [F2] cikken alapul. Fő motivációja Benítez, Sarantopoulos és Tonge [BST] (1998) alábbi kérdése. Legyenek $f_1, \ldots, f_n$ 1 normájú lineáris funkcionálok egy euklideszi vektortéren. Mindig fennáll-e az

$$||f_1 \cdots f_n|| \geq n^{-n/2} \tag{1}$$

alsó becslés a pontonkénti szorzat normájára?

A komplex esetben Arias-de-Reyna [A] 1998-ban igazolta az igenlő választ, felhasználva egy a kvantumtérelméletből ismert Wick-féle formula komplex változatát [A, B2, G], valamint Lieb egyenlőtlenségét pozitív szemi-definit mátrixok permanenseire.

A valós esetben megoldatlan kérdés, hogy igaz-e mindig az (1) egyenlőtlenség. Pappas és Révész [PR] 2004-ben belátták az igenlő választ, ha $n \leq 5$. Általános n-re a szerző [F2] cikke előtt ismert legjobb becslés Révész és Sarantopoulos [RS] 2004-es cikkében található; eszerint (1) bal oldala legalább $2 \cdot (2n)^{-n/2}$. A kérdéskört pl. a [Mat1, Mat2, MM, R] cikkek tárgyalják.

A disszertáció 3.3.4. tételében az említett Lieb-féle permanentális egyenlőtlenség egy hafniánokra vonatkozó analogonját igazoljuk: ha A valós, szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix, akkor

$$\operatorname{haf} \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \geq \operatorname{per} A \tag{2}$$

(a 3.3.4. tétel valójában ennél általánosabb). A Wick formula felhasználásával ((3.11) formula a disszertációban) a fenti egyenlőtlenséget együttesen normális valószínűségi változók szorzata második monentumának (3.4.1. tétel), majd valós lineáris funkcionálok szorzata normájának (3.4.3. tétel) alsó becsléséhez használjuk fel. Az eredmény:

$$||f_1 \cdots f_n|| \geq \left(\frac{3\sqrt{3}}{e} n \right)^{-n/2}. \tag{3}$$

Ez exponenciális faktorral javítja az [RS] cikkbeli becslést.

A 3.3.5. sejtésben egy a (2) egyenlőtlenségnél általánosabb egyenlőtlenséget mondok ki, amelyből következnék az (1) egyenlőtlenség.

3.2. Történeti előzmények

Az $m \times m$ méretű $C = (c_{i,j})$ mátrix determinánsát és permanensét a

$$\det C = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_m} (-1)^\pi \prod_{i=1}^m c_{i,\pi(i)}, \qquad \operatorname{per} C = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_m} \prod_{i=1}^m c_{i,\pi(i)}$$

képletekkel definiáljuk, ahol $\mathfrak{S}_m$ az m-edfokú szimmetrikus csoport. A disszertáció 3.2. fejezetében pozitív szemi-definit mátrixok determinánsára, illetve permanensére vonatkozó klasszikus egyenlőtlenségeket gyűjtöttem össze. Például, ha

$$C = \begin{pmatrix} B' & A \\ A^* & B'' \end{pmatrix} \geq 0,$$

akkor Lieb [L] egyenlőtlensége szerint

$$\mathrm{per}\, C \geq \mathrm{per}\, B' \cdot \mathrm{per}\, B''.$$

A disszertációban ehhez az alábbi egyszerű észrevételt fűztem.

3.2.1. Megjegyzés. A Lieb-egyenlőtlenségben azt a feltételt, hogy C pozitív szemi-definit, helyettesíthetjük azzal a gyengébb feltétellel, hogy a B' és B'' átlós blokkok mindegyike pozitív szemi-definit. Az ismert bizonyítás szinte szó szerint átvihető.

3.3. Új egyenlőtlenségek

3.3.1. A Pfaff-polinom

A $2n \times 2n$ méretű $C = (c_{i,j})$ mátrix Pfaff-polinomját a

$$\mathrm{pf}\, C = \frac{1}{n!2^n} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{2n}} (-1)^\pi c_{\pi(1),\pi(2)} \cdots c_{\pi(2n-1),\pi(2n)}$$

képlettel definiáljuk. Ha C antiszimmetrikus, akkor $(\mathrm{pf}\, C)^2 = \det C$.

Ha A és B $n \times n$ méretű mátrixok, akkor tekintsük a

$$(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathrm{pf} \begin{pmatrix} -\lambda A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \sum_{t=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} p_t \lambda^t$$

polinomot.

3.3.1. tétel. *Legyenek A és B valós $n \times n$ méretű mátrixok. Legyen A antiszimmetrikus és B szimmetrikus. Ha B pozitív szemi-definit, akkor $p_t \geq 0$ minden t indexre. Ha B pozitív definit, akkor $p_t > 0$ minden $t \leq (\mathrm{rk}\, A)/2$ indexre és $p_t = 0$ minden $t > (\mathrm{rk}\, A)/2$ indexre.*

3.3.2. tétel. *Legyenek A és B valós $n \times n$ méretű mátrixok, ahol A anti-szimmetrikus és B szimmetrikus. Legyen $\lambda \geq 0$. Ha B pozitív szemi-definit, akkor*

$$(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathrm{pf} \begin{pmatrix} -\lambda A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq \det B + \lambda^{n/2} \det A.$$

Ha B pozitív definit, akkor a fenti egyenlőtlenségben az egyenlőség szükséges és elegendő feltétele, hogy $\lambda A = 0$ vagy $n = 2$ legyen.

3.3.2. A hafnián

A $2n \times 2n$ méretű $C = (c_{i,j})$ mátrix hafniánját a

$$\text{haf } C = \frac{1}{n!2^n} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{2n}} c_{\pi(1),\pi(2)} \cdots c_{\pi(2n-1),\pi(2n)}$$

képlettel definiáljuk. Ha A és B $n \times n$ méretűek, tekintsük a

$$\text{haf} \begin{pmatrix} \lambda A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \sum_{t=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} h_t \lambda^t$$

polinomot.

3.3.3. tétel. *Legyenek A és B valós, szimmetrikus $n \times n$ mátrixok. Ha B pozitív szemi-definit, akkor $h_t \geq 0$ minden t indexre. Ha B pozitív definit, akkor $h_t = 0$ szükséges és elegendő feltétele az, hogy A minden $2t \times 2t$ méretű átlós részmátrixának hafniánja eltűnjék.*

3.3.4. tétel. *Legyenek A és B valós, szimmetrikus $n \times n$ méretű mátrixok. Legyen $\lambda \geq 0$. Ha B pozitív szemi-definit, akkor*

$$\text{haf} \begin{pmatrix} \lambda A & B \\ B & A \end{pmatrix} \geq \text{per } B + \lambda^{n/2} (\text{haf } A)^2.$$

Ha B pozitív definit, akkor a fenti egyenlőtlenségben az egyenlőség szükséges és elegendő feltétele az, hogy λA diagonális mátrix legyen, vagy $n = 2$ legyen.

(Páratlan n esetén a haf $A = 0$ konvenciót fogadjuk el.)

3.3.5. Sejtés. *Ha $A = (a_{i,j})$ pozitív szemi-definit, szimmetrikus, valós $n \times n$ méretű mátrix, akkor a $2pn \times 2pn$ méretű, $2p \times 2p$ darab A blokkból álló mátrix hafniánja legalább*

$$(2p-1)!!^n \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}^p,$$

s az egyenlőség szükséges és elegendő feltétele az, hogy A-nak legyen csupa nulla sora vagy átlós mátrix legyen.

3.4. Valós lineáris funkcionálok szorzata

Ebben a fejezetben a 3.3.4 tételt együttesen normális változók szorzatának, majd valós lineáris funkcionálok szorzatának vizsgálatára alkalmazzuk. Az utóbbi volt a disszertáció 3. részének fő motivációja. A felhasznált módszerek hasonlóak azokhoz, amelyeket Arias-de-Reyna [A] használt a komplex esetben.

Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_d$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Legyen $Ef(\xi)$ az

$$f = f(\xi) = f(\xi_1, \ldots, \xi_d)$$

függvény várható értéke.

Az $\mathbb{R}^d$ téren legyen $(\cdot,\cdot)$ a standard euklideszi skaláris szorzás. Az alábbi formula jól ismert [G, S, Z].

Wick formula *Legyenek $x_1, \ldots, x_n$ az $\mathbb{R}^d$ tér vektorai, melyek Gram mátrixa $A = ((x_i, x_j))$. Ekkor*

$$E\prod_{i=1}^{n}(x_i,\xi) = \text{haf } A. \tag{4}$$

(Páratlan n-re a haf $A = 0$ konvenciót fogadjuk el.)

Az alábbi tételek a 3.3.4. tételből egyszerűen adódnak a Wick formula (4) felhasználásával.

3.4.1. tétel. *Ha $X_1, \ldots, X_n$ együttesen normális eloszlású, nulla várható értékű valószínűségi változók, akkor*

$$E\left(X_1^2\cdots X_n^2\right) \geq EX_1^2\cdots EX_n^2.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll, ha az X_i változók függetlenek, vagy egyikük majdnem biztosan nulla.

A 3.4.1 tétel tetszőleges $2p$ páros kitevőre való általánosítása ekvivalens a 3.3.5. sejtéssel.

3.4.2. tétel. *Ha $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ és minden $|x_i| = 1$, akkor a*

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i,\xi)^2$$

szorzat átlaga a $\{\xi \in \mathbb{R}^d \ : \ |\xi| = 1\}$ egységgömbön legalább

$$\frac{\Gamma(d/2)}{2^n\Gamma(d/2+n)} = \frac{(d-2)!!}{(d+2n-2)!!} = \frac{1}{d(d+2)(d+4)\ldots(d+2n-2)}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll, ha az x_i vektorok páronként merőlegesek.

3.4.3. tétel. *Legyenek f_i lineáris funkcionálok egy valós euklideszi téren. Ekkor*

$$||f_1\cdots f_n|| \geq \frac{||f_1||\cdots||f_n||}{\sqrt{n(n+2)(n+4)\cdots(3n-2)}}.$$

Itt $||\cdot||$ az egységgömbön vett szuprémumot jelenti. A végtelen dimenziós esetben végtelen normájú funkcionálokat is megengedhetünk, ekkor a $0\cdot\infty = 0$ konvenciót használjuk az egyenlőtlenség jobb oldalán.

Vegyük észre, hogy

$$n(n+2)(n+4)\cdots(3n-2)) < \left(\frac{3\sqrt{3}}{e}n\right)^n,$$

és $3\sqrt{3}/e < 3\cdot 1.8/2.7 = 2$, így a 3.4.3. tétel javítást jelent az [RS] cikknek a bevezetőben említett eredményéhez képest.

Irodalomjegyzék

[A] J. Arias-de-Reyna, Gaussian variables, polynomials and permanents, Lin. Alg. Appl. 285 (1998), 107–114.

[Ball] K. M. Ball, The complex plank problem, Bull. London Math. Soc. 33 (2001), 433–442.

[B1] A. Barvinok, Estimating L^∞ norms by L^{2k} norms for functions on orbits, Found. Comput. Math. 2 (2002), 393–412.

[B2] A. Barvinok, Integration and optimization of multivariate polynomials by restriction onto a random subspace, arXiv preprint: math.OC/0502298

[BST] C. Benítez, Y. Sarantopoulos, A. Tonge, Lower bounds for norms of products of polynomials, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 124 (1998), 395–408.

[Bo] A. Borel, Linear Algebraic Groups, W. A. Benjamin Inc., New York, 1969.

[C] J. L. Cisneros-Molina, An invariant of 2×2 matrices, Electronic Journal of Linear Algebra 13 (2005), 146–152.

[CP] C. De Concini and C. Procesi, A characteristic free approach to invariant theory, Adv. Math. 21 (1976), 330–354.

[DF1] M. Domokos, P. E. Frenkel, On orthogonal invariants in characteristic 2, J. Algebra 274 (2004), 662–688. Published online:
`http://authors.elsevier.com/sd/article/S0021869303005131`,
arXiv preprint: `math.RA/0303106`

[DF2] M. Domokos, P. E. Frenkel, Mod 2 indecomposable orthogonal invariants, Adv. Math. 192/1 (2005), 209–217.

[DKZ] M. Domokos, S. G. Kuzmin, A. N. Zubkov, Rings of matrix invariants in positive characteristic, J. Pure Appl. Alg. 176 (2002), 61–80.

[D] D. Ž. Đoković, Simple proof of a theorem on permanents, Glasgow Math. J. 10 (1969), 52–54.

[F0] P. E. Frenkel, Vector invariants of the orthogonal group in characteristic 2 (in Hungarian), MSc thesis,
`http://www.cs.elte.hu/math/diploma/math/index.html`

[F1] P. E. Frenkel, Character formulae for classical groups, Central European Journal of Mathematics 4 (2006), no. 2, 242–249.

[F2] P. E. Frenkel, Pfaffians, hafnians and products of real linear functionals, Math. Res. Lett., to appear.

[FH] W. Fulton and J. Harris, Representation theory, GTM, Springer, New York, 1991.

[Ga] M. Gaudin, Une démonstration simplifiée du théorème de Wick en Mécanique statistique, Nuclear Phys. 15 (1960), 89–91.

[GW] R. Goodman and N. R. Wallach, Representations and invariants of the classical groups, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[G] L. Gurvits, Classical complexity and quantum entanglement, J. Comput. System Sci. 69 (2004), no. 3, 448–484.

[J] C. R. Johnson, Inequalities for a complex matrix whose real part is positive definite, Trans. Amer. Math. Soc. 212 (1975), 149–154.

[L] E. H. Lieb, Proofs of some conjectures on permanents, J. Math. Mech. 16 (1966), 127–134.

[L1] E. H. Lieb, A theorem on Pfaffians, J. Combinatiorial Theory 5 (1968), 313–319.

[Mar1] M. Marcus, The permanent analogue of the Hadamard determinant theorem, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 494–496.

[Mar2] M. Marcus, The Hadamard theorem for permanents, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 967–973.

[MN] M. Marcus, M. Newman, The permanent function as an inner product, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 223–224.

[Mat1] M. Matolcsi, A geometric estimate on the norm of product of functionals, Lin. Alg. Appl. 405 (2005), 304–310.

[Mat2] M. Matolcsi, The linear polarization constant of $\mathbb{R}^n$, Acta Math. Hungar. 108 (2005), no. 1-2, 129–136.

[MM] M. Matolcsi, G. A. Muñoz, On the real linear polarization constant problem, Math. Inequal. Appl. 9 (2006), no. 3, 485–494.

[Mats] H. Matsumura, Commutative Ring Theory, Cambridge Univ. Press, 1986.

[Mi] H. Minc, Permanents, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, 1978

[MST] G. A. Muñoz, Y. Sarantopoulos, A. Tonge, Complexifications of real Banach spaces, polynomials and multilinear maps, Studia Math. 134 (1999), no. 1, 1–33.

[N] P. Newstead, Introduction to moduli problems and orbit spaces, Tata Inst. Lecture Notes, Springer-Verlag, 1978.

[PR] A. Pappas, Sz. Révész, Linear polarization constants..., J. Math. Anal. Appl. 300 (2004), 129–146.

[R] Sz. Gy. Révész, Inequalities for multivariate polynomials, Annals of the Marie Curie Fellowships 4 (2006), `http://www.mariecurie.org/annals/`,
arXiv preprint: `math.CA/0703387`

[RS] Sz. Gy. Révész, Y. Sarantopoulos, Plank problems, polarization and Chebyshev constants, J. Korean Math. Soc. 41 (2004) 157–174.

[Ri] D. R. Richman, The fundamental theorems of vector invariants, Adv. Math. 73 (1989), 43–78.

[Se] A. Seidenberg, The hyperplane sections of normal varieties, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 357–386.

[S] B. Simon, The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Princeton Series in Physics, Princeton University Press, 1974

[T] D. E. Taylor, The Geometry of the Classical Groups, Heldermann Verlag, Berlin, 1992.

[W1] H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuerlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I, II, III, und Nachtrag, Math. Zeitschrift 23 (1925) 271–309 and 24 (1925) 328–376, 377–395, 789-791; reprinted in Selecta Hermann Weyl, 262–366, Birkhäuser, Basel, 1956.

[W2] H. Weyl, The classical groups, Their invariants and representations, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[Wi] G. C. Wick, The evaluation of the collision matrix, Phys. Rev. 80 (1950), 268–272.

[Z] A. Zvonkin, Matrix integrals and map enumeration: an accesible introduction, Combinatorics and physics (Marseille, 1995), Math. Comput. Modelling 26 (1997), 281–304.