

PhD szigorlat **Algebra és logika** tárgyai

Főtárgyak:

Algebra I.: 1+2+4+5+6+7+9.

Algebra II. és logika: 3+5+10+11+12+13+14.

Melléktárgyak: 1+2, 4+5+9, 8+15, 6+7, 3+10+11, 12+13+14.

1. Csoportok: Feloldható csoportok: a Sylow tétel általánosításai. Véges p -csoportok és nilpotens csoportok. Egyszerű csoportok: a klasszikus egyszerű csoportok, sporadikus csoportok, Lie-típusú csoportok. Bővítélemélet, Schur-Zassenhaus tétel. Szabad csoportok. A Burnside-probléma. Többszörösen tranzitív, ill. primitív permutációcsoportok. Abel csoportok: tiszta részcsoporthok, bázisalcsoportok.

Irodalom:

J.J. Rotman: An introduction to the theory of groups; Springer, 1995.

D.J.S. Robinson: A course in the theory of groups; Springer, 1996.

L. Fuchs: Infinite Abelian groups I-II.; Academic Press, 1970, 1973.

2. Csoportrepresentációk: Karakterek: ortogonalitási relációk, indukálás. Frobenius-reciprocitás, Clifford-elmélet, karakterfokok. Alkalmazások: Burnside-tétel, Frobenius mag, karakterizációk az involúciók centralizátoraival. Projektív reprezentációk, Schur-multiplikátor. A csoportalgebra szerkezete. A moduláris reprezentációelmélet elemei.

Irodalom:

I.M. Isaacs: Character theory of finite groups; Dover, 1994.

G. Navarro: Characters and blocks of finite groups; Cambridge Univ. Press, 1998.

3. Félcsoportok és automaták: Green-relációk. Transzformáció-félcsoportok. Teljesen zérus- egyszerű félcsoportok. Reguláris és inverz félcsoportok. Automataleképezések. Egyszerű automaták. Automaták szorzatai. Automaták teljes rendszerei. Automaták és nyelvek. Erősen összefüggő automaták.

Irodalom:

J.M. Howie: An introduction to semigroup theory; Academic Press, 1976.

A.H. Clifford, G.B. Preston: The algebraic theory of semigroups; AMS, 1961, 1967.

F. Gécseg, I. Peák: Algebraic theory of automata; Akadémiai Kiadó, 1972.

J.M. Howie: Automata and languages; Clarendon Press, 1991.

F. Gécseg: Products of automata; Springer, 1986.

Révész Gy.: Bevezetés a formális nyelvek elméletébe, Tankönyvkiadó, 1979.

J. Hopcroft, J.D. Ullman: Introduction to automata theory, languages and computation, Addison-Wesley, 1979.

4. Nem-kommutatív gyűrűk: Wedderburn-Artin-tétel. Primitív gyűrűk, sűrűségi tétel, Jacobson-radikál. Láncfeltételek: Artin- és Noether-gyűrűk. Centrálisan egyszerű algebrák: Brauer-csoport, algebrák keresztszorzata. Modulusok: projektív és injektív modulusok. Azumaya-Remak-Krull-Schmidt-tétel. Morita-ekvivalencia.

Irodalom:

F.W. Anderson, K.R. Fuller: Rings and categories of modules; Springer, 1974.

R.S. Pierce: Associative algebras; Springer, 1982.

5. Homologikus algebra: Derivált funktorok: Ext és Tor. Homológiák hosszú egzakt sorozatai. Homologikus dimenziók: projektív és globális dimenzió.

Irodalom:

C.A. Weibel: An introduction to homological algebra; Cambridge Univ. Press, 1994.

J.J. Rotman: An introduction to homological algebra; Academic Press, 1979.

6. Kommutatív algebra: Prím és primér ideálok. Lokalizálás. Noether-féle normalizációs lemma. Diszkrét értékelés-gyűrűk, Dedekind-gyűrűk.

Irodalom:

M. Atiyah, I.G. Macdonald: Introduction to commutative algebra; Addison-Wesley 1969.

D. Eisenbud: Commutative algebra with a view toward algebraic geometry; Springer, 1955.

H. Matsumura: Commutative ring theory; Cambridge Univ. Press, 1988.

7. Algebrai geometria: Affin és projektív algebrai sokaságok, görbék. Koordinátagyűrűk. Biracionális leképezések. Elliptikus görbék.

Irodalom:

R. Shafarevich: Basic algebraic geometry, Vol. I. ; Springer, 1994.

R. Hartshorne: Algebraic geometry; Springer, 1977.

8. Testek: Galois-elmélet. Transzcendens bővítések. Lüroth-tétel. Rendezett testek: Artin-Schreier-elmélet. Véges testek, hibajavító kódok.

Irodalom:

P.M. Cohn: Algebra, I-III. ; Wiley, 1982, 1989, 1991.

I. Stewart: *Galois theory*. Chapman & Hall, 2003.

9. Lie algebrák: Nilpotens Lie-algebrák: Engel tétele. Feloldható Lie-algebrák. A komplex test fölötti féligegyszerű Lie-algebrák. Gyökrendszerek. Chevalley-bázis. Burkoló algebra: Poincaré-Birkhoff-Witt-tétel.

Irodalom:

J. E Humphreys: Introduction to Lie algebras and representation theory; Springer, 1972, reprinted, 1997.

J.-P. Serre: Lie algebras and Lie groups; Springer, 1992.

W. Fulton, J. Harris: Representation Theory; Springer, 1991.

10. Univerzális algebra: Varietások, szabad algebrák, Birkhoff-féle azonosságelmélet. Szubdirekt felbontás. Kongruenciahálók. Malcev típusú tételek kongruencia disztributív és moduláris varietásokra. Klónok, Rosenberg tétele. Teljességi tételek, primál algebrák. Boole reprezentáció. Diszkriminátor varietások. A kommutátor elmélet alapjai, “szelíd kongruenciák”

Irodalom:

G. Grätzer: Universal algebra; Springer, 1979.

R. Freese, R. McKenzie: Commutator Theory for Congruence Modular Varieties; London Math. Soc., 1987.

R. McKenzie, G. McNulty, W. Taylor: Algebras, lattices, varieties

S. Burris-H. P. Sankappanavar: A course in universal algebra; Springer, 1981.

D. Hobby, R. McKenzie: The structure of finite algebras; AMS, 1988.

11. Hálók: Disztributív hálók topologikus reprezentációi, dualitás a disztributív hálók és a poszetek között. Szabad hálók. Geometriai terek és hálók, projektív terek és a komplementumos moduláris hálók, Desargues tétel és a koordinatizálás. Algebrai hálók reprezentálása.

Irodalom:

G. Birkhoff: Lattice Theory

G. Grätzer: General lattice theory; Academic Press, 1978.

Czédli Gábor: Hálóelmélet

B. Ganter-R. Wille: Concept lattices

R. Freese-J. Ježek-J.B. Nation: Free lattices

P. Crawley-R.P. Dilworth. Algebraic theory of lattices; Prentice-Hall, 1973.

12. Modellelmélet, algebrai logika: Modellosztályok és jellemzéseik (elemi, Δ -elemi, Σ -elemi osztályok), pozitív és negatív eredmények. Modell konstrukciók: szorzatok, beágyazások, redukciók. Megőrzési és karak-terizációs tételek. Definiálhatóság. Komplettség. Standard és nem-standard modellek. Nem-standard analízis. Logikák algebraizációi. Az algebraizáció megadása logikai ill. algebrai eszközökkel. Algebrai és logikai fogalmak kapcsolata, fontos logika tulajdonságok (pl. kompaktság, teljesség, stb.) jellemzése univerzális algebrai fogalmakkal. Reprezentáció fogalma.

Irodalom:

W. Hodges: A Shorter Model Theory, Cambridge Univ. Press, 1997
C.C. Chang, H.J. Keisler: Model Theory, North Holland, 3th ed., 1990
L. Henkin, J.D. Monk, A. Tarski: Cylindric Algebras I-II., North Holland, 1985
J. Bell, M. Machover: A Course in Mathematical Logic, North Holland, 1977
Ferenczi M.: Matematikai Logika, Műszaki Kiadó, 2002
Csirmaz L.: Matematikai Logika, ELTE, 1994
H.B. Enderton: A Mathematical Introduction to Logic, Academic Press, 2nd ed., 2001
Serény Gy.: A modellelmélet alapfogalmai, BME, 1992.

13. Bizonyításelmélet és alkalmazásai: Dedukciós és cáfolati rendszerek. Analitikus fák, rezolúció. Algoritmusok a bizonyításelméletben. Normálformák. A bizonyításelmélet korlátairól, Gödel tételei. A logikai programozás általános modellje, PE definíciók, korrekt válasz probléma. A PROLOG logikai alapjai, SLD rezolúció. Kapcsolatok az adatbázis elmélettel.

Irodalom:

M. Ben-Ari: Mathematical Logic in Computer Science I-II., Prentice Hall, 1996
A. Nerode, R.A. Shore: Logic for Applications, Springer, 1997
E. Burke, E. Foxley: Logic and its Application, Prentice Hall, 1996
M. Ferenczi, M. Szóts: Mathematical Logic and Formal Methods, megj. alatt
Ferenczi M.: Matematikai Logika, Műszaki Kiadó, megj. alatt
H.B. Enderton: A Mathematical Introduction to Logic, Academic Press, 2nd ed., 2001

14. Nem-klasszikus logikák a számítástudományban: Logikák osztályozása. Modális, multimodális, temporális, dinamikus, többértékű, nyíl, reláció, intuicionista, valószínűségi, nem-monoton logikák. Fontos logika tulajdonságok vizsgálata nem-klasszikus logikák esetén. Alkalmazások a tudás reprezentációnál, a programhelyesség bizonyításban és a logikai programozásban.

Irodalom:

R. Goldblatt: Logic of Time and Computation, CSLI, Stanford, 1992
From Modal Logic to Deductive Databases, Ed. Thayse, A., Wiley, 1992
R. Turner: Logics for Artificial Intelligence, Ellis, 1984
A. Nerode, R.A. Shore: Logic for Applications, Springer, 1997
M. Ferenczi, M. Szóts: Mathematical Logic and Formal Methods, megj. alatt
H.B. Enderton: A Mathematical Introduction to Logic, Academic Press, 2nd ed., 2001

15. Lineáris algebra:

Vektorterek: Determinánsok. Lineáris terek (lineáris függetlenség, bázis, altér, faktortér, duális tér), lineáris leképezések (képtér, nulltér, rang). Gram--Schmidt-ortogonalizálás. Valós és komplex euklideszi terek.

Lineáris leképezések: Lineáris transzformációk, mátrixok kanonikus alakjai. Nyom, sajátértékek, minimál- és karakterisztikus polinom. A Jordan-normálforma. Frobenius-normálforma. Poláris felbontás. Lánczos-felbontás. Egészelemű mátrixok, Smith-normálforma.

Speciális lineáris transzformációk: Szimmetrikus és önadjungált mátrixok. Ferdén-szimmetrikus, ortogonális, unitér és normális mátrixok. A főtengelytétel. Nilpotens mátrixok, projektorok, involúciók.

Multilineáris algebra: Multilineáris leképezések, tenzorszorzat, tenzoralgebra, külső szorzat. Grassmann-algebra. Szimmetrikus és ferdén-szimmetrikus tenzorok. Felbontható tenzorok. Leképezések tenzorszorzata és külső szorzata.

Mátrix-egyenlőtlenségek: Szimmetrikus és önadjungált mátrixokra vonatkozó egyenlőtlenségek. Mátrixok sajátértékeire és normájára vonatkozó egyenlőtlenségek. Nemnegatív elemű mátrixok, Perron--Frobenius-tétel. Duplán sztochasztikus mátrixok.

Mátrixok az algebrában és az analízisben : Felcserélhető mátrixok, kommutátorok. Kvaterniók, Cayley- és Clifford-algebrák. A rezultáns. A Witt-tétel. Moore--Penrose-inverz, mátrixegyenletek. Mátrixfüggvények, differenciálásuk.

Irodalom:

P.M. Cohn: Algebra, I-III. ; Wiley, 1982, 1989, 1991.

V.V. Prasolov: Problems and theorems in linear algebra; Amer. Math. Soc., 1994.

Fried Ervin: Algebra I. (Nemzeti Tankönyvkiadó, 2000.)

Freud Róbert: Lineáris algebra (ELTE Eötvös Kiadó, 1996.)

Horváth Erzsébet: Lineáris Algebra (BME Kiadó, 1995.)