Szingularitások multifokai és nemreduktív hányadosok

Tézisfüzet

Bérczi Gergely
Témavezető: Szenes András

Budapest
2008.

1. Előzmények

A tézis egy szingularitáselméleti kérdésre ad választ, algebrai geometriai és topológiai eszközöket használva.

Az algebrai geometria módszereivel központi szerepet játszik a modern matematikában, számos más matematikai és fizikai területen használják fogalmait és eszközeit.

Az algebrai geometria algebrai fogalmakat és technikákat használ geoemtriai problémák megoldására. Az objektumok, amiket vizsgal többváltozós polinomegyenletek, és azok globális megoldása, a megoldáshalmaz geometriai leírása. A legegyszerűbb példák a jól ismert síkgörbék: az egyenes, mely egy lineáris forma nullhelye, a kör, amelynek jól ismert egyenlete másodfokú, és a többi jól ismert görbe mint a parabola, hiperbola. Ezeket már az ókori görögök is előszeretettel tanulmányozták, és így jogosan nevezhetjük Archimedest és Apolloniust az algebrai geometria alapítóinak.

A 19 század végén az olasz algebrai geometria iskola jelentős sikereket ért el .....nevek..., majd az 1950-es, 60-as években Jean-Pierre Serre és Alexander Grothendieck új alapokra helyezték az algebrai geometria eszközeit a kévefogalom bevezetésével. A forradalmian új szemléletmódnak köszönhetően az algebrai geometria a matematika és modern fizika számos területén nélkülözhetetlen eszközzé vált. Például Deligne ezen hatékony eszközök segítségével bizonyította a matematika egyik leghiresebb megoldatlan problémájának, a Riemann hiptézisnek egy variánsát, és Andrew Wiles közelmúltbeli nagy szenzációt kavaró bizonyítása a Fermat tételre szintén az algebrai geometriában fejlesztett eszközöket használ. Szintén ezen eszközök jelentik az egyik alappillérét az utóbbi évtizedekben kidolgozott nagyszabású fizikai elméletnek, a húrelméletnek.

Az algebrai geometria fejlődése, és fogalmai elválaszthatatlanok az algebrai topológiától, amely fontos szerepet játszik a tézisben, elsősorban a lokalizációs módszerek a topológiában. A topológia alapgondolata az, hogy számos geometriai probléma megoldása nem függ az adott objektum pontos alakjától, csak annak topológiájától. A kör és a négyzet például topológiai szemszögből ekvivalens alakzatok: mindkettő egydimenziós zárt görbe, amely két tartományra bontja a síkot. Röviden tehát, a geometria néhány alapvető mértéke, mint szög, hosszúság, terület nem léteznek a topológiában, és két objektum ekvivalens, ha egymásba deformálhatók. Az elgebrai geometria és algebrai topológia eszközeit vegyítve számos rendkívül hatékony módszer született, ilyen a lent részletezett lokalizáció is.

A tézis objektumai csoporthatással ellátott terek. Ezen csoporthatások az adott téren extra struktúrát, szimmetriákat definiálnak, és ezért több információt rejtenek mint ugyanezen terek csoporthatás nélkül. Számos szimmetria igen közismert már elemi szinten is; például a négyzetnek jól ismert módon léteznek forgás és tükörszimmetriái. Egy másik egyszerű példa a $p(x, y, z) = x + y + z$ polinom, amely nem változik a változók permutálásával, tehát az S_3 permutálócsoport a polinom egy szimmetriacsoportja. A szimmetria a matematikában mindig egy csoporthatást jelent, vagyis egy $G \times X \to X$ leképezést, ahol G egy csoport, X egy tér. Az $x \in X$ pont orbitja a $\{gx : g \in G\} \subset X$ halmaz, ahol gx jelöli a (g, x) pont képét. Az $x \in X$ fixpont, ha orbitja egyetlen pontból áll.

A fixpontok halmaza sok topológiai információt rejt az X térről. Számos topológiai invariáns, mint pl az Euler karakterisztika kiolvasható a fixpontokból, illetve a csoporthatás fixpontok körüli viselkedéséből. Ez az alapja az un lokalizációs tételeknek [2, 6, 13], melyek a tézis alappillérei. A tézisben hányadostereken alkalmazunk lokalizációt.

Az $X/!/G$ hányadostér mint halmaz, definíció szerint a G orbitjainak halmaza az X téren. Amennyiben a G csoport topológiailag szép tulajdonságokkal rendelkezik, az $X/!/G$ hanyadostérre algebrai struktúra is illetszthető. Ez a helyzet pl reduktív G csoportok esetén, és a hányadosok elméletét erre az esetre Mumford dolgozta ki az 1960-as években geometriai invariánselmélet néven. Amennyiben azonban a G nemreduktív csoport, nehezebb, vagy egyáltalán nem lehetséges kanonikus algebrai struktúrát adni az $X/!/G$ orbittérre. A tézisben egy nemreduktív hányados alkalmas kompaktifikációját adjuk.

A tézis zárt, iterált reziduum formulát ad A_d szingularitások Thom polinomjaira minden $d \geq 1$-re. A Thom polinom (másképpen multifok, vagy ekvivariáns Poincaré duális) fontos biracionális algebrai, illetve topologiai invariánsa a szingularitásoknak. Kiszámításukban a fő nehézséget a szimmetriacsoportjuk jelenti, amely egy nemreduktív diffeomorfizmuscsoport.

Jelenleg három ismert hatékony módszer ismert Thom polinomok számítására. Az első, klasszikus mód szingularitások feloldását használja, lásd [27]. The második Rimányi R. egy ötletén alapul, és a megszorító egyeneletek néven ismert az irodalomban, lásd [30]. Az ismert módszerek módszeres összefoglalója megtalálható Kőműves B. szakdolgozatában, lásd [24].

A probléma René Thom 1950-es évekbeli eredményeire nyúlik vissza, amikor bizonyította hogy a keresett invariások bizonyos hányadosgyűrű elemei, és polinom formában állnak elő. A $d = 1$ eset a klasszikus Giambelli-Thom-Porteous formula az algebrai geometriában. ([11]. A $d = 2$ esetet F. Ronga számolta ki az 1980-as években, lásd [31]. Néhány éve, a [7] munkában a szerzők formulát állítottak fel a $d = 3$ esetre, amelyet P. Pragacz bizonyított többé-kevésbé teljesen [28]-ban. Végül a megszorító egyenletek módszerét használva Rimányi formulát adott az ekvidimenziós esetre $d \leq 8$-ra, [29]

2. Célkitűzések

A tézis célja zárt formulát adni Morin szingularitások Thom polinomjaira, másnéven multifokára, megint más néven ekvivariáns Poincaré duálisára.

Ezen szingularitások – melyeket A_d szingularitásoknak is hívunk – fontos szerepet töltenek be a globális szingularitáselméletben.

A cél megfogalmazásához néhány sorban ismertetjük a problémát. A globális szingularitáselmélet alapfeladata sokaságok közötti leképezések osztályozása. A sima sokaságok olyan terek, melyek lokálisan, minden pont környezetében diffeomorfak egy n dimenziós euklideszi térrel, n a sokaság dimenziója. A gömb és a tórusz lokálisan kétdimenziós euklideszi terek – és ennek megfelelően kétdimenziós sokaságok – de globálisan különböző sokaságok. Egy $f : M \to N$ leképezés sima sokaságok között lokális koordinátákkal is megadható: minden $p \in M$ pont körül alkalmas $x_1, \dots, x_n$, az $f(p) \in N$ pont körül $y_1, \dots, y_k$ koordinátákat választva f lokálisan egy $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ leképezés:

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (f_1(x_1, x_2, \dots x_m), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)). \tag{1}$$

A tézisben kompakt, komplex sokaságokkal foglalkozunk, ahol $\mathbb{R}$ helyett $\mathbb{C}$ értendő.

Különböző lokális koordinátákban az f leképezés különböző alakot vesz fel lokálisan, az áttérés két lokális forma között egy (holomorf) diffeomorfizmuscsoporttal adható meg, a globális szingularitáselmélet egyik alapproplémája tehát ezen nemreduktív diffeomorfizmuscsoportok megértése.

Ha adott egy $f : M \to N$ sima leképezés két komplex sokaság között, az őssokaság pontjait osztályozhatjuk az f lokális viselkedése alapján. Az őssokaság azon pontjait, amelyekben az f differenciálja nem maximális rangú, szinguláris pontoknak nevezzük.

A szinguláris pontok osztályozása az f lokális algebrája szerint történik: ha f lokálisan (1) alakú, a lokális algebra ebben a pontban

$$A_f(p) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(f_1, f_2, \dots, f_k) \tag{2}$$

ahol $(f_1, \dots, f_k)$ jelöli a koordinátafüggvények által generált ideált. A lokális algebra invariáns a lokális átparaméterezésre mind az ős, mind a képsokaságban.

Egy adott A lokális algebra esetén az M őssokaság azon pontjai melyekben a lokális algebra izomorf A-val egy ciklust alkotnak, jelöljük ezt $M(A)$-val. Generikus f esetén $M(A)$ egy homológiaosztályt reprezentál az M-ben. Poincaré duálisának meghatározása a globális szingularitáselmélet egyik klasszikus problémája. A tézis célja ezen kohomológiaosztály kiszámítása Morin szingularitásokra, melyek az $A_d = t\mathbb{C}[t]/t^{d+1}$ algebrához tartoznak.

Ehhez T. Gaffney egy algebrai modeljét használjuk szingularitásokra, lásd [10]. A cél lokalizáció alkalmazása az algebrai model által definiált nemreduktív hányadoson, majd a kapott racionális kifejezés zárt alakra hozása iterált reziduum segítségével.

Ennek megvalósításához kikerülhetetlen a nemreduktív hányados kompaktifikációja, amelyhez annak egy beágyazását használjuk egy parciális zászlós sokaságba. Így tehát mondhatjuk, hogy a tézis másodlagos célja egy új módszer első lépéseinek lefektetése nemreduktyv hányadosok kompaktifikációjának kezelésére, illetve lokalizációra ezen kompaktifikáción.

A végső reziduumformula tartalmaz egy ismeretlen paramétert; egy polinomot, amely egy Borel orbit multifoka egy komplex vektortérben. A tézis utolsó fejezetébek célja ezen polinom néhány együtthatójának kiszámítása.

3. Módszerek

A tézisben adott formulához a következő uton jutunk. Gaffney algebrai modeljét használva Morin szingularitásokra kiderül, hogy a Morin szingularitások Σ_d halmaza ekvivariánsan fibrálódik egy nemreduktív hányadoson egy tóruszhatásra nézve. A tórusz a szimmetria diffeomorfizmuscsoport maximális tórusza, és igy lehetővé teszi ekvivariáns lokalizáció alkalmazását egy $X/!/H$ nemreduktív hányados alkalmas kompaktifikációján, ahol X egy komplex vektortér, amelyen lineárisan hat a komplex sík, $\mathbb{C}$ diffeomorfizmusainak egy H részcsoportja.

Alapvető lépés tehát $X/!/H$ egy alkalmas kompaktifikációja, melyet a hányados egy zászlós sokaságba történő beágyazásával valósítunk meg. A kompaktifikáció pedig a kép lezártja a zászlós sokaságban.

A következő észrevétel, hogy a lokalizáció két lépésben is elvégezhető:

1. Első észrevétel, hogy $X//H$ ekvivariánsan fibrálódik egy $X/!/B$ zászlós sokaság felett, ahol B egy Borel részcsoport, amely tartalmazza H-t. Egy általános iterált reziduumformulát adunk a zászlós sokaságon, amely lehetővé teszi, hogy az $X/!/H$ hányadosnak csak egy fix zászló feletti fibrumával foglalkozzunk.

2. A fix zászlók feletti fibrumok alkalmas kompaktifikációja után második lépésben lokalizációt használunk a fibrumokon, amely a végső formulához vezet.

Az eredmény egy reziduumformula, melynek tagjai a kompaktifikált fibrum fixpontjaival vannak indexelve. És itt valami váratlan dolog történik: egy tag kivételével az összes tag hozzájárulása a reziduumhoz 0, tehát az összes információ egyetlen, megkülönböztetett fixpontban van tárolva!

A reziduumformula egy ismeretlen paramétert tartalmaz, amely egy Borel orbit multifoka egy komplex vektortérben. Ennek néhány együtthatóját számítjuk ki a tézis utolsó fejezetében. Az ehhez használt módszer a Groebner degeneráció, és a deformált varietás primér felbontása.

4. Eredmények

- **1.Tézis**
  A tézis Gaffney egy algebrai modelljét, és lokalizációs tételeket használva

zárt iterált reziduumformulát ad Morin szingularitások Thom polinomjára. A tézis főtétele a 4.4.16-os tétel. A tétel bizonyítása foglalja el a tézis első 4 fejezetét. Ez az eredmény a [4] cikkben került publikálásra.

- **2. Tézis**
  A megoldás alapötlete lokalizáció egy nemreduktív hányadoson. A nemreduktív hányados kompaktifikációját a 4.2.8 Tétel mondja ki, amely szintén a [4]-ben publikált.

- **3. Tézis**
  Az 5.1-es fejezetben kiszámoljuk az ismeretlen paramétert, azaz a fent említett Borel orbit multifokát $d = 2, 3, 4, 5$ esetén. Ezeket rendre az 5.1.1, 5.1.2, 5.1.7, 5.1.10 formulák adják meg, melyeket szintén a [4] cikkben publikáltunk.

- **4. Tézis**
  Az 5.2-es fejezet az ismeretlen paraméter néhány együtthatóját számolja ki. A Borel orbit multifoka egy többváltozós polinom, amelynek egy megkülönböztetett w_1 változója van. A multifokra w_1 polinomjaként gondolva, a főegyüttható egy eggyel kevesebb változós homogén polinom, amelyről bebizonyítjuk hogy egy tórikus varietás multifoka. Ezt mondja ki az 5.2.13-as tétel, és ennek 5.1.14-es és 5.1.15-ös következménye.

  Ez az eredmény a kidolgozás alatt lévő [5] publikációban jelenik meg.

- **5.Tézis** Az 5.3-as fejezet az 1. tézispontban említett főtétel egy fontos alkalmazását adja. Rimányi Richárd egy sejtésére adunk bizonyítást a $d = 3$ esetben, miszerint az A_3 Thom polinomjának együtthatói pozitívak. Ezen eredmény szintén a [4]-ben került publikálásra.

5. A tézispontokhoz kapcsolódó publikációok

1. 1.,2.,3.,5. Tézis : G. Berczi, A. Szenes, Thom polynomials of Morin singularities, arXiv:math/0608285

2. 4. Tézis : G. Berczi, On the multidegree of a Borel orbit coming from global theory of singularities, in preparation

Hivatkozások

[1] M. F. Atiyah, R. Bott, The Yang–Mills equations over Riemann surfaces. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **308** (1983), no. 1505, 523–615.

[2] M. Atiyah, R. Bott, The Moment Map and Equivariant Cohomology. *Topology* **23** (1984) no. 1, 1–28.

[3] E. Baldwin, A GIT Construction of Moduli Spaces of Stable Maps in Positive Characteristic, arXiv:0707.2050.

[4] G. Berczi, A. Szenes, Thom polynomials of Morin singularities, arXiv:math/0608285

[5] G. Berczi, On the multidegree of a Borel orbit coming from global theory of singularities, in preparation.

[6] N. Berline, M. Vergne Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristic équivariantes. *Duke Math. J.* **50** (1983), 539–549.

[7] G. Bérczi, L. M. Fehér, R. Rimányi, Expressions for resultants coming from the global theory of singularities, Topics in algebraic and noncommutative geometry, Contemp. Math., **324**, (2003) 63–69.

[8] B. Doran, F. Kirwan, Towards non-reductive geometric invariant theory, *Pure and Applied Mathematics Quarterly* (2007).

[9] W. Fulton, The Young tableaux. London Mathematical Society Student Texts 35., Cambridge Univ. Press, 1997.

[10] T. Gaffney, The Thom polynomial of $\overline{\sum^{1111}}$, *Proc. Sympos. Pure Math., Singularity Part I.*, **40**, (1983), 399–408.

[11] R. Griffiths, J. Harris, Principles of algebraic geometry, Wiley Interscience Publications, 1978.

[12] V. Guillemin, J. Kalkman, The Jeffrey-Kirwan localisation theorem and residue operations in equivariant cohomology. *J. Reine Angew.Math.* **470** (1996), 123–142.

[13] L. Jeffrey, F. Kirwan, Localization for nonabelian group actions. *Topology* **34** (1995), 291–327.

[14] L. Jeffrey, F. Kirwan, Intersection pairings in moduli spaces of holomorphic bundles on a Riemann surface, *Elec. Res. Announcements A.M.S.* **1** (1995), 57–71.

[15] F. Kirwan, *Cohomology of Quotients in Symplectic and Algebraic Geometry*, Princeton University Press, 1984.

[16] F. Kirwan, Partial desingularisations of quotients of nonsingular varieties and their Betti numbers. *Ann. Math.* **122** (1985), 41–85.

[17] F. Kirwan, Rational intersection cohomology of quotient varieties. *Invent. Math* **86** (1986), 471–505.

[18] F. Kirwan, On the homology of compactifications of moduli spaces of vector bundles over a Riemann surface. *Proc. London Math. Soc.* **53** (1986), 237-266.

[19] F. Kirwan, Rational intersection cohomology of quotient varieties II. *Invent. Math.* **90** (1987), 153–167.

[20] F. Kirwan, An introduction to intersection homology theory. *Pitman Research Notes in Mathematics* **187**, Longman 1988.

[21] F. Kirwan, The cohomology rings of moduli spaces of bundles over Riemann surfaces. *J. American Math. Soc.* **5** (1992), 853–906.

[22] F. Kirwan, Intersection pairings on quotients and moduli spaces, and Witten's nonabelian localisation. *Proc. International Congress Math. (Zürich, 1994)*, 491–497, Birkhäuser, 1995.

[23] F. Kirwan, Symplectic implosion and non-reductive group actions, Proceedings of a birthday conference for P. Newstead, in preparation.

[24] B. Kőműves, Thom polynomials via restriction equations: Theory and Practise, Thesis at Eötvös University, Budapest, 2003.

[25] E. Miller, B. Sturmfelds, Combinatorial commutative algebra, Springer GTM **227**, 2005.

[26] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, 3rd ed, Springer, 1994.

[27] I. R. Porteous, Probing singularities, Singularities, Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., **40**, (1983), 395–406.

[28] P. Pragacz, Thom polynomials and Schur-functions I., math.AG/0509234, 2005

[29] R. Rimányi, Thom polynomials, symmetries and incidences of singularities, Invent. Math. 143 (2001), no. 3, 499–521.

[30] R. Rimányi, Calculation of Thom polynomials and other cohomological obstructions for group actions , Real and Complex Singularities (Sao Carlos, 2002) Ed. T.Gaffney and M.Ruas, Contemp. Math. 354., AMS, pp. 69-93.

[31] F. Ronga, Le calcul des classes duales aux singularit?és de Boardman d'ordre 2, C. R. Acad. Sci. Paris S?ér. A-B 270 1970 A582–A584.

[32] E. Witten, Two dimensional gauge theories revisited. *J. Geom. Phys.* **9** (1992), 303–368.