Asymptotic behavior of random graphs evolving in time
TÉZISFÜZET

Ráth Balázs

February 2, 2010

Contents

1 Bevezetés

A doktori disszertációmban, melynek témavezetője Prof. Tóth Bálint, gráf-értékű Markov-láncok időbeli fejlődését vizsgálom. A gráf csúcs-és élhalmaza időben változik: a gráf aktuális struktúrájától függő valószínűségekkel éleket/csúcsokat törlünk/adunk hozzá a gráfhoz. Ha Markov láncok egy olyan sorozatát nézzük, amiben a kezdeti gráfok sorozatának csúcsszáma (amit n-el jelölünk) végtelenhez tart, de feltesszük, hogy a kezdeti gráfokon értelmezett statisztikák egy családja konvergál $n \to \infty$ esetén, akkor az idő megfelelő átskálázásával a Markov lánc mikroszkopikus átmeneti szabályait a statisztika-családunk határértékeinek fejlődését vezérlő differenciálegyenletekké tudjuk átírni. A kapott differenciálegyenletek megoldásainak analízisével a nagy véletlen gráfok időfejlődése és tulajdonságai válnak leírhatóvá.

Véletlen gráf-modellek két különböző családjával foglalkozom doktori disszertációmban:

Az **átlagtér (mean field) erdőtűz modell** és a **mean field fagyott perkolációs modell** közeli rokonai egymásnak: mindkét esetben a dinamikus Erdős-Rényi gráfmodellt módosítjuk oly módon, hogy a nagy összefüggő komponenseket megsemmisítjük, ily módon teremtve veresengést összeolvadás és porladás közt. E két modell legfontosabb tulajdonsága az *önszerveződő kritikus viselkedés*, ami a *Smoluchowski-féle összeolvadási differenciálegyenletrendszer* megfelelő módosításainak analízisével bizonyítható.

Az **élátkötős modell** egy diszkrét idejű lépésekben fejlődő sűrű multigráf: minden lépésben egy egyenletesen választott él egyik végpontját kötjük át, az új csúcsot az aktuális fokszámok valamilyen lineáris függvényével arányosan választva. A modellt a *sűrű gráfok limesz-elmélete* segítségével vizsgáljuk és a limesz-ojektumok időfejlődésének teljes leírását adjuk. A párhuzamos élek száma és a csúcsok fokszáma különböző időskálán fejlődik, és emiatt a modellen a statisztikus fizikában öregedésnek (aging) nevezett jelenség figyelhető meg.

A doktori disszertáció három fejezetre van bontva, melyeknek témája a fent említett három véletlen gráf-modell.

A 2. fejezet (Chapter 2) témája a mean field erdőtűz-modell és a [36] cikkre alapul, amit Tóth Bálinttal közösen írtunk.

A 3. fejezet (Chapter 3) témája a mean field fagyott perkolációs modell és a [33] cikkre alapul.

A 4. fejezet (Chapter 4) témája az élátkötős modell és a [34] cikkre alapul, amit Szakács Lászlóval közösen írtunk.

Ennek a tézisfüzetnek a hátralevő része is három fejezetre van bontva. Mindhárom fejezet elején röviden összefoglaljuk a modell hátterét, leírását és jelentőségét, majd a megfelelő definíciók után pontosan kimondjuk a doktori disszertáció fő tételeit.

2 Mean field erdőtűz-modell

2.1 Háttér

A dinamikus Bernoulli élperkolációs modell egy folytonos időben fejlődő vélelen gráf (Markov-folyamat):

Rögzítsünk egy végtelen homogén gráfot (pl. a $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$ rácsot). A gráf élei "nyitott" vagy "zárt" állapotban lehetnek. A folyamatot abból az állapotból indítjuk, ahol minden él zárt. Az éleket egymástól függetlenül kapcsoljuk zárt állapotból nyitottba 1 rátával. Ahogy az idő (amit t-vel jelölünk) növekszik, a modellben *fázisátmenet* következik be: van egy olyan $t_c \in (0, +\infty)$ kritikus időpont, amikor a nyitott élekből álló gráf összefüggőségi tulajdonságai drasztikusan megváltoznak. Legyen

$$v_k(t) := \mathbf{P}\big(\text{ az origó összefüggő nyitott komponensének nagysága a } t \text{ időpontban } k\ \big).$$

Ekkor

- $t < t_c$ esetén a modell *szubkritikus*: $v_k(t)$ exponenciálisan lecseng k-ban.
- $t > t_c$ esetén a modell *szuperkritikus*: $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) = 1 - \theta(t)$, ahol $\theta(t) > 0$ annak a valószínűsége, hogy az origó egy végtelen nyitott komponensben van. $v_k(t)$ exponenciálisan cseng le k-ban.
- $t = t_c$ esetén a modell *kritikus*: $\theta(t_c) = 0$ és $v_k(t)$ hatványrendben cseng le k-ban.

A dinamikus élperkolációs modell átlagtér változata a dinamikus Erdős-Rényi gráfmodell: az n csúcsú teljes gráf éleit $\frac{1}{n}$ rátával változtatjuk zárt állapotúból nyitott állapotúvá. Legyen

$$v_{n,k}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}[\text{ az } i \text{ csúcs nyitott összefüggő komponensének nagysága } k \text{ a } t \text{ időpontban }]. \tag{1}$$

Ekkor $v_{k,n}(t) \to v_k(t)$ valószínűségben, amint $n \to \infty$. és ahol $(v_k(t))_{k=1}^{\infty}$ a *Smoluchowski-féle összeolvadási differenciálegyenletrendszer*

$$\dot{v}_k(t) = \frac{k}{2} \sum_{l=1}^{k-1} v_l(t) v_{k-l}(t) - k v_k(t), \qquad k \geq 1 \tag{2}$$

megoldása a $v_k(0) = \mathbb{1}[k = 1]$ kezdeti feltétel mellett.

A $t_c = 1$ kritikus időponttal a fázisátmenet pontosan úgy írható le, mint fentebb (azzal a különbséggel, hogy $\theta(t)$ most az óriáskomponens sűrűsége). A komponensnagyság-sűrűségek lecsengési rendje a kritikus időpontban $v_k(t_c) \asymp k^{-3/2}$ az Erdős-Rényi modellben.

A a $\mathbb{Z}^d$ rácson definiált kritikus erdőtűz-modell informális definíciója a következőképp hangzik: az élek egymástól függetlenül 1 rátával kapcsolódnak zárt állapotból nyitottba, de amint egy végtelen nyitott komponens megjelenik, az éleit abban a pillanatban zárttá változtatjuk. Fizikusok sejtése szerint (lásd [19]) az erdőtűz-modell *önszerveződő kritikus viselkedést* (self-organized criticality, S.O.C.) mutat: minden $t \geq t_c$ esetén a nyitott élekből álló részgráf kritikus: $\theta(t_c) = 0$ és $v_k(t)$ hatványrendben cseng le k-ban.

Kevés matematikai eredményt találunk a $\mathbb{Z}^d$-n értelmezett erdőtűz-modellekről, sőt még nem sikerült egy olyan precízen definiált gráf-értékű sztochasztikus folyamatot konstruálni, ami kielégítené a kritikus erdőtűz-modell fenti informális definícióját. A [20] és [21] cikkekben M. Dürre bizonyítja a $\mathbb{Z}^d$-n értelmezett szubkritikus erdőtűz-folyamat létezését és egyértelműségét, melynek az informális definíciója így hangzik: az élek egymástól függetlenül, 1 rátával kapcsolódnak zárt állapotból nyílt állapotba és egy k csúcsú nyitott komponenst a λk rátával leégetünk (azaz az összes élét töröljük). Heurisztikusan $\lambda \to 0$ után kapjuk a kritikus erdőtűz-modellt. Doktori dolgozatomban az Erdős-Rényi modellt módosítjuk hasonló módon, melynek eredménye a mean field erdőtűz-modell.

2.2 A modell

Egy n csúcsú gráfból indulunk, és bármely két összekötetlen csúcs közt $1/n$ rátával jelenik meg él, továbbá minden csúcsba egy-egy $\lambda(n)$ rátájú Poisson-folyamat szerint villámok csapnak. Ha villám csap egy csúcsba, akkor a tűz az élek mentén azonnal végigfut és leégeti őket: egy k nagyságú összefüggő komponensbe $\lambda(n) \cdot k$ rátával csap villám, és ekkor a komponest kicseréljük k izolált csúcsra. A gráf össz-csúcsszáma végig n marad.

A modellt az $\frac{1}{n} \ll \lambda(n) \ll 1$ *kritikus tartományban* vizsgáljuk, amint $n \to \infty$. Mivel $\lambda(n) \ll 1$, így a tűz nem sok kárt tesz a kis összefüggő komponensekben, de $\frac{1}{n} \ll \lambda(n)$ miatt az n-el összemérhető nagyságú óriáskomponensek azonnal leégnek.

Ahhoz, hogy a problémát és az eredményeinket pontosan meg tudjuk fogalmazni, megfelelően értelmezett tereket vezetünk be, amiken a folyamatainkat definiálni tudjuk.

Legyen

$$\mathcal{V} := \big\{ \mathbf{v} = \big(v_k\big)_{k\in\mathbb{N}} \, : \, v_k \geq 0, \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k \leq 1 \big\}, \quad \theta(\mathbf{v}) := 1 - \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k, \tag{3}$$

$$\mathcal{V}_1 := \big\{ \mathbf{v} \in \mathcal{V} \, : \, \theta(\mathbf{v}) = 0 \big\}. \tag{4}$$

Lássuk el a $\mathcal{V}$ teret a koordinátánként vett konvergencia (gyenge) topológiájával. θ-ra gondolhatunk úgy, mint az óriáskomponens sűrűségére.

Egy olyan $[0, \infty) \ni t \mapsto \mathbf{v}(t) \in \mathcal{V}$ leképezést, ami komponensenként korlátos változású minden korlátos időintervallumon és balról folyatonos, erdőtűz-történetnek (*forest fire evolution, (FFE)*) fogunk híni. Ha $\mathbf{v}(t) \in \mathcal{V}_1$ minden $t \in [0, \infty)$ esetén, akkor a FFE-t *konzervatívnak* hívjuk. Jelölje a FFE-k és konzervatív FFE-k terét $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}_1$. A $\mathcal{E}$ tér topológiája legyen a korlátos változású $v_k(\cdot)$ függvényekhez tartozó előjeles mértékek koordinátánként vett gyenge konvergenciája. Ez a topológia metrizálható, és a $\mathcal{E}$ tér ezzel a metrikával ellátva teljes és szeparábilis.

Definiáljuk a $v_{n,k}(t)$ függvényeket az (1) képlettel és legyen $\mathbf{v}_n(t) := \big(v_{n,k}(t)\big)_{k\in\mathbb{N}}$. Nyilvánvaló, hogy a véletlen $t \mapsto \mathbf{v}_n(t)$ trajektória egy konzervatív FFE. Ennek a folyamatnak az aszimptotikáját vizsgáljuk, amint $n \to \infty$.

2.3 Tételek

Ha $\frac{1}{n} \ll \lambda(n) \ll 1$, akkor

$$\mathbf{v}_n(\cdot) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{v}(\cdot) = \big(v_k(\cdot)\big)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

teljesül, ahol a determinisztikus $t \mapsto v_k(t)$ függvények megoldásai a következő végtelen sok egyenletből álló peremfeltételes differenciálegyenlet- rendszernek:

$$\dot{v}_k(t) = \frac{k}{2}\sum_{l=1}^{k-1} v_l(t)v_{k-l}(t) - kv_k(t), \qquad k \geq 2, \tag{5}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k(t) = 1. \tag{6}$$

Vegyük észre a különbséget a (2) egyenletrendszer és az (5)+(6) peremfeltételes egyenletrendszer közt: a (2) egyenletrendszer első egyenletét eldobtuk és helyettesítettük a (6) globális peremfeltétellel. Ennek a változtatásnak az első következménye az, hogy az (5)+(6) egyenletrendszert már nem lehet $k = 1, 2, \dots$ sorrendben iteratív módon megoldani, ahogy a (2) egyenletrendszert. A doktori dolgozat második fejezetének első fő tétele azt állítja, hogy kezdeti feltételek egy bizonyos osztályára a (5)+(6) differenciálegyenlet-rendszer jól kitűzött:

Theorem 2.1. *Ha a* $\mathbf{v}(0) \in \mathcal{V}_1$ *kezdeti feltétel olyan, hogy* $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 v_k(0) < +\infty$*, továbbá a* T_{gel} *kritikus időpontot (gelation time) így definiáljuk:*

$$T_{gel} := \Big(\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot v_k(0)\Big)^{-1} \tag{7}$$

akkor a (5)+(6) kritikus erdőtűz-egyenletrendszer megoldása létezik és egyértelmű, és a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $t \leq T_{gel}$ *esetén a megoldás megegyezik a (2) egyenletrendszer azonos kezdeti feltételű megoldásával.*

2. $t \geq T_{gel}$ *esetén létezik egy pozitív, lokálisan Lipschitz-folytonos* φ *függvény, amire*

$$\dot{v}_1(t) = -v_1(t) + \varphi(t) \tag{8}$$

és

$$\sum_{l=k}^{\infty} v_l(t) \sim \sqrt{\frac{2\varphi(t)}{\pi}}\, k^{-1/2}, \qquad \text{amint} \quad k \to \infty \tag{9}$$

teljesül.

A T_{gel} időpontig az (2) és az (5)+(6) megoldásai megegyeznek, ugyanis $t \in [0, T_{\text{gel}}]$ esetén a (2) megoldása kielégíti a (6) peremfeltételt. De a kritikus időpont után a különbség jól láthatóvá válik: (9) mutatja, hogy ebben az időintervallumban a kritikus erdőtűz-egyenlet megoldása valóban önszerveződő kritikus viselkedést mutat: a T_{gel} kritikus időpont után is kritikus marad.

Theorem 2.2. *Jelölje $\mathbb{P}_n$ annak a véletlen $\mathbf{v}_n(t)$ FFE-nak az eloszlását, amit az n csúcsú erdőtűz-modellből nyerünk, és aminek a kezdeti állapota $\mathbf{v}_n(0)$ és villámcsapási rátájára $n^{-1} \ll \lambda(n) \ll 1$ teljesül. Ha $\mathbf{v}_n(0) \to \mathbf{v}(0) \in \mathcal{V}_1$ kordinátánként konvergál és $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 v_k(0) < +\infty$, akkor a $\mathbb{P}_n$ eloszlás-sorozat gyengén konvergál ahhoz a Dirac-eloszláshoz, ami arra a FFE-ra van koncentrálva, ami az egyértelmű megoldása az (5)+(6) erdőtűz-egyenletnek a $\mathbf{v}(0)$ kezdeti feltétellel. Speciálisan:*

$$\forall \varepsilon > 0,\, t \geq 0 \;:\quad \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_n \left(|v_{n,k}(t) - v_k(t)| \geq \varepsilon \right) = 0$$

A doktori dolgozat 2. fejezetének célja a Theorem 2.1 és Theorem 2.2 bizonyítása.

2.4 A bizonyításokról

Most egy rövid összefoglalót adunk a doktori dolgozat 2. fejezetének tartalmáról: Ahhoz, hogy bebizonyítsuk Theorem 2.2-t, először is be akarjuk látni, hogy a $\left(\mathbb{P}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ eloszlás-sorozat feszes (Prohorov tételének segítségével).

A feszességből következik, hogy $\left(\mathbb{P}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ bármelyik rész-sorozatából kiválasztható egy rész-rész-sorozat, ami valószínűségben konvergál egy véletlen FFE-hez.

Ezután megmutatjuk, hogy a $\left(\mathbb{P}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ mérték-sorozat bármely részsorozatok mentén vett határértéke a FFE-ok egy olyan részhalmazára van koncentrálva, amely kielégíti az (5)+(6) egyenleteket (ez a halmaz egyelemű Theorem 2.1 miatt), és ebből következik Theorem 2.2.

- Ahhoz, hogy megmutassuk a $\left(\mathbb{P}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozat feszességét, meg kell mutatnunk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van a FFE-okonak egy olyan kompakt K részhalmaza, amire

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;:\quad \mathbb{P}_n(K) \geq 1 - \varepsilon. \tag{10}$$

  teljesül. A Section 2.2-ben olyan kompakt halamazokat definiálunk, amikre teljesül (10) és megmutatjuk, hogy a $\left(\mathbb{P}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozat bármely részsorozatok mentén vett határértéke a FFE-oknak arra a részhalmazára van koncentrálva, amely kielégíti (5)-öt.

  – Ennek a megmutatásához a Subsection 2.2.1.-ben bevezetjük az *erdőtűz - folyamok*nak nevezett segéd-objektumokat. A fő ötlet az, hogy nem csak a k nagyságú komponensek számát jegyezzük fel minden $k \in \mathbb{N}$-re és $t \geq 0$-ra, de azoknak a t-nél kisebb időpontoknak a számát is, amikor egy k nagyságú komponens összeolvadt egy l nagyságú komponenssel (minden $k, l \in \mathbb{N}$-re), továbbá azoknak a k nagyságú komponenseknek a számát, amelyeket tűz égetett le a t időpont előtt (minden $k \in \mathbb{N}$-re).

- Ezután precízen definiáljuk a mean field erdőtűz-modell dinamikáját a Subsection 2.2.2-ben: a mean field tulajdonság miatt megfeledkezhetünk az összefüggő komponensek gráfstruktúrájáról: a Markov lánc, amit vizsgálunk egy összeolvadási-töredezési modell (ami a Markus-Lushnikov folyamat módosítása, lásd [32]).

  A Proposition 2.1-ben bebizonyítjuk, hogy $\left(\mathbb{P}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ feszes és hogy bármilyen részsorozat mentén vett határérték a az (5) megoldásaira van koncentrálva.

- A Subsection 2.2.3-ben definiáljuk a $(v_k(t))_{k=1}^{\infty}$ együtthatókkal képzett Laplace-transzformáltat/generátorfüggvényt:

$$V(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) e^{-kx} - 1$$

  Ha $(v_k(t))_{k=1}^{\infty}$ kielégíti az (5)+(6) egyenleteket, akkor $V(t,x)$ megoldja az alábbi (jóval kezelhetőbb) irányított PDE-t, amit az *irányított Burgers problémának* nevezünk:

  Találjunk egy olyan $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ irányítófüggvényt, amire

$$\partial_t V(t,x) = -\frac{1}{2}\partial_x V^2(t,x) + \varphi(t) e^{-x}, \quad V(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(0) e^{-kx} - 1, \quad V(t,0) \equiv 0. \tag{11}$$

• A Section 2.3-ben a $V(t,x)$ függvény viselkedését vizsgáljuk, amint $x \to 0_+$, amit a Tauber-tételek hoznak kapcsolatba a $(v_k(t))_{k=1}^{\infty}$ együtthatók $k \to \infty$ lecsengésével.
.

- A Subsection 2.3.1-ben az $X(t,u)$ függvényt az $X(t,-V(t,x)) = x$ összefüggés segítségével definiáljuk, majd több, az alábbihoz hasonló összefüggést fogalmazunk meg: ha $\partial_u X(t,u)|_{u=0} = 0$ és $\partial_{uu}^2 X(t,u) \asymp 1$ valamilyen rögzített t-re $x \to 0_+$ esetén, akkor

$$X(t,u) \asymp u^2 \quad \iff \quad |V(t,x)| \asymp \sqrt{x} \quad \iff \quad \sum_{l=k}^{\infty} v_l \asymp k^{-1/2}. \tag{12}$$

- A Subsection 2.3.2-ben a karakterisztikák módszerét alkalmazzuk az irányított Burgers problémára, hogy megmutassuk, hogy $\partial_{uu}^2 X(0,u) \asymp 1$-ból $\partial_{uu}^2 X(t,u) \asymp 1$ következik. Ennek az összefüggésnek a segítségével megmutatjuk, hogy az óriáskomponens súlya nem növekedhet túl gyorsan: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t) \le C^*$, ahol $C^* < +\infty$.

- A Subsection 2.3.3-ben belátjuk, hogy a $\left(\mathbb{P}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozat bŕmilyen, részsorozatok mentén vett határértéke azon a FFE-ok halmazára van koncentrálva, amikre (6) teljesül. Ez a bizonyítás meglehetősen technikás: $\frac{1}{n} \ll \lambda(n)$ csak annyit garantál, hogy azokat a komponenseket, amelyeknek a nagysága n-el összemérhető, hamar villám sújtja. A

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq N} v_{n,k}(t)=0$$

összefüggésért keményen meg kell dolgozni.
A bizonyítás lényeges eleme az, hogy a (1) képlettel definiált véletlen $\big(v_{k,n}(t)\big)_{k=1}^{n}$ együtthatókkal képzett generátorfüggvényt vesszük, és $\big(v_{k,n}(t)\big)_{k=1}^{n}$ lecsengésével kapcsolatos becsléseket vezetünk le a Laplace-transzformált $x=0$ körüli viselkedésére vonatkozó becsléskből, amelyeket a (véletlen) karakterisztikák módszerével bizonyítunk.

- A Section 2.4-ben az elsőrendű nemlineáris PDE elméletének módszereit az (11) irányított Burgers probémára alkalmazva bebizonyítjuk a Theorem 2.1-et.
  - A Subsection 2.4.1-ben bebizonyítjuk, hogy (11) bármelyik megoldására $\partial_x V(t,x)|_{x=0}=-\infty$ teljesül minden $t\geq T_{\mathrm{gel}}$-re. Így a Subsection 2.3.1 jelöléseivel $\partial_u X(t,u)|_{u=0}=0$ teljesül, amiből (12) következik: minden $t\geq T_{\mathrm{gel}}$-re a rendszer kritikus viselkedést mutat.
  - A Subsection 2.4.2-ben belátjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\partial_x V^2(t,x)=\varphi(t) \tag{13}$$

    (ez a tény formálisan könnyen levezethető (11)-ből) és a (11) megoldásainak további finom tulajdonságait vezetjük le a $\sum_{k=1}^{\infty}k^3 v_k(0)<+\infty$ feltevésből, pl. azt, hogy $\varphi(t)$ lokálisan Lipschitz-folytonos $[T_{\mathrm{gel}},+\infty)$-en.
  - A Subsection 2.4.3-ban a karakterisztikák módszerével bebizonyítjuk, hogy a (11) megoldása egyértelmű, amiből az (5)+(6) megoldásának egyértelműsége és Theorem 2.1 követekzik.

3 Mean field fagyott perkoláció

3.1 Háttér

A bináris fán értelmezett fagyott perkolációs folyamatot D.J. Aldous definiálta [3]-ban: a modell a dinamikus perkolációs folyamat egy olyan módosítása, ami az alábbi szemléletes definíciót teszi matematikailag korrektté: csak akkor húzunk be egy élet, ha mindkét végpontja véges komponensbe esik. A modell önszerveződő kritkikus viselkedése abban nyilvánul meg, hogy $t\geq\frac{1}{2}$ esetén (ami a bináris fán vett perkolációs folyamat kritikus időpontja) egy tipikus véges fürt eloszlása ugyanolyan, mint egy kritikus perkolációs fürté.

I. Benjamini és O. Schramm megmutatatta, hogy nem lehetséges hasonló módon módosítani a $\mathbb{Z}^2$-n értelmezett dinamikus perkolációs folyamatot.

Ennek a negatív eredménynek a bizonyítása [8] Section 3-jában megtalálható.

3.2 A modell

A mean field fagyott perkolációs modell definíciója szinte ugyanaz, mint a mean field erdőtűz-modellé (bármely két, még összekötetlen csúcs közt $1/n$ rátával él jelenik meg, továbbá mindegyik csúcsba egy $\lambda(n)$ rátájú Poisson-folyamat szerint villámok csapnak), azzal a kivétellel, hogy a fagyott perkolációs modellben a leégett/fagyott komponens csúcsait is (és nem csak az éleit) eltávolítjuk.

A két modell univerzalitási osztálya azonos: ha $\frac{1}{n} \ll \lambda(n) \ll 1$, akkor $v_k^n(t) \to v_k(t)$ valószínűségben, amint $n \to \infty$, ahol $(v_k(t))_{k=1}^{\infty}$ megoldja a Stockmayer-féle összeolvadási egyenletrendszert:

$$\forall\, k \geq 1 \quad \dot{v}_k(t) = \frac{k}{2} \sum_{l=1}^{k} v_l(t) v_{k-l}(t) - k \cdot v_k(t) \sum_{l=1}^{\infty} v_l(t). \tag{14}$$

A (14) egyenletrendszer $v_k(0) = \mathbb{1}[k=1]$ kezdeti feltétellel vett megoldása jól ismert (lásd [39]), és hasonló önhasonlósági tulajdonsággal rendelkezik, mint a bináris fán értelmezett fagyott perkolációs folyamat.

A mean field fagyott perkolációs folyamat kezdeti gráfját választhatjuk nemüresnek, ami a (14) egyenletrendszer általános kezdeti feltétellel való megoldásának felel meg. Az egyenletrendszer megoldása ebben az esetben is explicit és a modell S.O.C. viselkedést mutat: minden minden $t \geq T_{gel}$ esetén (9) teljesül, ahol

$$\varphi(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t). \tag{15}$$

A mean field erdőtűz modellel és a mean field fagyott perkolációs modellel kapcsolatos sejtés, hogy ugyanabba az univerzalitási osztályba esnek, de a fagyott perkolációs modellhez kapcsolódó differenciálegyenletek megoldása könnyebben kezelhető, és emiatt több állítást tudunk erről a modellről bizonyítani.

A bináris fán értelmezett fagyott perkolációs modellben a komponenseket akkor égetjük le/fagyasztjuk meg/távolítjuk el, amikor a nagyságuk végtelenné válik. Felmerül a kérdés:

Mi a tipikus mérete a fagyott komponenseknek a mean field fagyott perkolációs modellben?

3.3 Egy sejtés

A fenti kérdés precíz megfogalmazásához legyen $0 \leq t_1 < t_2$ és jelölje

$$\Phi^n([t_1, t_2], k) := \frac{k}{n} \cdot \left|\{\text{ A } [t_1, t_2]\text{-ben leégett } k \text{ nagyságú komponensek } \}\right|.$$

Definiáljuk a $[t_1, t_2]$-ben leégett komponensek össztömegét így:

$$\Phi^n([t_1, t_2]) := \sum_{k \geq 1} \Phi^n([t_1, t_2], k).$$

Így $p_k^n[t_1, t_2] := \frac{\Phi^n([t_1,t_2],k)}{\Phi^n([t_1,t_2])}$, $k = 1, 2, \ldots$ egy véletlen vaószínűségi eloszlás minden N-re és $t_1 < t_2$-re.

Conjecture 3.1. *Tekintsük fagyott perkolációs folyamatok egy sorozatát, amelyeknek a kezdeti feltételei konvergensek:* $\mathbf{v}_n(0) \to \mathbf{v}(0)$.

Ha $\lambda(n) = n^{-\alpha}$, *ahol* $0 < \alpha < 1$ *és*

$$\beta(\alpha) := \begin{cases} 2\alpha & \textit{if } \alpha \leq \frac{1}{3} \\ \frac{\alpha+1}{2} & \textit{if } \alpha \geq \frac{1}{3} \end{cases} \tag{16}$$

akkor minden $\mathbf{v}(0)$*-hoz,* $T_{gel} < t_1 < t_2$*-hez és* α*-hoz van egy olyan nem elfajuló* F *valószínűségi eloszlásfüggvény, amelyre* $F : (0, \infty) \to (0, 1)$, $\lim_{x \to 0_+} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$, *és minden* $x \in \mathbb{R}_+$ *esetén*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}[\, k \leq x \cdot n^{\beta(\alpha)} \,] \cdot p_k^n[t_1, t_2] \;=\; F(x) \tag{17}$$

Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy egy kritikus időpont után megfagyott csúcs komponensének tipikus nagyságrendje $n^{\beta(\alpha)}$. Ezt a sejtést heurisztikus érvelések, számítógépes szimulációk, és az alább megfogalmazott Theorem 3.1 és Theorem 3.2 is alátámasztják. A sejtés szerint $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ esetén a modell hasonlóan viselkedik, mint a Theorem 3.1-ban leírt eset, míg $\frac{1}{3} < \alpha < 1$ esetén a Theorem 3.2-ben leírt esethez hasonlóan viselkedik. Jegyezzük meg, hogy $\beta(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$, és hogy $n^{\frac{2}{3}}$ a legnagyobb komponens nagyságrendje a kritikus Erdős-Rényi gráfban.

3.4 Tételek

A doktori dolgozat Chapter 3 fejezetében a "kritikus tartomány szélein" vizsgáljuk a fagyott perkolációs modell viselkedését, és a következő eredményeket bizonyítjuk:

- Ha a villámcsapási ráta $\lambda(n) \equiv \lambda_*$, akkor a fagyott perkolációs modell szubkritikus és $v_k^n(t) \to v_k(t)$, ahol $(v_k(t))_{k=1}^{\infty}$ a λ_*-*szubkritikus fagyott perkolációs egyenletrendszer* megoldása (ami egy (14)-hez hasonló végtelen differenciálegyenlet-rendszer). Amint $\lambda_* \to 0$, a szubkritikus egyenletek megoldásai a (14) egyenlet megoldásához konvergálnak. Egy fagyott komponens tipikus nagyságrendje λ_*^{-2}, amint $\lambda_* \ll 1$, lásd a lentebb megfogalmazott Theorem 3.1-et.

- Ha a villámcsapási ráta $\lambda(n) = \frac{\lambda^*}{n}$, akkor időről időre óriáskomponensek születnek és fagynak meg, és a $v_k^n(t)$ függvények $n \to \infty$ limesze egy *véletlenül irányított Smoluchowski-féle összeolvadási egyenletet* old meg, ami a szuperkritikus és szubkritikus fázisok közt alternál. Amint $\lambda^* \to +\infty$, a véletlenül irányított alternáló egyenlet megoldásai a (14) megoldásaihoz konvergálnak. Egy fagyott komponens tipikus nagyságrendje $n \cdot (\lambda^*)^{-1/2}$, amint $1 \ll \lambda^*$, lásd a lentebb megfogalmazott Theorem 3.2-öt.

Theorem 3.1. *Tekintsük fagyott perkolációs folyamatok egy olyan sorozatát, amire $\lambda(n) \equiv \lambda_*$ és aminek a kezdeti állapotai konvergensek: $\mathbf{v}_n(0) \to \mathbf{v}(0)$, továbbá tegyük fel, hogy létezik egy $M \in \mathbb{N}$, amire $\forall\, n, \forall\, k \geq M : v_{n,k}(0) = 0$. Jelölje $p_k^{n,\lambda_*}[t_1, t_2] = \frac{\Phi^n([t_1,t_2],k)}{\Phi^n([t_1,t_2])}$.*
Ekkor

$$\lim_{\lambda_*\to 0} \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}[\, k \leq x \cdot 2\varphi(t) \cdot (\lambda_*)^{-2}\,] \cdot p_k^{n,\lambda_*}[t, t+dt] \;= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y} \mathrm{d}y, \quad (18)$$

ahol a $\varphi(t)$ függvényt (15)*-el definiáljuk a* (14) *egyenlet* $\mathbf{v}(0)$ *kezdeti feltétellel vett megoldására.*

Jegyezzük meg, hogy ennek a tételnek a megfogalmazása különbözik a doktori dolgozatbeli megfogalmazástól (lásd a Theorem 3.8-at a Subsection 3.1.5-ben).

A (18) jobb oldala a $\Gamma(\frac{1}{2}, 1)$ eloszlás eloszlásfüggvénye.

A Theorem 3.1 jelentősége a Conjecture 3.1-re nézve a következő: a (18) összefüggés a (17) sejés egy variánsa a következő értelemben: ha $\lambda_* = n^{-\alpha}$ valamilyen kis α-ra, akkor (18) azt sugallja, hogy egy tipikus fagyott csúcs komponens-nagysága $(\lambda_*)^{-2} = n^{2\alpha}$ nagyságrendű, tehát $\beta(\alpha) = 2\alpha$, ez pedig megfelel a (16) sejtésnek.

A Theorem 3.1-et a doktori dolgozat Section 3.5-jében bizonyítjuk a Laplace transzformáltak segítségével.

Theorem 3.2. *Tekintsük fagyott perkolációs folyamatok egy olyan sorozatát, amire $\lambda(n) = \frac{\lambda^*}{n}$ és aminek a kezdeti állapotai konvergensek: $\mathbf{v}_n(0) \to \mathbf{v}(0)$, továbbá tegyük fel, hogy létezik egy $M \in \mathbb{N}$, amire $\forall\, n, \forall\, k \geq M : v_{n,k}(0) = 0$.*
Jelölje $p_k^{n,\lambda^*}[t_1, t_2] = \frac{\Phi^n([t_1,t_2],k)}{\Phi^n([t_1,t_2])}$.
Ekkor

$$\lim_{dt\to 0} \lim_{\lambda^*\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}[k \leq 2\sqrt{\frac{\varphi(t)}{\lambda^*}} \cdot x \cdot n] \cdot p_k^{n,\lambda^*}[t, t+dt] \;= \int_0^x \frac{4}{\sqrt{\pi}} y^2 e^{-y^2} dy, \quad (19)$$

ahol a $\varphi(t)$ függvényt (15)*-el definiáljuk a* (14) *egyenlet* $\mathbf{v}(0)$ *kezdeti feltétellel vett megoldására.*

Jegyezzük meg, hogy ennek a tételnek a megfogalmazása különbözik a doktori dolgozatbeli megfogalmazástól (lásd Theorem 3.9 a Subsection 3.1.5-ben).

A (19) egyenlet jobb oldala a hossz-torzított Rayleigh eloszlás eloszlásfüggvénye (lásd Definition 3.6.3 a Subsection 3.6.1-ben).

A Theorem 3.2 jelentősége a Conjecture 3.1-re nézve a következő: a (19) összefüggés a (17) egy verziója abban az értelemben hogy ha $\lambda(n) = \frac{n^\varepsilon}{n}$ valamilyen kis ε-nal (azaz $\alpha = 1-\varepsilon$), akkor (19) azt sugallja, hogy egy fagyott csúcs tipikus komponens-nagyságának nagyságrendje $\sqrt{\frac{1}{n^\varepsilon}} n = n^{1-\varepsilon/2}$, azaz $\beta(\alpha) = \frac{\alpha+1}{2}$, ami megfelel a (16) sejtésnek.

A Theorem 3.1-et a doktori dolgozat Section 3.6-jében bizonyítjuk egy csatolásos érvelés segítségével, a bizonyítás fő észrevétele az, hogy az óriáskomponens közvetlenül a születése után lineárisan növekszik.

4 Élátkötős modell

4.1 Háttér

Az elmúlt évtizedben született meg a sűrű gráfok limesz-elmélete (egy sűrű gráfban az élek száma összehasonlítható $|V(G)|^2$-el). Szemléletesen: egyszerű gráfok egy $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozata konvergens, ha bármilyen rögzített F *tesztgráfra* az F kópiáinak sűrűsége G_n-ben (amit homomorfizmus-sűrűsegnek hívnak) konvergál, amint $n \to \infty$

Lovász László és Szegedy Balázs [30]-ben megmutatta, hogy konvergens gráfsorozatok limeszobjektumai szimmetrikus, mérhető $W : [0,1]^2 \to [0,1]$ függvényekkel reprezentálhatóak. Az ilyen függvényeket *grafonoknak* hívjuk.

A sűrű gráflimeszek és a végtelen felcserélhető táblázatok elmélete közti kapcsolatot először [18]-ben vette észre Persi Diaconis és Svante Janson: ha a gráfjaink csúcshalmazát egy egyenletesen választott permutációval cimkézzük, akkor a gráfsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha a véletelül cimkézett adjacenciamátrixok sorozata eloszlásban konvergál egy végtelen véletlen adjacenciamátrixhoz.

A sűrű gráfok elméletének egy, a multigráfokra (párhuzamos és hurokélekkel rendelkező gráfokra) való természetes általánosítását adtuk [28]-ban (ami Kolossváry Istvánnal közös munka). A limeszobjektumokat *multigrafonoknak* neveztük.

4.2 A modell

A doktori dolgozat Chapter 4 fejezetének témája az *élátkötős modell*, egy időben fejlődő véletlen multigráf. Jelölje a multigráf T időpontbeli állapotát $\mathcal{G}_n(T)$, ahol $T = 0, 1, 2, \dots$ és $n = |V(\mathcal{G}_n(T))|$-el jelöljük a csúcsok számát. Jelöljük $m = |E(\mathcal{G}_n(T))|$-el az élek számát (a csúcsok és élek száma nem változik időben).

A $\mathcal{G}_n(T)$ multigráf ismeretében $\mathcal{G}_n(T+1)$-et oly módon kapjuk, hogy egyenletesen választunk egy élet $E(\mathcal{G}_n(T))$-ből, egy érmedobással kiválasztjuk az él egyik végpontját és átkötjük az élet egy új végponthoz, amit a lineáris preferenciális kötődés szabálya szerint választunk: a v csúcsot $\frac{d(v)+\kappa}{2m+n\kappa}$ valószínűséggel választjuk, ahol $d(v)$ a v csúcs foka $\mathcal{G}_n(T)$-ben és $\kappa \in (0, +\infty)$ pedig egy paraméter. Az élátkötős modell formális definíciója a Section 4.2-ben található.

A célunk a $\mathcal{G}_n(T)$ élátkötős modell időbeli fejlődésének a leírása $1 \ll n$ esetén a *sűrű gráfok limesz-elméletének* fogalmaival. Az egyszerű gráf-sorozatok konvergenciájának elméletét [30]-ben dolgozták ki (a miénktől némileg eltérő jelölésekkel): azt mondjuk, hogy egyszerű gráfok egy $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozata konvergens, ha bármely F egyszerű gráfra a $\lim_{n\to\infty} t_{=}(F, G_n)$ limesz létezik, ahol

$$t_{=}(F,G) = \frac{1}{n^{|V(F)|}} \sum_{\varphi : V(F) \to V(G)} \mathbb{1}[\forall\, v, w \in V(F) :\; E(v,w) = E(\varphi(v), \varphi(w))] \qquad (20)$$

és $E(v,w)$ jelöli az élek számát v és w között. [30]-ban a konvergens gráfsorozatok limeszobjektumaként kapott *grafonok* többféle ekvivalens jellemzését találjuk.

[28]-ben a sűrű gráfok limesz-elméletét természetes módon általánosítjuk multigráfokra: egy $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ multigráf-sorozatot akkor mondunk konvergensnek, ha minden F multigráfra a $g(F) = \lim_{n\to\infty} t_=(F,G_n)$ limesz létezik (továbbá $g(\cdot)$ egy "nem-elfajuló valószínűségi eloszlás", lásd Definition 4.3.2), ahol a $t_=(F,G)$-t a (20) képlettel definiáljuk. A konvergens multigráf-sorozatok limesz-objektuma egy $W : [0,1]\times[0,1]\times\mathbb{N}_0 \to [0,1]$ függvény, amelyre

$$W(x,y,k) \equiv W(y,x,k), \quad \sum_{k=0}^{\infty} W(x,y,k) \equiv 1, \quad W(x,x,2k+1) \equiv 0$$

teljesül. Az ilyen függvényeket *multigrafonoknak* hívjuk. Azt mondjuk, hogy $G_n \to W$, ha minden $k \in \mathbb{N}$-re és minden k csúcsú F multigráfra $\lim_{n\to\infty} t_=(F,G_n) = t_=(F,W)$ teljesül, ahol

$$t_=(F,W) := \int_{[0,1]^k} \prod_{v\le w\le k} W(x_v,x_w,E(v,w))\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\ldots\,\mathrm{d}x_k.$$

A Section 4.3-ban rövid áttekintést adunk a sűrű multigráfok limesz-elméletéről.

Ha $\mathcal{G}_n$ egy n csúcsú véletlen multigráf minden $n \in \mathbb{N}$-re és ha minden F multigráfra $t_=(F,\mathcal{G}_n) \xrightarrow{\mathrm{d}} t_=(F,W)$ teljesül $n\to\infty$ esetén, ahol W egy multigrafon, azaz

$$\forall F\, \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\, |t_=(F,\mathcal{G}_n) - t_=(F,W)| > \varepsilon \,\Big) = 0, \tag{21}$$

akkor azt mondjuk, hogy a $\mathcal{G}_n$ sorozat W-hez konvergál valószínűségben, $\mathcal{G}_n \xrightarrow{\mathrm{d}} W$.

Egy W multigrafonra és $x \in [0,1]$-re a W x helyen vett *átlagos fokszámát* és a W élsűrűségét így definiáljuk:

$$D(W,x) := \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot W(x,y,k)\,\mathrm{d}y \tag{22}$$

$$\rho(W) := \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot W(x,y,k)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{23}$$

Ha $\rho(W) < +\infty$, akkor $D(W,x) < +\infty$ majdnem minden x-re.

Legyen G egy multigráf n csúcson, aminek a csúcsait $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$-el cimkézzük.

Jelöljük $(B(i,j))_{i,j=1}^{n}$-el a G adjacenciamátrixát: $B(i,j) \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$ jelöli a az i és j csúcsokat összekötő élek számát. $B(i,j) = B(j,i)$, hiszen a gráf irányítatlan és $B(i,i)$ pedig a i csúcsnál levő hurokélek számának kétszerese (tehát $B(i,i)$ páros szám).

Jelölje az n csúcsú multigráfok adjacenciamátrixainak halmazát $\mathcal{A}_n$, azaz

$$\mathcal{A}_n := \left\{ B \in \mathbb{N}_0^{n\times n} \;:\; B^T = B,\, \forall\, i \in [n] \;\; 2 \,|\, B(i,i) \right\}.$$

4.3 Tételek

Idézzük fel a Poisson, Binomiális és Gamma eloszlásokat definiáló formulákat:

$$\mathbf{p}(k,\lambda) := e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \tag{24}$$

$$\mathbf{b}(k,n,p) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{25}$$

$$\mathbf{g}(x,\alpha,\beta) := x^{\alpha-1}\frac{\beta^\alpha e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{1}[x>0] \tag{26}$$

Az élátkötős modell időbeli fejlődését oly módon jellemezzük, hogy a limeszként előálló multigrafonok időfejlődését írjuk le.

Tekintsük kezdeti multigráfok egy $(G_n)_{n=1}^\infty$ sorozatát, ami a W multigrafonhoz konvergál. Tegyük fel, hogy $|V(G_n)| = n$. Jelöljük G_n adjacenciamátrixát $B_n \in \mathcal{A}_n$-el. Feltesszük továbbá, hogy az alábbi technikai feltétel teljesül:

$$\exists\, \lambda > 0,\ C < +\infty\ \ \forall\, n: \quad \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i\le j\le n} e^{\lambda B_n(i,j)} \le C, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{\lambda B_n(i,i)} \le C. \tag{27}$$

Először a Theorem 4.1-et mondjuk ki az élátkötős modell $T = \mathcal{O}(n^2)$ időskálán vett fejlődéséről:

Theorem 4.1. *Rögzítsük a $\kappa \in (0,+\infty)$ paramétert. A $\mathcal{G}_n(T)$ élátkötős modellt tekintjük, amint $T = 0,1,\dots,$ és jelölje a kezdeti $\mathcal{G}_n(0)$ multigráf adjacenciamátrixát B_n, $n = 1,2,\dots.$ Feltesszük, hogy $B_n \to W$ valamilyen W multigrafonra és hogy (27) teljesül.*

Ekkor minden $t \in [0,+\infty)$-re

$$\mathcal{G}_n\left(\lfloor t\cdot\frac{\rho(W)\cdot n^2}{2}\rfloor\right) \xrightarrow{d} W_t \qquad \textit{amint} \qquad n\to\infty, \tag{28}$$

ahol

$$W_t(x,y,k) = \sum_{h=0}^{\infty} W(x,y,h)\sum_{l=0}^{k}\mathbf{b}(l,h,e^{-t}))\cdot\mathbf{p}\left(k-l,\frac{D(W,x)\cdot D(W,y)}{\rho(W)}(1-e^{-t}))\right) \qquad \textit{ha } x\neq y \tag{29}$$

$$W_t(x,y,k) = \mathbb{1}[2|k]\cdot\sum_{h=0}^{\infty} W(x,y,h)\sum_{l=0}^{\frac{k}{2}}\mathbf{b}(l,\frac{h}{2},e^{-t}))\cdot\mathbf{p}\left(\frac{k}{2}-l,\frac{D(W,x)\cdot D(W,y)}{2\rho(W)}(1-e^{-t}))\right) \qquad \textit{ha } x=y \tag{30}$$

A Theorem 4.1 állításának szemléletes magyarázatát a Section 4.6-ban írjuk le: az alapötlet az, hogy két csúcs között menő párhuzamos élek számának időfejlődése az idő megfelelő átskálázása után egy M/M/∞-sor sorhosszának időfejlődésére hasonlít.

A Theorem 4.1 szigorú bizonyítása a Section 4.9-ben található.

Most az élátkötős modell $T = \mathcal{O}(n^3)$ időskálán vett fejlődéséről mondunk ki egy tételt:

Theorem 4.2. *Rögzítsük a $\kappa \in (0, +\infty)$ paramétert. A $\mathcal{G}_n(T)$ élátkötős modellt tekintjük, amint $T = 0, 1, \dots,$ és jelölje a kezdeti $\mathcal{G}_n(0)$ multigráf adjacenciamátrixát B_n, $n = 1, 2, \dots$. Feltesszük, hogy $B_n \to W$ valamilyen W multigrafonra és hogy (27) teljesül.*

Ekkor minden $t \in (0, +\infty)$ esetén (de t=0 esetén nem) teljesül

$$\mathcal{G}_n\left(\lfloor t \cdot \rho(W) \cdot n^3 \rfloor\right) \xrightarrow{d} \hat{W}_t \qquad \textit{amint} \qquad n \to \infty, \tag{31}$$

ahol

$$\hat{W}_t(x, y, k) = \begin{cases} \mathbf{p}(k, \frac{F_t^{-1}(x) F_t^{-1}(y)}{\rho(W)}) & \textit{if } x \neq y \\ \mathbb{1}[2|k] \cdot \mathbf{p}\left(\frac{k}{2}, \frac{F_t^{-1}(x) F_t^{-1}(y)}{2\rho(W)}\right) & \textit{if } x = y \end{cases} \tag{32}$$

és F_t^{-1} az $F_t(x) = \int_0^x f(t, y)\,\mathrm{d}y$ eloszlásfüggvény inverze, ahol

$$f(t, x) = \int_0^\infty \sum_{i=0}^\infty \mathbf{p}(i, z \cdot \tau(\alpha, t)) \mathbf{g}(x, \kappa + i, \tau(\alpha, t) + \alpha)\,\mathrm{d}F_0(z), \tag{33}$$

$\alpha = \frac{\kappa}{\rho(W)}$, $\tau(\alpha, t) = \frac{\alpha}{\exp(\alpha t) - 1}$ *és* $F_0(x) = \int_0^1 \mathbb{1}[D(W, y) \leq x]\,\mathrm{d}y$, $x \in [0, +\infty)$.

A Theorem 4.2 bizonyítása a Section 4.10-ben található. Ugyanennek a tételnek szemléletes jelentést adunk a Section 4.6-ban: az alapötlet az, hogy egy csúcs fokszámának időfejlődése az idő megfelelő átskálázása után a C.I.R. folyamatéra hasonít.

Összefoglalva a Theorem 4.1 és Theorem 4.2 tételeket:

$$\mathcal{G}_n(t \cdot \frac{\rho(W)}{2} \cdot n^2) \xrightarrow{\mathrm{d}} W_t \qquad \text{és} \qquad \mathcal{G}_n(t \cdot \rho(W) \cdot n^3) \xrightarrow{\mathrm{d}} \hat{W}_t, \tag{34}$$

ahol a W_t és $\hat{W}_t$ multigrafonok explicit függvényei t-nek, W-nek és a κ paraméternek. Továbbá

$$\lim_{t \to 0_+} W_t = W, \qquad \lim_{t \to \infty} W_t = \lim_{t \to 0_+} \hat{W}_t, \qquad \lim_{t \to \infty} \hat{W}_t = W_\infty, \tag{35}$$

ahol W_∞ az élátkötős modell stacionárius állapotainak gráflimeszeként előálló multigrafon: $\mathcal{G}_n(\infty) \xrightarrow{\mathrm{d}} W_\infty$.

Tehát (35) miatt a (34) konvergenciatételek az élátkötős modell gráflimeszeinek időbeli fejlődésének *teljes jellemzését* adják.

Ugyan a fenti tételeket a "multigrafonos" formalizmus segítségével mondtuk ki, a bizonyításokban felhsználjuk a gráflimeszek és felcserélhető táblázatok elmélete közti kapcsolatot, melyet először [18]-ben fogalmaztak meg. A Section 4.5-ben megmutatjuk, hogy a $t_=(F, G_n)$ homomorfizmus-sűrűségek konvergenciája hogyan kapcsolódik a $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ multigráfok véletlenül újracímkézett adjacenciamátrixainak eloszlásban való konvergenciájához.

4.4 A bizonyításokról

A Section 4.6-ban a fenti eredmények szemléletes magyarázatát adjuk a felcserélhető táblázatok elméletének segítségével. Ezek a heurisztikus bizonyítások az igazi bizonyítások vázlatául is szolgálnak. Az alapötlet az, hogy az élátkötős modell időbeli fejlődését bizonyos folytonos idejű sztochasztikus folyamatokéhoz hasonlítjuk, az idő megfelelő átskálázása után:

- Ha rögzítünk egy $v \in V(\mathcal{G}_n(0))$ csúcsot és $d(T, v)$-vel jelöljük v $\mathcal{G}_n(T)$-beli fokát, akkor $\frac{1}{n} d(n^3 \cdot t, v)$ (ami egy $\mathbb{R}_+$-értékű, folytonos idejű sztochasztikus folyamat) időfejlődése "majdnem úgy néz ki", mint egy Cox-Ingersoll-Ross folyamaté (a C.I.R. folyamat egy diffúziós folyamat, amit a pénzügyi matematikában gyakran használnak a kamatlábak időbeli fejlődésének modellezésére). Ennek a ténynek a szigorú bizonyításához a sztochasztikus differenciálegyenletek elméletét használjuk.

- Ha rögzítünk két $v, w \in V(\mathcal{G}_n(0))$ csúcsot és $E(T, v, w)$-vel jelöljük a v és w közt menő párhuzamos/hurokélek számát $\mathcal{G}_n(T)$-ben, akkor $E(n^2 \cdot t, v, w)$ (ami egy $\mathbb{N}_+$-értékű folytonos idejű sztochasztikus folyamat) időfejlődése "majdnem úgy néz ki", mint egy M/M/∞-sor sorhosszáé. Ennek a ténynek a szigorú bizonyításához egy csatolásos érvelést használunk.

Az élátkötős modell legérdekesebb tulajdonsága az, hogy az időfejlődése *két jól különválasztható időskálán* történik: a csúcsok fokszáma csak az n^3-ös időskálán változik számottevően meg, míg a a párhuzamos/hurokélek száma a sokkal gyorsabb n^2-es időskálán változik. Annak az M/M/∞-sornak a beérkezési rátája, ami az $E(n^2 \cdot t, v, w)$ fejlődését írja le, függ a v és w csúcsok aktuális fokszámától, de mivel a fokszámok a lassú n^3-ös skálán változnak, így tekinthetjük őket konstans háttérváltozóknak az n^2-es időskálán.

Ha rögzítünk k csúcsot a multigráfunkban és $\mathcal{G}_n^k(T)$-vel jelöljük $\mathcal{G}_n(T)$ azon véletlen részgráfját, amit ez a k csúcs feszít, akkor $\mathcal{G}_n^k(n^3 \cdot t + n^2 \cdot s)$ (ami egy multigráf-értékű sztochasztikus folyamat) stacionáriusnak néz ki az $s \in \mathbb{R}$ változójában, ha $t \in (0, +\infty)$ értékét rögzítjük és $1 \ll n$, de t különböző értékeit véve különböző pszeudo-stacionárius eloszlásokat kapunk, ugyanis $n^3 \cdot (t_2 - t_1)$ lépés elég ahhoz, hogy a háttérváltozók (fokszámok) számottevően megváltozzanak.

Ezt a jelenséget *öregedésnek* (aging) hívják a statisztikus fizikában, lásd [4] és [9].

A Section 4.7-ben a Pólya-féle urnamodell felhasználásával explicit módon leírjuk az élátkötős modell $\mathcal{G}_n(\infty)$ stacionárius eloszlását, és bebizonyítjuk a $\mathcal{G}_n(\infty) \xrightarrow{\mathrm{d}} W_\infty$ konvergenciát.

A bizonyítás közbülső lépéseként leírjuk azoknak a véletlen multigráfoknak a limeszobjektumát, amiknek az eloszlása egyenletes azoknak a multigráfoknak a halmazán, amelyeknek a fokszámsorozata valamilyen előre megadott sorozat. Ezt a konstrukciót *konfigurációs modellnek* hívják a véletlen gráfok elméletében.

References

[1] D. J. Aldous. Representations for partially exchangeable arrays of random variables. *J. Multivar. Anal.*, **11**, 581-598. (1981)

[2] D. J. Aldous. Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation and coagulation): a review of the mean-field theory for probabilists. *Bernoulli*, **5**: 3–48. (1999)

[3] D. J. Aldous. The percolation process on a tree where infinite clusters are frozen. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 128(3):465–477, 2000.

[4] G. Ben Arous, J. Cerny. Dynamics of trap models. In: A. Bovier et al. (Eds) *Lecture notes of Les Houches summer school 2005.* Mathematical Statistical Physics vol. LXXXIII, pp. 331-394, Elsevier. (2006)

[5] J. van den Berg, R. Brouwer. Self-destructive percolation. *Random Structures and Algorithms*, **24**: 480-501. (2004)

[6] J. van den Berg, R. Brouwer. Self-organized forest-fires near the critical time. *Communications in Mathematical Physics*, **267**: 265-277. (2006)

[7] J. van den Berg, A. Járai. On the asymptotic density in a one-dimensional selforganized critical forest-fire model. *Communications in Mathematical Physics*, **253**: 633-644. (2005)

[8] J. van den Berg, B. Tóth. A signal-recovery system: asymptotic properties, and construction of an infinite-volume limit. *Stochastic Processes and their Applications*, **96**: 177-190. (2001)

[9] J. Bertoin. An aging phenomenon for a fragmentation-coagulation process. arXiv:1001.3721

[10] P. Billingsley. *Probability and Measure.* Third edition, New York, Wiley. (1995)

[11] K. A. Bold. Development and application of equation-free methods to network evolution and coupled oscillators. *PhD thesis.* (2008)

[12] B. Bollobás. *Random Graphs.* Cambridge University Press. (2001)

[13] C. Borgs, J. Chayes, L. Lovász, V. Sós, K. Vesztergombi. Limits of randomly grown graph sequences. arXiv.org:0905.3806

[14] R. Brouwer. *Percolation, forest-fires and monomer-dimers (or the hunt for self-organised criticality).* PhD thesis, VU Amsterdam. (2005)

[15] E. Buffet, J.V. Pulè. On Lushnikov's model of gelation. *Journal of Statistical Physics*, **58**: 1041-1058. (1990)

[16] E. Buffet, J.V. Pulè. Polymers and random graphs. *Journal of Statistical Physics*, **64**: 87-110. (1991)

[17] A. J. G. Cairns. *Interest rate models - an introduction.* Princeton University Press. (2004)

[18] P. Diaconis, S. Janson. Graph limits and exchangeable random graphs *Rend. Mat. Appl. (7)*, **28**, no. 1, 33–61. (2008)

[19] B. Drossel, F. Schwabl. Self-organized critical forest fire model. *Physical Review Letters*, **69**: 1629-1632. (1992)

[20] M. Duerre. Existence of multi-dimensional infinite volume self-organized critical forest-fire models. *Electronic Journal of Probability*, **11**: 513-539. (2006)

[21] M. Duerre. Uniqueness of multi-dimensional infinite-volume self-organized critical forest fire models. *Electronic Communications in Probability*, **11**: 304-315. (2006)

[22] P. Erdős, A. Rényi. On random graphs I. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **6**: 290-297. (1959)

[23] L. C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, (1998)

[24] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York. (1971)

[25] M. Ispány and Gy. Pap. A note on weak convergence of random step processes. *(to appear in) Acta Mathematica Hungarica*, arXiv:math/0701803

[26] S. Janson, T. Luczak, A. Rucinski. *Random Graphs.* John Wiley and Sons, NY. (2000)

[27] L. Kleinrock. *Queueing Systems. Volume I: Theory.* Wiley-Interscience. (1975)

[28] I. Kolossváry and B. Ráth. Multigraph limits and exchangeability. *(submitted)*, arXiv:0910.0547

[29] J. Lamperti. *Probability: A survey of the mathematical theory.* W.A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam. (1966)

[30] L. Lovász, B. Szegedy. Limits of dense graph sequences. *J. Combin. Theory Ser. B* **96**, no. 6, 933–957. (2006)

[31] L. Lovász and B. Szegedy. Random graphons and weak positivstellensatz for Graphs. arXiv.org:0902.1327

[32] A. Lushnikov. Some new aspects of coagulation theory. *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Fiz. Atmosfer. I Okeana* vol 14, no 10, 738-743. (1978)

[33] B. Ráth. Mean field frozen percolation. *Journal of Statistical Physics* vol 137, no 3, pp. 459-499. (2009)

[34] B. Ráth, L. Szakács. Time evolution of dense multigraph limits under edge-conservative preferential attachment dynamics. *(submitted)* arXiv:0912.3904

[35] B. Ráth, B. Tóth. Triangle percolation in mean field random graphs – with PDE. *Journal of Statistical Physics* vol. 131, no. 3, pp. 385-391. (2008)

[36] B. Ráth, B. Tóth. Erdős-Rényi random graphs + forest fires = self-organized criticality. *Electronic Journal of Probability* 14:1290-1327. (2009)

[37] K. Schenk, B. Drossel, F. Schwabl. Self-organized critical forest-fire model on large scales. *Physical Review E*, **65**: 026135. (2002)

[38] D. Williams *Probability with martingales.* Cambridge University Press, Cambridge. (1991)

[39] R. M. Ziff, M. H. Ernst, E. M. Hendriks Kinetics of gelation and universality *J. Phys. A: Math. Gen.* vol 16, 2293–2320. (1983)