

## PhD szigorlat **Differenciálegyenletek és megoldásuk** tárgyai

### **Főtárgy:**

Közönséges DE: 1+2+3+4+5+6.

Parciális DE: 9+10+11+12+13+14.

Numerikus módszerek: 1+4+7+8+15+16.

**Melléktárgyak:** Valamelyik főtárgy bármely két témája.

**1. Közönséges differenciálegyenletek:** Egzisztencia, unicitás, folytonos függés és a mögöttes fixpont-tételek. Folytonos és diszkrét idejű dinamikai rendszerek. Határhalmazok. Lineáris egyenletek. Lokális elmélet hiperbolikus egyensúlyi helyzet és periodikus pálya körül, stabil és instabil sokaságok. Stabilitás és Ljapunov- függvény.

### Irodalom:

V.I. Arnold, Közönséges Differenciálegyenletek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986. (1–4 fejezet)

D.K. Arrowsmith & C.M. Place, An Introduction to Dynamical Systems, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. (1–4 fejezet)

**2. Dinamikai rendszerek:** Strukturális stabilitás. Grobman Hartman lemma. Lokális bifurkációk alaptípusai. Centrális sokaság. Attraktor-repellor párok, Morse-dekompozíció, Conley-rekurrencia, Morse-Smale rendszerek. Smale-patkó. Homoklinikus pálya, Birkhoff-Smale tétel.

### Irodalom:

C. Robinson, Dynamical Systems, CRC Press, Boca Raton, 1995. (4; 5; 7.4.1–7.4.2; 7.12; 9.1 fejezet)

S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer, Berlin, 1995. (4.1–4.4 fejezet)

### **3. Káosz és ergodelmélet:**

Szimbolikus/shift dinamika. Intervallumleképezések. Invariáns mértékek diszkrét és folytonos idejű dinamikai rendszerekben. Ergo mértékek. Topologikus entrópia. Hausdorff-dimenzió. Iterált függvényrendszerek, fraktálok.

### Irodalom:

P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Springer, Berlin, 1982. (1; 4 fejezet)

K. Falconer, Techniques in Fractal Geometry, Wiley, New York, 1997. (2 fejezet)

4.

**Numerikus**

**dinamika:**

Az eredeti és diszkrétizált dinamika összehasonlítása attraktorok, invariáns sokaságok és (intervallum-aritmetika, fixpont-index). Smale-patkó típusú káosz vonatkozásában. Struktúra és konvergenciabecslések kapcsolata, szimplektikus diszkrétizációk.

Irodalom:

M. Stuart & A.R. Humphries, Dynamical Systems and Numerical Dynamics, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. (4; 6-7 fejezet)

5.

**Funkcionál**

**differentiálegyenletek:**

A megoldó-operátor alaptulajdonságai: egzisztencia, unicitás, folytonos függés, kompaktság. Lineáris egyenletek. A kvalitatív elmélet elemei: stabilitás, Ljapunov-függvény, hiperbolikus egyensúlyi helyzet stabil és instabil sokasága.

Irodalom:

J.K. Hale, Functional Differential Equations, Springer, Berlin, 1971. (1–5; 8–13; 19–20; 22; 24–26 fejezet)

6.

**Dinamikai**

**modellek**

**a**

**biológiában:**

Populációdinamika: Kolmogorov-rendszerek, korstruktúrával rendelkező és térben elhelyezkedő ökológiai rendszerek. Mintáz Járványterjedési modellek. Evolúcióelmélet, populációgenetika, játékelméleti modellek.

Irodalom:

J. Hofbauer & K. Sigmund, Evolutionary Games and Population Dynamics, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. (12-13; 18-19 fejezet)

M. Farkas, Dynamic Models in Biology, AP, New York, 2001. (1-2; 5 fejezet)

**7. Irányításelmélet:** Lineáris irányítási rendszerek alaptulajdonságai: irányíthatóság, megfigyelhetőség, stabilizálhatóság, realizáció. Optimális irányítások, a Pontrjagin-féle maximumelv. Dinamikus programozás, a Hamilton-Jacobi-Bellman egyenlet.

Irodalom:

A. Strauss, An Introduction to Optimal Control Theory, Springer, Berlin, 1982.

Gyurkovics Éva, Irányítási rendszerek, BME, Internet, 1999

E.D. Sontag, *Mathematical Control Theory*, Springer, Berlin 1998. ( 8. fejezet )

**8. KDE numerikus módszerei:** Kezdetiértékfeladatok közelítő megoldása, konvergencia, stabilitás, Lax-ekvivalencia. Egy-és több lépéses módszerek. Kétpontos peremértékproblémák és közelítő megoldásuk: shooting, véges differenciák. Galerkin és véges elem módszerek.

Irodalom:

A, Quarteroni, R. Sacco & F. Saleri, *Numerical Mathematics*, Springer, Berlin, 2000. (11-12.fejezet)

**9. Klasszikus parciális differenciálegyenletek:** A karakterisztikák módszere. Alapvető tudnivalók a Laplace/Poisson, a hővezetési és a hullámegyenletről. Harmonikus függvények. Weyl-lemma. Fourier-módszer.

Irodalom:

F. John, *Partial Differential Equations*, Springer, Berlin, 1971. ( I-IV.fejezet)

L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, Providence, 1998. (2.fejezet)

**10. Szoboljev terek:** Szoboljev-terek, beágyazási tételek, leszorítás a peremre, szinguláris integrálok. Disztribúciók, alapmegoldások konvolúcióval, Fourier-analízis. Operátorfélcsoportok és infinitézimális generátoraik, perturbációs és approximációs tételek.

Irodalom:

L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, Providence, 1998. (5.fejezet)

M. Reed & B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II.*, AP, New York, 1975. (IX. 1-2, 5-6 fejezet)

J.A. Goldstein, *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Oxford University Press, Oxford, 1985. (1-7 fejezet)

**11. Lineáris elliptikus egyenletek:** Gyenge megoldás. Lax-Milgram lemma, átfogalmazás variációs feladattá, sajátérték- és sajátfüggvényelmélet, energiaegyenlőtlenségek, (belső és perem) elliptikus regularitás, maximum elvek.

Irodalom:

L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, Providence, 1998. (6 fejezet)

**12. Lineáris parabolikus és hiperbolikus egyenletek:** Lineáris parabolikus egyenletek, gyenge megoldás, energiaegyenlőtlenségek, regularitási tételek, maximum elvek. Lineáris hiperbolikus egyenletek: gyenge megoldás, energia egyenlőtlenségek, dísztrubanciák

terjedése.

Irodalom:

L.C. Evans, Partial Differential Equations, AMS, Providence, 1998. (7.1-7.2 fejezet)

**13. Reakció-diffúzió egyenletek:**

Egyszintencia és unicitástétel kvázilineáris egyenletekre Banach-térpárokban. Regularitási tétel. A kvalitatív elmélet elemei: stabilitás hiperbolikus egyensúlyi helyzet stabil és instabil sokasága, utazó hullámok.

Irodalom:

D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer, Berlin, 1981.(1.4-1.5:3.1-3.6: 5.1-5.4 fejezet )

J. Smoller, Shock Waves and Reaction Diffusion Equations, Springer, Berlin, 1983. (15-16 fejezet)

**14. Nemlineáris hiperbolikus egyenletek:** Hiperbolikus megmaradási elvek. Burgers-egyenlet, lökéshullámok, Riemann probléma. Hopf-Lax formula, Oleinik tétel. A kompenzált kompaktság módszere, viszkózus közelítés, Tartar és Murat alaptételei, DiPerna-elmélet.

Irodalom:

L.C. Evans, Partial Differential Equations, AMS, Providence, 1998. (3.3-3.4 fejezet)

J. Smoller, Shock Waves and Reaction Diffusion Equations, Springer, Berlin, 1983. (15-16 fejezet)

L. Hörmander, Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations, Springer, Berlin, 1997.

**15. PDE numerikus módszerei:**

Projekciós módszerek: Galerkin, végeselem. A végeselem módszer funkcionálanalízisbeli megalapozása elliptikus egyenletekre. A differenciák módszere a Laplace, a hővezetési és a hullámegyenletre, stabilitási feltételek.

Irodalom:

A, Quarteroni, R. Sacco & F. Saleri, Numerical Mathematics, Springer, Berlin, 2000, (13.fejezet)

D.Braess, Finite Elements, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. (1-2 fejezet)

**16. Nagyméretű lineáris egyenletrendszerek:** Direkt módszerek blokkosított és általános ritka mátrixú egyenletek megoldására. Iterációs

módszerek, gradiens és konjugált gradiens módszer. Relaxációs eljárások. Prekondicionálás.

Irodalom:

A, Quarteroni, R. Sacco & F. Saleri, Numerical Mathematics, Springer, Berlin, 2000. (3-4 fejezet)