MŰEGYETEM 1782

Fokszám alapú feszítőfa optimalizálás

PhD tézisfüzet

Salamon Gábor

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Témavezető: Recski András

2010

1. Bevezetés

A telekommunikációs hálózatok tervezési és üzemeltetési kérdései napjaink egyik dinamikusan fejlődő kutatási területét jelentik. Ezen problémák matematikai modellezése gyakran a gráfelmélet eszközeivel történik megnövelve ezzel a hatékony gráfalgoritmusok jelentősségét. A legtöbb esetben azonban a kapott matematikai modell túl komplex ahhoz, hogy optimális megoldást remélhessünk, sokszor inkább egy szuboptimális közelítő megoldás gyors megtalálása a cél. A disszertációban egy, az optikai hálózatok világából vett problémát tekintünk. Megalkotunk egy olyan modellt, amely különböző feszítőfa optimalizálási problémákhoz vezet. Fő célunk, hogy ezen problémákra hatékony közelítő algoritmusokat adjunk, továbbá, hogy megmutassuk, algoritmusaink mind elméleti mind gyakorlati szempontból vizsgálva elegendően jó megoldásokat szolgáltatnak.

Matematikai modelljeink vizsgálata direkt kapcsolatot teremt a Hamilton utak elméletével. Ezért a bemutatásra kerülő új eredmények az algoritmikus kérdéseken túl elméleti jelentőséggel is bírnak.

Forgalomirányítás DWDM hálózatokban

Az úgynevezett *DWDM (Dense Wavelength Division Multiplexing)* [26] technológiát optikai hálózatok sávszélesség-növelésére használják. Lényege, hogy egyazon optikai szálra különböző hullámhosszú optikai jeleket multiplexálnak ezáltal téve lehetővé több kapcsolat egyidejű felépítését a szálon keresztül. A DWDM hálózatokban használt kapcsoló és forgalomirányító eszközöknek tudniuk kell kezelni ezt a fajta multiplexálást.

Tekintsünk két alkalmazást, amelyek egy DWDM hálózaton keresztül kommunikálnak egymással. Mindezt anélkül teszik, hogy teljes egészében ismernék a hálózatban használt protokollokat és átviteli technológiákat. Kizárólag az *alkalmazási réteg* segítségével kommunikálnak. Ez a réteg közvetlenül használja a *logikai hálózati réteg* szolgáltatásait. Ez utóbbi felel a kapcsolat logikai felépítéséért és kezeléséért, illetve biztosítja a hozzáférést az *(elektronikus) fizikai réteghez* ahol a jel tényleges átvitele történik. Ennek a rétegnek már semmilyen információja nincs arról, hogy az átvitt elektronikus jel mely alkalmazásokhoz tartozik. A DWDM hálózatokban az átvitel optikai jelek használatával történik az elektronikus fizikai réteg alatt található *optikai fizikai rétegben.* Az elektronikus jelet a hálózatba belépéskor optikai jellé, majd a hálózatból kilépéskor vissza kell konvertálni. A felvázolt módszer előnye, hogy minden rétegnek külön felelőssége van és ezáltal a saját funkcionalitását a többi réteg részletes ismerete nélkül képes elvégezni.

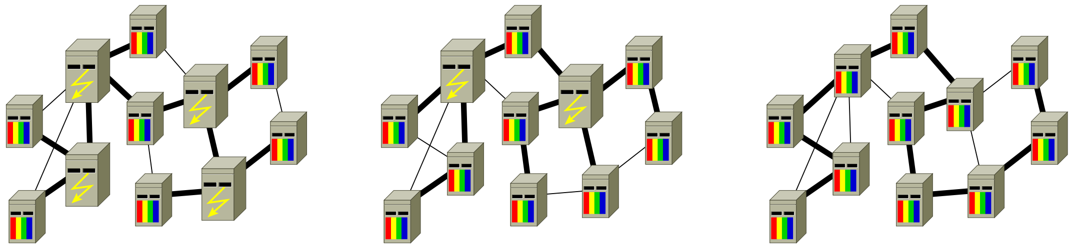
A *transzparens DWDM* hálózatokban az optikai jelek továbbítását és forgalomirányítását csak az optikai réteget használó eszközök, *optikai jelismétlők* és *optikai forgalomirányítók (OXC-k)* végzik. A jelismétlők csupán továbbítják a jelet annak megváltoztatása nélkül. Az OXC-k ezzel szemben képesek kezelni a hullámhossz konverziókat és a multiplexálást, amelyek a forgalomirányításhoz elengedhetetlenek. Sajnos azonban az alkalmazott technológia bonyolultsága és magas költsége egyelőre nem teszi lehetővé az OXC-k tömeges alkalmazását. Egy olcsóbb megoldás lehet a forgalomirányítást az eggyel feljebbi, elektronikus fizikai rétegben elvégezni úgynevezett *elektronikus forgalomirányítók (EXC-k)* segítségével. Ekkor minden egyes belső csomópontban ahol forgalomirányítást végzünk, az optikai jelet elektronikus jellé majd vissza kell alakítani. Ez késleltetést hoz a rendszerbe és a transzparencia elvesztésével jár.

Az EXC-ket is tartalmazó DWDM hálózatokat *opaque DWDM* hálózatoknak nevezzük jelezve, hogy az elektronikus konverzió miatt nem transzparensek. Ezekben a hálózatokban tehát a jelek továbbítását optikai jelismétlők végzik (az optikai rétegben), a forgalomirányítás viszont EXC-k segítségével az elektronikus rétegben történik. A célunk olyan opaque DWDM hálózatot építeni, ahol az alkalmazott EXC-k száma minimális.

Az általunk tekintett hálózattervezési probléma a következő. Adott egy gerinchálózati infrastruktúra, amely csomópontokból és az őket összekötő optikai szálakból áll. Néhány csomópontot terminálként kezelünk, ezek között merülnek fel a hálózatban az átviteli igények, melyek várható mennyiségét egy adott forgalommátrix írja le. A feladat annak meghatározása, hogy mely csomópontokban van szükség forgalomirányításra (és ezáltal egy-egy EXC-re) annak érdekében, hogy az adott forgalmat le tudjuk bonyolítani. A kapott megoldás jóságát különböző költségfüggvények (vagy azok kombinációja) alapján értékelhetjük. Ilyenek lehetnek például a használt eszközök vagy linkek költsége, a késleltetés, vagy akár a transzparencia elvesztése. Amennyiben összetett költségfüggvénnyel van dolgunk egzakt matematikai megoldások keresése helyett tipikusan valamilyen lágy számítási módszert érdemes használni. A szerző társaival egy genetikus algoritmus alapú megközelítést mutat be példaként [C1].

A disszertációban egy egyszerűbb megközelítést követünk, nevezetesen a minimalizálandó költségfüggvény a felhasznált EXC-k száma. A modellünk szerint minden csomópontnak kommunikálnia kell tudnia minden másikkal és nincs szükség védelmi utak kialakítására. Ennek megfelelően bármely pontpár között egy út létezését követeljük meg.

A matematikai modellünk gráfokon alapul. A hálózat csomópontjait egy G gráf csúcsai reprezentálják. A meglévő optikai szálaknak a gráf élei felelnek meg. A kommunikációs utak kialakítása a fentiek értelmében G egy T feszítőfájának megkeresését jelenti. Feltételezzük, hogy hullámhossz konverzióra és forgalomirányításra (tehát EXC-re) pontosan azokban a csomópontokban van szükség, amelyek legalább három másik csomóponttal állnak közvetlen kapcsolatban. A modellünkben ez azt jelenti, hogy minimalizálni szeretnénk a T feszítőfa legalább harmadfokú csúcsainak számát [C4, C7]. Az 1. ábra arra mutat példát, hogy miként csökkenthető a hálózat áttervezésével a szükséges EXC-k száma.



(a) (b) (c)

1. ábra. Az EXC-k számának csökkentése a hálózat újratervezésével

Matematikai modell

Először definiáljuk az optimalizálási probléma fogalmát.

Definíció. [2] *Egy* $\mathcal{P}$ optimalizálási problémát *egy* $(I_{\mathcal{P}}, \mathrm{SOL}_{\mathcal{P}}, m_{\mathcal{P}}, \mathrm{goal}_{\mathcal{P}})$ *négyes ír le, ahol*

1. $I_{\mathcal{P}}$ *jelöli* $\mathcal{P}$ bemeneti példányainak *halmazát;*

2. $\mathrm{SOL}_{\mathcal{P}}$ *egy olyan függvény, amely minden* $x \in I_{\mathcal{P}}$ *bemeneti példányhoz annak* érvényes megoldásait *rendeli;*

3. $m_{\mathcal{P}}$ *a* célfüggvény *amely minden olyan* (x, y) *párra definiált, melyre* $x \in I_{\mathcal{P}}$ *és* $y \in \mathrm{SOL}_{\mathcal{P}}(x)$. *Minden ilyen párra* $m_{\mathcal{P}}(x, y)$ *adja meg az* y *érvényes megoldás értékét. Ezt az* m*-et minimalizálási problémák esetén* költségfüggvénynek, *maximalizálási problémák esetén pedig* hasznosságfüggvénynek *is nevezzük;*

4. $\mathrm{goal}_{\mathcal{P}} \in \{\mathrm{MIN}, \mathrm{MAX}\}$ *írja le, hogy* $\mathcal{P}$ *minimalizálási vagy maximalizálási probléma.*

A *feszítőfa optimalizálási problémák* esetében a feladat egy G összefüggő gráf egy olyan T feszítőfáját megtalálni, amely minimalizál vagy maximalizál egy adott $m(.)$ célfüggvényt. Általános esetben megengedjük, hogy G csúcsaihoz súlyok legyenek rendelve, és hogy ezen súlyokat figyelembe vegyük $m(T)$ kiszámításakor. Példaként említjük a Minimális Súlyú Feszítőfa [6, 19, 24], és a Minimális Átmérőjű Feszítőfa [14, 15] problémákat. A feszítőfa optimalizálási problémák egy jó áttekintését adja [27].

Egy feszítőfa optimalizálási probléma *fokszám alapú*, ha $m(T)$ kizárólag T fokszámaitól függ. Amennyiben G csúcsai súlyozottak, $m(T)$ függhet ezen súlyoktól is. Formálisan, ha $d_T(v)$ jelöli a v csúcs T-beli fokát, $c(v)$ pedig a súlyát, akkor $m(T)$ a $(d_T(v); c(v))$ alakú pároktól függhet. A disszertációban az olyan speciális célfüggvényeket vizsgáljuk, melyek a következő alakban állnak elő:

$$m(T) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i \sum \{c(v) : d_T(v) = i\}, \qquad (1)$$

valamely f_i-re, ahol $c(v) \equiv 1$ felel meg a súlyozatlan esetnek.

Jelölések és definíciók

A dolgozatban egy $G = (V, E)$ *gráf* alatt egy irányítatlan egyszerű gráfot értünk $V(G) = V$ csúcshalmazzal és $E(G) = E$ élhalmazzal. A csúcsok számát $n = |V(G)|$, az élek számát pedig $m = |E(G)|$ jelöli. Amennyiben másként nem említjük, a dolgozatban szereplő gráfokról feltesszük, hogy összefüggőek. Legyen X és Y két részhalmaza $V(G)$-nek. Ekkor $G[X]$ az X részhalmaz által feszített részgráfja G-nek, $\mathrm{comp}_G(X)$ vagy $\mathrm{comp}(X)$ pedig $G[X]$ komponenseinek száma.

A G gráf egy T *feszítőfája* G egy olyan körmentes összefüggő részgráfja, amely G minden csúcsát tartalmazza. G éleit G*-éleknek*, T éleit T*-éleknek* vagy *faéleknek*, $E(G) \setminus E(T)$ elemeit pedig *nemfa-éleknek* hívjuk. Egy u és egy v csúcs G*-szomszédos*, ha fut köztük G-él, illetve T*-szomszédos*, ha fut köztük T-él. Egy v csúcs G*-foka* (T*-foka*) a G-szomszédjainak (T-szomszédjainak) száma és $d_G(v)$-vel ($d_T(v)$-vel) jelölt. Amikor az érthetőséget nem rontja, a G-t esetlegesen elhagyjuk ezen fogalmakból és jelölésekből. A v csúcs szomszédainak halmazát $N(v)$ jelöli. Amennyiben $d_G(v) = 1$ a v csúcsot *lelógó* csúcsnak nevezzük. A G gráfban előforduló legnagyobb fokszámot $\Delta(G)$ vagy Δ jelöli. A G gráf r*-reguláris* ha minden csúcsának foka r. Egy v csúcs *levél*, *továbbító csúcs*, illetve *elágazás*, ha fokszáma 1, 2, illetve 3. A továbbító csúcsok és elágazások alkotják a *belső csúcsok* halmazát. T leveleinek halmazát $L(T)$, belső csúcsainak halmazát pedig $I(T)$ jelöli. Jelölje $\mathrm{ml}(G)$ azt a minimális számot ahány levele G egy feszítőfájának lehet. Egy $X \subseteq V(G)$ csúcshalmaz G*-független* (vagy független) ha nem feszít G-élet, és T*-független* ha nem feszít T-élet. Ez utóbbi esetben természetesen X még feszíthet G-élet. G legnagyobb független csúcshalmazának mérete $\alpha(G)$. Egy T feszítőfa *levélfüggetlen fa* amennyiben levelei G-függetlenek. A levélfüggetlen fák fontos szerepet kapnak a disszertációban a közelítő algoritmusok elemzésekor.

A gráf egy olyan egyszerű útját amely minden csúcson pontosan egyszer megy át *Hamilton útnak* nevezzük. Egy ugyanezen tulajdonsággal bíró kör neve *Hamilton kör*. A G gráf *felfűzhető* amennyiben létezik benne Hamilton út. K_n jelöli az n csúcsú teljes gráfot, C_n az n csúcsú kört, K_{n_1,n_2} pedig az n_1 és n_2 méretű osztályokkal rendelkező teljes páros gráfot. Speciálisan, a $K_{1,3}$ gráf neve *karom*. Egy gráf *karommentes* ha nem tartalmaz $K_{1,3}$-t feszített részgráfként.

2. Kutatási célok

A disszertációban bemutatott kutatást egyaránt motiválják a telekommunikációs hálózatok tervezési kérdései és kombinatorikai alkalmazások. Célunk olyan eredmények elérése, amelyek mindkét területen felhasználhatóak. Egyszerű lépésekből felépülő hatékony közelítő algoritmusokat keresünk és bizonyítjuk a közelítések jóságát. Végül néhány algoritmust a gyakorlatban is megvizsgálunk, véletlen gráfokon vett futásukat kielemezzük.

Kutatásunk egy része a gráfok úgynevezett vulnerabilitási paramétereinek vizsgálatára irányul. Kapcsolatot mutatunk ezen paraméterek és a feszítőfák levélszáma továbbá a Hamilton utak elmélete között. A vulnerabilitási paraméterek fontos szerepet kapnak a közelítő algoritmusaink elemzése során is.

Először formálisan definiáljuk a dolgozatban tárgyalt fokszám alapú feszítőfa optimalizálási problémákat melyek célfüggvénye (1) alakú.

Probléma: MINIMÁLIS ELÁGAZÁSSZÁMÚ FESZÍTŐFA
Bemenet: Egy G összefüggő irányítatlan gráf.
Cél: Találjuk meg G egy olyan T feszítőfáját amely minimalizálja a legalább harmadfokú csúcsok (elágazások) számát, azaz a következő célfüggvényt: $m(T) = \lvert\{v : d_T(v) \geq 3\}\rvert$.

Probléma: MINIMÁLIS LEVÉLSZÁMÚ FESZÍTŐFA
Bemenet: Egy G összefüggő irányítatlan gráf.
Cél: Találjuk meg G egy olyan T feszítőfáját amely minimalizálja az elsőfokú csúcsok (levelek) számát, azaz a következő célfüggvényt: $m(T) = \lvert\{v : d_T(v) = 1\}\rvert$.

Probléma: MAXIMÁLIS BELSŐCSÚCS-SZÁMÚ FESZÍTŐFA
Bemenet: Egy G összefüggő irányítatlan gráf.
Cél: Találjuk meg G egy olyan T feszítőfáját amely maximalizálja a legalább másodfokú csúcsok (belső csúcsok) számát, azaz a következő célfüggvényt: $m(T) = \lvert\{v : d_T(v) \geq 2\}\rvert$.

Probléma: MAXIMÁLIS BELSŐCSÚCS-SÚLYÚ FESZÍTŐFA
Bemenet: Egy G összefüggő irányítatlan gráf csúcsain egy $c : V(G) \to \mathbb{Q}$ súlyfüggvénnyel.
Cél: Találjuk meg G egy olyan T feszítőfáját amely maximalizálja a legalább másodfokú csúcsok (belső csúcsok) összsúlyát, azaz a következő célfüggvényt: $m(T) = \sum \{c(v) : d_T(v) \geq 2\}$.

Vegyük észre, hogy ezen problémák a HAMILTON ÚT probléma általánosított eseteinek tekinthetők és ezért NP-nehezek. Így célunk a közelíthetőségi tulajdonságaik felderítése. A disszertációban hatékony közelítő algoritmusokat mutatunk be, illetve néhány negatív approximálhatósági eredményt is adunk.

A MINIMÁLIS ELÁGAZÁSSZÁMÚ FESZÍTŐFA probléma esetében megmutatjuk, hogy nem létezik általános gráfokra is alkalmazható hatékony approximáció. Ezután egy speciális gráfosztályra, az egyenletesen sűrű gráfokra mutatunk egy közelítő algoritmust, amely persze tetszőleges gráfra is alkalmazható heurisztikusan. Egy másik, a Minimális Elágazásszámú Feszítőfa problémát megoldó heurisztika alapja lehet az a megfigyelés, hogy az elsőfokú csúcsok számának csökkentése a legtöbb esetben csökkenti az elágazások számát is. Ez indokolja egyéb fokszám alapú feszítőfa optimalizálási problémák vizsgálatát is. Elsőként tekintjük a Minimális Levélszámú Feszítőfa problémát. Lu és Ravi [20] belátták, hogy a P$\neq$NP feltevés mellett erre a problémára nem létezik konstans approximáció. Azonban a célfüggvény komplementálásával, amikor tehát a nem-levelek (belső csúcsok) számát szeretnénk maximalizálni és nem a levelek számát minimalizálni, jól közelíthető problémát kapunk: a Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa problémára több hatékony közelítő algoritmust is bemutatunk. Ezek az algoritmusok heurisztikaként alkalmazhatóak a Minimális Elágazásszámú Feszítőfa és a Minimális Levélszámú Feszítőfa problémákra is.

További célunk a gráfok vulnerabilitási paramétereivel kapcsolatos eredmények bemutatása. Ezek a paraméterek azt mérik, mennyi kárt tudunk okozni egy gráf szerkezetében néhány „fontos” részének eltávolításával. Kapcsolatban állnak a Hamilton utak elméletével és, amint a dolgozatban megmutatjuk, a feszítőfák levélszámával is.

3. A kutatási módszerek és eredmények áttekintése

A dolgozatban több fokszám alapú feszítőfa optimalizálási problémát is megvizsgálunk, melyek valamennyien a Hamilton út probléma általánosításai. Eredményeinket négy téziscsoportba rendeztük.

1. téziscsoport: A 3. fejezet a Minimális Elágazásszámú Feszítőfa problémát tárgyalja. Ismertetünk mind pozitív mind negatív approximációs eredményeket. Egyrészt bemutatjuk a MinBST algoritmust, amely minden egyenletesen sűrű gráfban (így hívunk egy gráfot, ha minden fokszáma legalább cn valamely c konstansra) talál egy legfeljebb $3\left\lceil\log_{\frac{1}{1-c}} n\right\rceil + 1$ darab elágazást tartalmazó feszítőfát, lásd 3.3.1 tétel. Másrészt adunk egy approximációs faktor megőrző redukciót a Minimális Halmazfedés problémáról a Minimális Elágazásszámú Feszítőfa problémára és ezáltal belátjuk, hogy ez utóbbira nem adható $\Omega(\log n)$-nél jobb közelítés ha P$\neq$NP. A 3. fejezetben bemutatott eredményeket eredetileg a [C4] publikáció tartalmazza.

2. téziscsoport: A 4. fejezet bemutatja azon eredményeinket, melyek a feszítőfák levélszámának és két vulnerabilitási paraméternek, a scattering számnak [17, 28] és a vágás-aszimmetriának (4.3.1 definíció) a kapcsolatáról szólnak. Ezen eredmények egy részét felhasználjuk az 5. fejezetben a Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa problémára adott közelítő algoritmusok elemzésekor. A 4.1. szakaszban általánosítjuk a Hamilton utak létezésére vonatkozó jól ismert szükséges feltételt és belátjuk, hogy egy G gráf minden feszítőfájának legalább eggyel több levele van, mint a gráf $\mathrm{sc}(G)$ scattering száma (4.1.5 tétel). Amennyiben a gráf maga is egy fa, a scattering számának segítségével felső korlátot is adhatunk a leveleinek számára (4.1.7 tétel). A 4.3. szakaszban először bemutatjuk a G gráf ca(G) vágás-aszimmetriájának néhány alapvető tulajdonságát. Nevezetesen belátjuk, hogy ca(G) = 0 pontosan akkor ha G teljes gráf vagy kör (4.3.2 tétel), illetve, hogy a ca(G) ≤ 1 elégséges feltétele egy G-beli Hamilton út létezésének (4.3.6 tétel). Sajnálatos módon egy Hamilton úttal rendelkező gráf vágás-aszimmetriája ennél jóval nagyobb is lehet (4.3.7 tétel). A 4.3. szakaszban definiáljuk a G gráf li(G) levélfüggetlenségét is mint az a legnagyobb szám, amekkora független halmazt találhatunk G egy feszítőfájának levelei között. Ez tulajdonképpen egy alternatív definíciója lehet a vágás-aszimmetriának, hiszen minden G gráfra igaz, hogy li(G) = ca(G) + 1 (4.3.10 tétel). A 4.3.13 következmény megmutatja, hogy a levélfüggetlenség és a minimális összefüggő lefogó csúcshalmaz méretének összege éppen n, ezzel bizonyítva, hogy mind a vágás-aszimmetria, mind a levélfüggetlenség kiszámítása NP-nehéz probléma (4.3.14 tétel). A 4. fejezetben bemutatott eredményeket eredetileg a [J3], a [J4], és a [C5] publikációk tartalmazzák.

3. téziscsoport: Az 5. fejezet a Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa problémát tárgyalja. Először bemutatjuk az ILST algoritmust, amely egy olyan feszítőfát szolgáltat, melynek levelei függetlenek. Ezután belátjuk, hogy egy ilyen tulajdonsággal rendelkező feszítőfa mindig 2-approximációt jelent a Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa problémára (5.2.2 tétel). Az 5.2. szakaszban három különböző bizonyítását is megadjuk ennek az állításnak: az első egy direkt bizonyítás, a második a 4. fejezet eredményeit használja, a harmadik pedig a lineáris programozás egy primál-duál módszerén alapul. Az ILST algoritmust tovább finomítva kapjuk az RDFS algoritmust, amely 3/2-közelítést ad karommentes gráfokra (5.4.2 tétel) és 6/5-közelítést ad 3-reguláris gráfokra (5.4.4 tétel). Az 5.5. szakaszban bemutatjuk a LOST algoritmust, és a fent említett primál-duál módszer továbbfejlesztésével belátjuk, hogy 7/4-közelítést ad a Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa problémára lelógó csúcsot nem tartalmazó gráfokban (5.5.2 tétel). Az 5.6 szakaszban a súlyozott csúcsok esetét, a Maximális Belsőcsúcs-súlyú Feszítőfa problémát tekintjük át. Ismertetjük a WLOST algoritmust, amely lelógó csúcsokkal nem rendelkező gráfokban $(2\Delta - 3)$-közelítést ad (5.6.2 tétel). Ennek az algoritmusnak a továbbfejlesztésével nyerjük az RWLOST algoritmust, amely 2-közelítést ad lelógó csúcsokkal nem rendelkező karommentes gráfokban (5.6.6 tétel). Az 5.7. szakaszban az eddigiektől eltérő nézőpontból vizsgáljuk a Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa problémát: ahelyett, hogy egy kevés levelű feszítőfát keresnénk, egy fix q számhoz keresünk egy olyan legfeljebb q levelű részfát, amely az input gráf lehető legtöbb csúcsát tartalmazza. Ez a megközelítés a Leghosszabb Út probléma általánosításának tekinthető (5.7.4 tétel). Az 5.8. szakaszban belátjuk, hogy ha egy n csúcsú karommentes gráf minden $(q+1)$-elemű független csúcshalmazának fokszámösszege legalább $n - q$, akkor a gráfnak van legfeljebb q levelű feszítőfája (5.8.1 tétel). Az 5. fejezetben bemutatott eredményeket eredetileg a [C4], a [C6], a [J3], a [J4], és a [J5] publikációk tartalmazzák.

4. téziscsoport: Az 5.9. szakasz bemutatja a dolgozatban tárgyalt néhány algoritmus gyakorlati vizsgálatát. Véletlen gráfokon vett futások eredményeit vizsgálva hasonlítjuk össze a különböző bejáró algoritmusok által adott feszítőfákat.

4. Új kutatási eredmények

1. téziscsoport: Minimális Elágazásszámú Feszítőfa probléma

A 3. fejezetben a Minimális Elágazásszámú Feszítőfa problémát vizsgáljuk, amely arról szól, hogy egy G input gráfnak keressük azt a T feszítőfáját, amelyben az elágazások száma minimális G összes feszítőfája közül. Az elágazás nélküli feszítőfák (ha léteznek ilyenek) éppen G Hamilton útjai, ezért a problémára nem remélhetünk egzakt polinom idejű megoldást. Így kutatásainkat a közelíthetőségi tulajdonságok feltérképezésére összpontosítjuk. A Minimális Elágazásszámú Feszítőfa problémát először Gargano és társai vizsgálták [11]. Belátták, hogy NP-teljes annak eldöntése, hogy valamely fix k-ra létezik-e legfeljebb k elágazást tartalmazó feszítőfája az adott gráfnak. Később egy algoritmust is adtak [10] amely megtalál egy egyetlen elágazással rendelkező feszítőfát (úgynevezett feszítőpókot) amennyiben a G input gráf minden 3-elemű független csúcshalmazában a fokszámösszeg legalább $|V(G)| - 1$. A páros input gráfok esetét [9] tárgyalja. Flandrin és társai olyan feszítőpók létezését vizsgálták, melynek egyetlen elágazása a G gráf egy előre rögzített csúcsa [8]. Megmutatták, hogy ilyen mindig található, amennyiben G-ben a minimális és a maximális fokszám összege legalább $|V(G)|$.

A bemutatott negatív közelíthetőségi eredmény a Minimális Halmazfedés problémán és annak approximációs faktor megőrző visszavezetésén alapul. Idézzük fel a következő definíciót [16]:

Probléma: Minimális Halmazfedés
Bemenet: Egy $\mathcal{S}$ alaphalmaz és részhalmazainak egy $\Sigma = \{S_j\}_{j=1}^{s}$ halmaza.
Cél: Megtalálni Σ részhalmazainak minimális számú olyan részhalmazát, melyek uniója lefedi a teljes $\mathcal{S}$ alaphalmazt.

Alon és társai belátták [1], hogy a Minimális Halmazfedés probléma nem approximálható jobban (ha P≠NP) mint a következő multiplikatív faktor: $\Omega(\log |\mathcal{S}|)$. Azaz a Minimális Halmazfedés probléma nem APX-beli. (Az APX a konstans faktorral approximálható problémák osztálya.) Ezen eredmények alapján a dolgozatban bemutatott visszavezetés következménye az alábbi tézis:

1.1. Tézis. [C4] *A* Minimális Elágazásszámú Feszítőfa *probléma nem APX-beli. Továbbá a P≠NP feltevés mellett nem approximálható jobban mint a következő multiplikatív faktor:* $\Omega(\log |V(G)|)$.

A dolgozatban bemutatunk egy, a Minimális Elágazásszámú Feszítőfa problémára vonatkozó pozitív közelíthetőségi eredményt. Bevezetjük a MinBST algoritmust, amely elsőként eléri a $\mathcal{O}(\log n)$ közelítő faktort minden olyan n csúcsú nem felfűzhető gráfra melynek fokszámai $\Omega(n)$ nagyságrendűek.

1.2. Tézis. [C4] *Legyen G egy n csúcsú m élű összefüggő gráf. Amennyiben G minden csúcsának foka legalább cn (valamilyen c konstansra), akkor a MinBST algoritmus $\mathcal{O}(m + n \log n)$ idő alatt talál egy olyan feszítőfát G-ben melynek legfeljebb $3 \left\lceil \log_{\frac{1}{1-c}} n \right\rceil + 1$ elágazása van.*

A MinBST algoritmus alapötlete a következő. Adott egy $G = (V, E)$ input gráf. Az algoritmus először tekint egy üres $H = (V, \emptyset)$ gráfot (feszítő erdőt), majd addig adja G néhány élét egyesével H-hoz, amíg ez utóbbi egy izolált csúcsokat nem tartalmazó feszítőerdő nem lesz. Ehhez minden egyes iterációban azt a v csúcsot választja ki, melynek a legtöbb G-szomszédja van H akkor még izolált csúcsai közt. Az iteráció részeként H-hoz hozzávesszük v minden olyan G-élét, amely H izolált csúcsába vezet. Amikor H már nem tartalmaz izolált csúcsokat, néhány további G-él hozzávételével összefüggővé, azaz feszítőfává alakítjuk. Az így kapott feszítőfa az algoritmus kimenete.

2. téziscsoport: Feszítőfa levelek és vulnerabilitás

A 4. fejezetben gráf-vulnerabilitási paraméterekkel foglalkozunk. Ezek a paraméterek arra használatosak, hogy lemérjék mennyi strukturális kárt tud okozni néhány „fontos" rész eltávolítása [3, 4, 12, 13, 28]. Mind a Hamilton utak elmélete mind a kommunikációs hálózatok tervezése gyakran használja ezen paramétereket gráfok struktúrájának leírására. A dolgozat mindkét témakörbe illeszkedik, elsőként elméleti eredményeket mutatunk be a vulnerabilitási paraméterek és a feszítőfák levélszámának kapcsolatáról, majd az 5. fejezetben felhasználjuk ezen eredményeket a Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa problémára adott approximációs algoritmusok elemzésére. Mindezek mellett elméleti eredményeinkből egy új 2-közelítő algoritmus adódik a Minimális Összefüggő Csúcsfedés problémára is.

A Hamilton utak elmélete és a gráf-vulnerabilitási paraméterek közti kapcsolatot az elemi gráfelmélet jól ismert tétele teremtette meg. Eszerint egy Hamilton úttal rendelkező gráfból k csúcsot elvéve a gráf legfeljebb $k + 1$ komponensre eshet szét. Ez a szükséges feltétel a gráf egy vulnerabilitási tulajdonságától függ. Egy ilyen kapcsolat létezése indokolja a két terület összefüggéseinek vizsgálatát és a vulnerabilitás alapú elégséges feltételek keresését. Nem meglepő tehát, hogy ez a kutatási terület mindig is jelentős figyelmet kapott [4].

A disszertációban két szorosan kapcsolódó vulnerabilitási paramétert, a scattering számot és a vágás-aszimmetriát vizsgáljuk meg. A scattering szám [17, 18, 28] azt mutatja meg, hány komponensre esik szét a gráf néhány csúcsának eltávolításával. A vágás-aszimmetria is hasonlóan működik, azonban esetében néhány összefüggő részgráfot és nem különálló csúcsokat távolítunk el a gráfból [J3, J4]. A dolgozatban a scattering szám segítségével alsó korlátot adunk egy gráf feszítőfáinak levélszámára, míg a vágás-aszimmetria segítségével felső korlátot adunk a gráf feszítőfáinak független leveleinek számára.

A scattering számot Jung az alábbi módon definiálta:

Definíció. [17] *Egy nem teljes $G = (V, E)$ gráf* scattering száma

$$\mathrm{sc}(G) = \max_{X \subset V, X \neq \emptyset} \{\mathrm{comp}(G[V \setminus X]) - |X| : \mathrm{comp}(G[V \setminus X]) \geq 2\}.$$

Definíció szerint a teljes gráf scattering száma $\mathrm{sc}(K_n) = -\infty$.

Ennek analógiájára definiáltuk a vágás-aszimmetriát. A definícióban szereplő maximum itt G minden nem-triviális vágásán vétetik. A vágás-aszimmetria tehát azt mutatja, hogy egy ilyen vágás két oldala mennyire térhet el a komponensek számának tekintetében.

Definíció. [J3] *A $G = (V, E)$ gráf vágás-aszimmetriája*

$$\mathrm{ca}(G) = \max_{X \subset V, X \neq \emptyset} \{\mathrm{comp}(G[V \setminus X]) - \mathrm{comp}(G[X])\}.$$

A fenti tételt újrafogalmazhatjuk a scattering szám segítségével: minden felfűzhető (azaz Hamilton úttal rendelkező) gráf scattering száma legfeljebb egy, azaz a scattering szám segítségével egy szükséges feltételét kaphatjuk meg a Hamilton utak létezésének. A vágás-aszimmetria tulajdonságait vizsgálva megállapítjuk, hogy ez a paraméter elégséges feltételt nyújt a felfűzhetőségre, nevezetesen ha a gráf vágás-aszimmetriája legfeljebb egy, akkor a gráf tartalmaz Hamilton utat. Sajnos egy felfűzhető gráf vágás-aszimmetriája is sokkal nagyobb lehet egynél. Ezek a Hamilton utak elméletébe illeszkedő főbb eredményeink.

2.1. Tézis. [J3, J4, C5] *A vágás-aszimmetria alaptulajdonságai:*

- $\mathrm{ca}(G) = 0$ *akkor és csak akkor ha G teljes gráf vagy kör;*
- $\mathrm{ca}(G) \leq 1$ *esetén G felfűzhető, azaz tartalmaz Hamilton utat;*
- *ha G egy n csúcsú felfűzhető gráf, akkor* $\mathrm{ca}(G) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$*;*
- *ha k egy tetszőleges olyan egész szám, melyre* $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ *akkor létezik olyan n csúcsú felfűzhető G gráf, melyre* $\mathrm{ca}(G) = k$*;*
- *ha Z egy olyan maximális méretű független csúcshalmaza G-nek melyre $G[V \setminus Z]$ összefüggő, akkor* $|Z| = \mathrm{ca}(G) + 1$*;*
- *a* $\mathrm{ca}(G)$ *mennyiség kiszámítása NP-nehéz.*

A 4. fejezet tartalmazza azon eredményeinket, melyek egy gráf vulnerabilitási paramétereinek és feszítőfái levélszámának kapcsolatára vonatkoznak.

Megmutatjuk, hogy egy legalább 3 csúcsú q levelű fa scattering száma $q/2$ és $q - 1$ közé esik, azaz ez a vulnerabilitási paraméter egy kettes szorzó erejéig leírja egy fa leveleinek számát. Belátjuk azt is, hogy egy fa vágás-aszimmetriája még ennél is többet mond a levelek számáról, nevezetesen pontosan megadja azt. Egy

Wiener Gáborral közös eredményünk szerint egy q levelű fa vágás-aszimmetriája mindig $q-1$.

A disszertációban bebizonyítjuk, hogy egy nem felfűzhető G gráf minden minimális levélszámú feszítőfájának levelei G-függetlenek. Ez a tény motiválja annak vizsgálatát, hogy hány G-független levele lehet G egy feszítőfájának. A gráf ezen tulajdonságát ragadja meg a következőképpen definiált levélfüggetlensége.

Definíció. [J3] *Legyen G egy összefüggő gráf és T a G gráf egy feszítőfája. A T fa G-beli* levélfüggetlensége*, melyet* $\mathrm{li}_G(T)$ *jelöl, az $L(T)$-beli maximális G-független csúcshalmaz mérete. A G* gráf levélfüggetlensége $\mathrm{li}_G(T)$ *maximuma G összes T feszítőfáját tekintve.*

Egy gráf levélfüggetlensége szoros kapcsolatban áll a vágás-aszimmetriájával, illetve a minimális összefüggő lefogó csúcshalmazának méretével. Az alábbi tézis ezen kapcsolatokat írja le, illetve nyilatkozik a levélfüggetlenség kiszámításának bonyolultságáról. Jelölje $\mathrm{cvc}(G)$ a G gráf minimális méretű olyan összefüggő részgráfot feszítő csúcshalmazának méretét, amely lefogja G minden élét.

2.2. Tézis. [J3, J4, C5] *Egy n csúcsú összefüggő G gráf levélfüggetlenségére teljesülnek az alábbiak:*

- $\mathrm{li}(G) = \mathrm{ca}(G) + 1$;
- *ha G nem teljes és nem egy kör, akkor* $\mathrm{li}(G) \geq \mathrm{ml}(G)$;
- $\mathrm{li}(G) = n - \mathrm{cvc}(G)$;
- $\mathrm{li}(G)$ *kiszámítása NP-nehéz.*

A 4. fejezet eredményeit a következő egyenlőtlenség sorozatban összegezhetjük. Az egyenlőtlenségek direkt bizonyítást adnak arra, hogy minden független levelekkel rendelkező feszítőfa 2-közelítést jelent a Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa problémára, illetve arra, hogy egy ilyen feszítőfa belső csúcsai 2-közelítést adnak a Minimális Összefüggő Csúcsfedés problémára. Ez utóbbi állítást eredetileg Savage látta be [25].

2.3. Tézis. [J3, J4, C5] *Legyen G egy n csúcsú összefüggő gráf amely nem teljes és nem egy kör. Ekkor*

$$\begin{aligned} n - \mathrm{sc}(G) - 1 \geq n - \mathrm{ml}(G) \geq n - \mathrm{li}(G) &= \mathrm{cvc}(G) \\ &= n - \mathrm{ca}(G) - 1 \geq n - \alpha(G) \geq \frac{1}{2}(n - \mathrm{sc}(G)). \end{aligned}$$

Ez közvetlen bizonyítja, hogy egy tetszőleges levélfüggetlenség fa 2-közelítést ad a Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa *problémára, illetve, hogy egy ilyen fa belső csúcsai 2-közelítést adnak a* Minimális Összefüggő Csúcsfedés *problémára.*

3. téziscsoport: Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa probléma

Az 5. fejezet azt a Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa problémát tárgyalja, amelyet az irodalomban már több módszerrel is megvizsgáltak. Fernau és társai egy pontos, de exponenciális futási idejű algoritmust adtak [7]. Prieto és Sloper belátták, hogy a probléma fix paraméteresen kezelhető [22, 23], azaz egy legalább k belső csúccsal rendelkező feszítő megtalálható $f(k)\mathcal{O}(n^c)$ időben. A dolgozatban mi a közelítő algoritmusok tekintetében vizsgáljuk meg a problémát, polinom időben szuboptimális megoldást szolgáltató algoritmusokat keresünk mind általános mind speciális gráfokban.

Elsőként bemutatjuk az ILST algoritmust, a mélységi keresés egy továbbfejlesztett változatát, amely adott G gráfban talál egy olyan feszítőfát, melynek levelei G-függetlenek. Ezután belátjuk, hogy egy ilyen tulajdonságú feszítőfa mindig 2-közelítést jelent a Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa problémára. Erre az állításra három különböző bizonyítást is adunk. Az első a gráfok vulnerabilitási paraméterein és azoknak a 4. fejezetben ismertetett tulajdonságain alapul. A második egy direkt bizonyítás, míg a harmadik a lineáris programozás egy primál-duál módszerét használja. Ezt a bizonyítást fejlesztjük tovább, amikor az 5.5. szakaszban ismertetett közelítő algoritmust elemezzük. Az ILST algoritmus működését külön is megvizsgáljuk r-reguláris gráfokra.

> **3.1. Tézis. [J3, C4]** *Az ILST algoritmus $\mathcal{O}(m)$-időben a* Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa *problémára 2-közelítést ad általános gráfokban, illetve $\frac{r+1}{3}$-közelítést ad r-reguláris gráfokban. Speciálisan, a közelítés faktora 3-reguláris gráfokra 4/3, 4-reguláris gráfokra pedig 5/3.*

Wiener Gáborral közös kutatásunk eredménye a disszertációban bemutatott RDFS algoritmus. Ez az algoritmus a DFS algoritmus finomítása abban az értelemben, hogy a bejárás során következőként meglátogatandó csúcsot specifikáljuk olyan esetekben is, amikor az eredeti DFS algoritmus több jelölt közül nem-determinisztikus módon választana. Az RDFS algoritmusban az aktuális csúcsnak mindig azt a még meg nem látogatott szomszédját látogatjuk meg következőként, amelynek a lehető legkevesebb meg nem látogatott szomszédja van. Belátjuk, hogy az RDFS algoritmus a Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa problémára 3/2-közelítést ad karommentes és 6/5-közelítést 3-reguláris gráfokban.

Az 5. fejezet fő eredménye a LOST algoritmus, amely egy kezdeti feszítőfából kiindulva egymás után alkalmaz lokális javítólépéseket (bizonyos javító szabályok alapján) egészen addig, amíg ez lehetséges. Amikor több javító szabály már nem alkalmazható, az algoritmus egy lokálisan optimális feszítőfát (LOST) szolgáltat.

Az approximációs faktor bizonyítása a lineáris programozás egy primál-duál módszerén alapul. Felépítünk egy primál programot úgy, hogy annak minden egész megoldása egy feszítőfa és annak belső csúcsainak karakterisztikus vektoraiból tevődik össze. Így a Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa probléma egy T^*

optimális megoldásához tartozóan a primál feladat egy $|I(T^*)|$ értékű megoldását kapjuk. Ezután két különböző duál megoldást is adunk annak érdekében, hogy ezt a mennyiséget $|I(T)|$ konstansszorosával felülről becsülhessük, ahol T az algoritmusunk által szolgáltatott LOST. Végül ezeket a felső becsléseket használjuk a közelítés bizonyításához.

> **3.2. Tézis. [J5, C6]** *A LOST algoritmus egy $\mathcal{O}(|V|^4)$-idejű $7/4$-közelítő algoritmus a* Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa *problémára olyan gráfokban, melyek nem tartalmaznak lelógó csúcsot.*

A dolgozatban szintén vizsgáljuk a súlyozott esetet, a Maximális Belsőcsúcs-súlyú Feszítőfa problémát és lokális javításokon alapuló közelítő algoritmusokat adunk megoldására.

> **3.3. Tézis. [J5, C6]** *Létezik olyan $\mathcal{O}(|V|^4)$-idejű algoritmus, amely $(2\Delta - 3)$-közelítést ad a* Maximális Belsőcsúcs-súlyú Feszítőfa *problémára lelógó csúcsot nem tartalmazó gráfokban.*
>
> *Létezik olyan $\mathcal{O}(|V|^4)$-idejű algoritmus, amely 2-közelítést ad a* Maximális Belsőcsúcs-súlyú Feszítőfa *problémára lelógó csúcsot nem tartalmazó karommentes gráfokban.*

Amellett, hogy kevés levéllel rendelkező feszítőfákat keresünk, a dolgozatban megvizsgálunk egy másik megközelítést is. Rögzítjük a levelek q számát és azt a kérdést igyekszünk megválaszolni, hogy a gráf hány csúcsa fedhető le egy legfeljebb q levéllel rendelkező részfával. Ez tulajdonképpen a leghosszabb út keresésének általánosítása.

Legyen G egy n csúcsú gráf és jelölje $\sigma_q(G)$ azt a minimális fokszámösszeget, mellyel G egy q-elemű csúcshalmaza rendelkezik. Ore tétele [21] szerint ekkor $\sigma_2(G) \geq n$ teljesülése esetén G rendelkezik Hamilton úttal. Bermond [5] megmutatta, hogy amennyiben G 2-összefüggő, akkor rendelkezik $\min\{n, \sigma_2(G)\}$ hosszú úttal. Broersma és Tuinstra pedig belátták, hogy ha valamely $2 \leq q \leq n-1$ egészre teljesül, hogy $\sigma_2(G) \geq n - q + 1$, akkor G-nek van q-levelű feszítőfája.

A disszertációban bemutatott $\leq q$-levelű részfákra vonatkozó eredmények ebbe a sorba illeszkednek. A következő tézis kimondásához szükségünk van az alábbi jelölésre: legyen S_q egy q-elemű független csúcshalmaza G-nek és legyen x_1 illetve x_2 az S_q csúcshalmaz két legnagyobb fokú csúcsa. Ekkor $\rho_{q,2}(G)$ a $\min_{S_q}\{d(x_1) + d(x_2)\}$ minimumot jelöli, amely minimum G összes q-elemű független csúcshalmazán vétetik. A $\leq q$-levelű részfákra vonatkozó eredményeinket a következő tézis foglalja össze.

3.4. Tézis. [J4, T2]

- *Legyen G egy n csúcsú összefüggő gráf és legyen $2 \leq q < \alpha(G)$ egy egész szám. Ekkor G-nek van legalább $\min\{\rho_{q,2}(G) + q - 1, n\}$ csúcsot tartalmazó legfeljebb q-levelű részfája. Mitöbb, létezik egy ilyen részfát megtaláló algoritmus.*

  Egyszerű következmény, hogy amennyiben $q' \geq 2$ egy olyan egész szám, melyre $q' \geq \alpha(G)$ vagy $\rho_{q',2}(G) \geq n - q' + 1$ teljesül, akkor G rendelkezik legfeljebb q'-levelű feszítőfával.

- *Legyen G egy n csúcsú összefüggő karommentes gráf. Ekkor tetszőleges $2 \leq q$ egészre $\sigma_{q+1}(G) \geq n - q$ esetén G rendelkezik legfeljebb q-levelű feszítőfával.*

- *Legyen T egy olyan fa, melynek több mint q levele van. Legyen továbbá T_q a T fának egy maximális méretű q levelű részfája. Ekkor létezik T-nek egy $(q+1)$-levelű T_{q+1} részfája úgy, hogy T_q részfája T_{q+1}-nak és T_{q+1} maximális méretű T összes $(q+1)$-levelű részfái közül. Mitöbb, a T_{q+1} részfát megkaphatjuk a T_q részfából az $E(T) - E(T_q)$ élhalmaz egy olyan leghosszabb útjának hozzávételével, melynek pontosan egyik végpontja T_q-beli.*

4. téziscsoport: Futási eredmények

Az 5.9. szakasz ismerteti a Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa problémával kapcsolatos futtatási eredményeinket, illetve azok analízisét. Megvizsgáljuk, hogy miként hat a LOST algoritmus kezdeti feszítőfájának levélszámára a feszítőfa előállításához használt bejáró algoritmus kiválasztása. Természetesen azt is megnézzük, miként csökkentik a levélszámot a különböző esetekben az alkalmazott lokális javítólépések. Négy bejáró algoritmust tekintünk: az első egy véletlen feszítőfából, a második egy DFS-fából, a harmadik egy úgynevezett FIFO-DFS-fából (lásd a 2.2. szakaszt), a negyedik pedig egy úgynevezett RDFS-fából (lásd az 5.4. szakaszt) kiindulva alkalmazza a LOST algoritmus néhány javító szabályát ameddig csak lehetséges. A futtatásokhoz két különböző módszerrel is generáltunk bemeneti gráfokat. Mindkét módszer egy egyszerű úthoz ad hozzá véletlenszerűen választott éleket. Ezáltal az algoritmusaink futását felfűzhető gráfokon vizsgálhatjuk, ahol ismerjük az optimális megoldás értékét.

4.1. Tézis. [T2] *Tapasztalati úton megvizsgáltunk különböző feszítőfa építő módszereket abból a szempontból, hogy alkalmazásuk a LOST algoritmus kezdeti feszítőfájának megtalálására miként befolyásolja a kapott levelek számát. Minden egyes esetben azt is megnéztük, hogy a*

LOST algoritmus lokális javítólépéseinek alkalmazása miként csökkenti a levélszámot. Futtatásainkat több 100, 300, és 500 csúcsú bemeneti gráfra végeztük el. Az eredmények azt mutatták, hogy a LOST algoritmus az approximációs faktorban lévő elméleti értéknél sokkal jobban teljesít a gyakorlatban, ezért hatékonyan alkalmazható heurisztikaként mind a Maximális Belsőcsúcs-számú Feszítőfa, *mind a* Minimális Levélszámú Feszítőfa, *mind pedig a* Minimális Elágazásszámú Feszítőfa *problémára. Az alábbi pontokban foglaljuk össze futtatási tapasztalatainkat és következtetéseinket.*

- Erős kapcsolat van a bemeneti gráf átlagos fokszáma és az eredményül kapott feszítőfa levélszáma között. Algoritmusaink sűrű gráfokon adják a legjobb eredmény (azaz a legkevesebb levelet), ami nem meglepő, hiszen ekkor a bejárás során ritkábban kell visszalépnünk, a lokális javítások közül pedig több lesz alkalmazható. Másrészt, ha a gráf átlagos fokszáma közel van 2-höz, akkor nagy valószínűséggel találunk kevés levelű megoldást, hiszen ekkor az élek és így a lehetséges feszítőfák száma is alacsonyabb. A legérdekesebb esetet akkor kapjuk amikor gráfunk átlagos fokszáma e két szélsőségtől távol esik. Megfigyeltük, hogy bármilyen tartományban legyen is az átlagfokszám, a két különböző véletlen bemeneti gráf generáló módszer eredményei között nem látszik jelentős különbség.

- Az RDFS algoritmuson alapuló algoritmus minden vizsgált bemeneti gráf csoport esetén átlagos értelemben jobban teljesített mint a másik három módszer. Ráadásul, figyelmen kívül hagyva a nagyon ritka gráfokat, ez akkor is igaz, ha az RDFS algoritmus után nem futtatunk lokális javító lépéseket. Ez arra mutat rá, hogy a kezdeti feszítőfa jó megválasztása adott esetben többet számít a levelek végső számának csökkentésében, mint a lokális javító lépések egy rossz kezdeti feszítőfán történő alkalmazása. Az RDFS algoritmus jó közelítő faktort ad karommentes és 3-reguláris gráfokra. Amint futtatási eredményeink mutatják, általános gráfokra is hatékonyan alkalmazható.

- Minden egyes vizsgált gráf csoportra majdnem ugyanazt a sorrendet kaptuk az egyes algoritmusokat a kapott feszítőfák levélszáma alapján összehasonlítva. A lokális javítások végrehajtása utáni állapotot vizsgálva ez a sorrend a következő: a legjobb az RDFS algoritmus, ezt követi a véletlen feszítőfa, a FIFO-DFS-fa, majd a DFS-fa. A lokális javítások erejét és fontosságát hangsúlyozza az a tény, hogy a javítások végén jobb eredményt kapunk, ha véletlen fából indultunk ki, mintha FIFO-DFS vagy DFS algoritmussal hozzuk létre a kezdeti feszítőfát. Megjegyezzük, hogy a LOST algoritmus 7/4-es közelítő faktoránál minden esetben jelentősen jobb megoldást kaptunk.

- Az RDFS algoritmus alapú módszer leggyengébben olyan bemeneti gráfokon teljesít, melyek átlagos fokszáma 3,5–4 körüli. Ugyanez az érték 4–4,5 körül adódott a másik három algoritmusra. Az RDFS algoritmus alapú módszer az optimálishoz nagyon közeli megoldást szolgáltatott a legtöbb olyan esetben, amikor a bemeneti gráf átlagos fokszáma legalább 10 volt. Ebből a szempontból jelentősen felülmúlta a többi algoritmust. Ugyanezen érték $n/5$-nek adódott a véletlen feszítőfa alapú módszer és $n/3$-nak a FIFO-DFS és a DFS alapú módszerek esetében.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni hálámat mindazok iránt, akik így vagy úgy segítettek a disszertáció elkészítésében. Mindenekelőtt megkülönböztetett köszönettel tartozom családomnak kitartó türelmükért és támogatásukért. Külön köszönet illeti témavezetőmet, Recski Andrást azért, mert bevezetett a gráfelmélet rejtelmeibe, mert segítségével a Számítástudományi és Információelméleti Tanszék tagjává válhattam, mert megismertette velem a Steiner-fák és feszítőfák érdekes kutatási területeit és végül de nem utolsó sorban mert fontos ötletekkel és iránymutatásokkal támogatta kutatásaimat. Külön köszönet illeti Wiener Gábor szerzőtársamat is, akivel néhány a disszertációban is megtalálható témán sikeresen dolgoztunk együtt. Kívánom, hogy a jövőben sokkal jobban tudjon Carcassonne-t játszani :) . Köszönetemet szeretném kifejezni Friedl Katalinnak, Szabó Jácintnak és Wettl Ferencnek, akik miután átolvasták a dolgozatot, nagyon értékes megjegyzéseikkel javították annak színvonalát. Köszönöm továbbá Sebő Andrásnak, hogy segítséget nyújtott a lineáris programozás és a közelítő algoritmusok témakörében és hogy vendégkutatóként fogadott engem az IMAG Gráfelmélet és Kombinatorikus Optimalizálás kutatócsoportjában a gyönyörű francia városban, Grenoble-ban. Köszönöm Frank Andrásnak, hogy gráfelméleti és lineáris programozás kurzusain kutatásaimat megalapozó elméleti tudást szerezhettem. Végül szeretném megemlíteni, hogy kutatásaim során az OTKA 042559, 044733 és 67651 számú, illetve az Európai MCRTN Adonet hálózat 2003-5044438 számú pályázatának nagylelkű támogatását élveztem.

A szerző publikációi

Folyóirat cikkek

[J5] G. Salamon. Approximating the Maximum Internal Spanning Tree problem. *Theoretical Computer Science, MFCS 2007 special issue*, 410:5273–5284, 2009.

[J4] G. Salamon. Vulnerability bounds on the number of spanning tree leaves. *Ars Mathematica Contemporanea*, 2:77–92, 2009.

[J3] G. Salamon and G. Wiener. On finding spanning trees with few leaves. *Information Processing Letters*, 105:164–169, 2008.

[J1–J2] A. Recski, G. Salamon, and D. Szeszlér. Improving size-bounds for subcases of square-shaped switchbox routing. *Periodica Polytechnica, Electrical Engineering, BUTE, Budapest*, 48:55–60, 2003. Teljes változat: *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis, Sectio Mathematica*, 49:15–24, 2006.

Konferencia cikkek

[C8] G. Salamon. A Survey on Algorithms for the Maximum Internal Spanning Tree and Related Problems. Elfogadva: *International Symposium on Combinatorial Optimization (ISCO 2010)*, March 2010.

[C7] G. Salamon. Feszítőfa optimalizálási problémák a Hamilton utak általánosítására, (Spanning tree optimization problems for generalizing Hamiltonian paths, in Hungarian). In *XIII. Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka, Erdélyi Múzeum-Egyesület, (Proc.)*, pages 203–206, March 2008.

[C6] G. Salamon. Approximation algorithms for the Maximum Internal Spanning Tree problem. In *Proc. of the* 32^{nd} *International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2007)*, volume 4708 of *LNCS*, pages 90–102, August 2007.

[C5] G. Salamon and G. Wiener. Leaves of spanning trees and vulnerability. In *Proc. of the* 5^{th} *Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications (HJ 2007)*, pages 225–235, April 2007.

[C4] G. Salamon. Spanning tree optimization problems with degree-based objective functions. In *Proc. of the* 4^{th} *Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications (JH 2005)*, pages 309–315, June 2005.

[C3] A. Recski, G. Salamon, and D. Szeszlér. Improving size-bounds for subcases of square-shaped switchbox routing. In *Proc. of the John von Neumann PhD Conference, BUTE, Budapest*, pages 43–46, October 2003.

[C2] A. Pataricza, G. Salamon, and D. Varró. Formal verification of model transformation systems. In *Fast Abstracts of the* 4^{th} *European Dependable Computing Conference (EDCC 2002)*, pages 15–16, October 2002.

[C1] T. Cinkler, S. Győri, J. Harmatos, and G. Salamon. Dimensioning WDM-based multi-layer transport networks with grooming by genetic algorithm. In *Proc. of the* 7^{th} *European Conference on Networks and Optical Communication (NOC 2002)*, pages 44–51, June 2002.

Tézisek

[T2] G. Salamon. *Degree-Based Spanning Tree Optimization*. PhD thesis, Budapest University of Technology and Economics, Hungary, 2010.

[T1] G. Salamon. *Formal Verification of Model Transformation Systems*. Master's thesis, Budapest University of Technology and Economics, Hungary, 2002.

Független hivatkozások a publikációkra

On finding spanning trees with few leaves [J3]:

[R1] D. Eppstein. Paired approximation problems and incompatible inapproximabilities. Arxiv preprint arXiv:0909.1870, 2009.

[R2] H. Fernau, S. Gaspers, and D. Raible. Exact and parameterized algorithms for Max Internal Spanning Tree. In *Proc. of the* 35^{th} *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2009)*, volume 5911 of *LNCS*, pages 100–111, December 2009.

[R3] H. Fernau, S. Gaspers, D. Raible, and A. A. Stepanov. Exact exponential time algorithms for Max Internal Spanning Tree. Arxiv preprint arXiv:0811.1875, 2008.

[R4] M. Knauer and J. Spoerhase. Better approximation algorithms for the maximum internal spanning tree problem. In *Proc. of the* 11^{th} *Workshop on Algorithms and Data Structures (WADS 2009)*, volume 5664 of *LNCS*, pages 459–470, July 2009.

[R5] W. Yang, H.-R. Tseng, R.-H. Jan, and B.-Y. Shen. Broadcasting with the least energy is an NP-complete problem. *International Journal of Multimedia and Ubiquitous Engineering*, 3(3):55–65, 2008.

Approximation algorithms for the Maximum Internal Spanning Tree problem [C6]:

[R6] H. Fernau, S. Gaspers, and D. Raible. Exact and parameterized algorithms for Max Internal Spanning Tree. In *Proc. of the* 35^{th} *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2009)*, volume 5911 of *LNCS*, pages 100–111, December 2009.

[R7] H. Fernau, S. Gaspers, D. Raible, and A. A. Stepanov. Exact exponential time algorithms for Max Internal Spanning Tree. Arxiv preprint arXiv:0811.1875, 2008.

[R8] M. Knauer and J. Spoerhase. Better approximation algorithms for the maximum internal spanning tree problem. In *Proc. of the* 11^{th} *Workshop on Algorithms and Data Structures (WADS 2009)*, volume 5664 of *LNCS*, pages 459–470, July 2009.

Approximating the Maximum Internal Spanning Tree problem [J5]:

[R9] M. Knauer and J. Spoerhase. Better approximation algorithms for the maximum internal spanning tree problem. In *Proc. of the* 11^{th} *Workshop on Algorithms and Data Structures (WADS 2009)*, volume 5664 of *LNCS*, pages 459–470, July 2009.

További hivatkozások

[1] N. Alon, D. Moshkovitz, and S. Safra. Algorithmic construction of sets for k-restrictions. *ACM Transactions on Algorithms*, 2(2):153–177, 2006.

[2] G. Ausiello, P. Crescenzi, G. Gambosi, V. Kann, A. Marchetti-Spaccamela, and M. Protasi. *Complexity and Approximation*. Springer-Verlag, 1999.

[3] C. A. Barefoot, R. Entringer, and H. Swart. Vulnerability in graphs — a comparative survey. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 1:13–22, 1987.

[4] D. Bauer, H. Broersma, and E. Schmeichel. Toughness in graphs — a survey. *Graphs and Combinatorics*, 22:1–35, 2006.

[5] J-C. Bermond. On Hamiltonian walks. In *Proc. of the* 5^{th} *British Combinatorial Conference*, pages 41–51, 1975.

[6] O. Borůvka. O jistém problému minimálním (About a certain minimal problem, in Czech). *Práca Moravské Přirodovědecké Společnosti*, 3:37–58, 1926.

[7] H. Fernau, S. Gaspers, D. Raible, and A. A. Stepanov. Exact exponential time algorithms for Max Internal Spanning Tree. Arxiv preprint arXiv:0811.1875, 2008.

[8] E. Flandrin, T. Kaiser, R. Kužel, H. Li, and Z. Ryjáček. Neighborhood unions and extremal spanning trees. *Discrete Mathematics*, 308:2343–2350, 2008.

[9] L. Gargano and M. Hammar. There are spanning spiders in dense graphs (and we know how to find them). In *Proc. of the* 30^{th} *International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2003)*, volume 2719 of *LNCS*, pages 802–816, July 2003.

[10] L. Gargano, M. Hammar, P. Hell, L. Stacho, and U. Vaccaro. Spanning spiders and light-splitting switches. *Discrete Mathematics*, 285:83–95, 2004.

[11] L. Gargano, P. Hell, L. Stacho, and U. Vaccaro. Spanning trees with bounded number of branch vertices. In *Proc. of the* 29^{th} *International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2002)*, volume 2380 of *LNCS*, pages 355–365, July 2002.

[12] W. Goddard. Measures of vulnerability — the integrity family. *Networks*, 24(4):207–213, 1994.

[13] W. Goddard and H. C. Swart. Integrity in graphs: bounds and basics. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 7:139–151, 1990.

[14] R. Hassin and A. Tamir. On the Minimum Diameter Spanning Tree problem. *Information Processing Letters*, 53:109–111, 1995.

[15] J.-M. Ho, D.T. Lee, C.-H. Chang, and C.K. Wong. Minimum diameter spanning trees and related problems. *SIAM Journal of Computing*, 20:987–997, 1991.

[16] D. S. Johnson. Approximation algorithms for combinatorial problems. *Journal of Computer System Science*, 9:256–278, 1974.

[17] H. A. Jung. On a class of posets and the corresponding comparability graphs. *Journal of Combinatorial Theory Ser. B*, 24:125–133, 1978.

[18] A. Kirlangiç. Scattering number in graphs. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 30(1):1–8, 2002.

[19] J. B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the Travelling Salesman problem. *Proc. of American Mathematical Society*, 7:48–50, 1956.

[20] H.-I. Lu and R. Ravi. The power of local optimization: Approximation algorithms for maximum-leaf spanning tree (draft). Technical Report CS-96-05, Department of Computer Science, Brown University, Providence, Rhode Island, 1996.

[21] O. Ore. Note on Hamiltonian circuits. *American Mathematical Monthly*, 67:55, 1960.

[22] E. Prieto. *Kernelization in FPT Algorithm Design*. PhD thesis, The University of Newcastle, Australia, 2005.

[23] E. Prieto and C. Sloper. Either/or: Using vertex cover structure in designing FPT-algorithms — the case of k-internal spanning tree. In *Proc. of the* 8^{th} *Workshop on Algorithms and Data Structures (WADS 2003)*, volume 2748 of *LNCS*, pages 465–483, July 2003.

[24] R. C. Prim. Shortest connection networks and some generalizations. *Bell System Technical Journal*, 36:1389–1401, 1957.

[25] C. Savage. Depth-first search and the Vertex Cover problem. *Information Processing Letters*, 14:233–235, 1982.

[26] K. M. Sivalingam and S. Subramaniam. *Optical WDM Networks: Principles and Practice*. Kluwer Academic Publishers, London, 2000.

[27] B. Y. Wu and K.-M. Chao. *Spanning Trees and Optimization Problems*. Chapman & Hall / CRC, 2004.

[28] S. Zhang and Z. Wang. Scattering number in graphs. *Networks*, 37:102–106, 2001.