Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematikai Intézet

Pitrik József

Markov tulajdonság a nemkommutatív valószínűségelméletben

Tézisfüzet

Témavezető: Prof. Petz Dénes

2009

1. Előzmények

A sztochasztikus folyamatok elméletében kiemelkedő fontosságú az a speciális eset, mikor adott jelenbeli állapot mellett, a rendszer jövőbeli állapota nem függ a múltbeliektől. Ezt a tulajdonságot szokás Markov-tulajdonságnak hívni. Tekintsünk egy X valószínűségi változót (v.v.), mely az értékeit az $\mathcal{X}$ véges halmazból veszi fel, s melynek a valószínűségi eloszlása $p(x) = \text{Prob}\{X = x\}$, $x \in \mathcal{X}$. $\mathcal{X}$ halmazt szokás állapottérnek, míg elemeit állapotoknak hívni. Sztochasztikus folyamaton valószínűségi változók egy sorozatát értjük. A folyamatot a $p(x_1, \ldots, x_n) = \text{Prob}\{(X_1, \ldots, X_n) = (x_1, \ldots, x_n)\}$ együttes valószínűségek teljesen meghatározzák, ahol $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}^n$ minden $n = 1, 2, \ldots$-re. Általában egy sztochasztikus folyamatban tetszőleges kapcsolat lehet a v.v.-k között. Egy egyszerű, de fontos speciális eset, mikor egy v.v. bekövetkezésének valószínűsége kizárólag az őt eggyel megelőző v.v. bekövetkezési valószínűségétől függ, az azt megelőzőekétől nem. Az ilyen sztochasztikus folyamatot hívjuk diszkrét, megszámlálható állapotterű Markov-láncnak, röviden Markov-láncnak. A legtöbb esetben csak három valószínűségi változó viszonyára fogunk szorítkozni. Azt mondjuk, hogy az X,Y és Z v.v.-k Markov-hármast alkotnak (jelben $X \to Y \to Z$), ha az együttes valószínűségükre fennáll, hogy

$$p(x, y, z) = p(x)p(y|x)p(z|y),$$

ahol

$$p(y|x) = \frac{\text{Prob}\{X = x, Y = y\}}{\text{Prob}\{X = x\}}$$

a feltételes valószínűség. Ha Z reprezentálja a jövőbeli állapotot, Y a jelent, míg X a múltat, a Markov-tulajdonság azt fejezi ki, hogy egy adott jelenbeli állapotban a jövő független a múltbeli állapotoktól, más szóval a jövő csak a jelenen keresztül függhet a múlttól, vagyis a folyamatnak nincs emlékezete. Tanulságos a Markov-láncokat megvizsgáni információelméleti szempontból.

A modern információelmélet alapjait *Claude Shannon* rakta le 1948-ban publikált két cikkével. A döntő lépést kétségtelenül azzal tette meg, hogy matematikailag precíz megközelítését adta az információ fogalmának. Tiszteletére, egy X diszkrét v.v. bizonytalanságának a mértékét Shannon-entrópiának nevezzük:

$$H(X) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\log p(x).$$

(Ha a log kettes alapú, az entrópiát bitekben adjuk meg, míg természetes alapú logaritmus esetén az egységét nat-ben mérjük.) Könnyen ellenőrizhető, hogy a Shannon-entrópia valóban kifejezi azt, amit az információ fogalmától intuitíve várunk. Például jól jellemezhető vele v.v.-k viszonya. Két v.v.-t tekintve könnyen megmutatható, hogy a Shannon-entrópia szubadditív, azaz

$$H(X,Y) \le H(X) + H(Y),$$

ahol $H(X,Y) = -\sum_{x\in\mathcal{X},y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(x,y)$ jelöli az X és Y v.v.-k együttes entrópiáját, ami az (X,Y) pár teljes bizonytalanságát jellemzi. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha X és Y függetlenek. Három v.v.-ra kiterjesztve vizsgálatunkat azt kapjuk, hogy a Shannon-entrópia erősen szubadditív, azaz

$$H(X,Y,Z) + H(Y) \le H(X,Y) + H(Y,Z).$$

Itt egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $X \to Y \to Z$, azaz X,Y és Z Markov-hármast alkotnak. Példaként megemlítjük, hogy többváltozós normál eloszlású Markov-hármasok karakterizációja megadható többek között kovariancia mátrixuk segítségével [4].

A Markov-láncok az egyik legtöbbet kutatott és legtöbb alkalmazással bíró területe a sztochasztikus folyamatok elméletének, így természetes módon merült fel az általánosítások igénye. Dolgozatomban a Markov-tulajdonság nemkommutatív valószínűségek esetére történő kiterjesztését vizsgáltam, ami szoros kapcsolatban van a kvantumfizikával.

A XX-dik század fordulóján a mikrorészecskékkel kapcsolatosan több olyan jelenséget is tapasztaltak, melyek a klasszikus fizika keretein belül nem voltak magyarázhatóak. Ezek odáig vezettek, hogy az 1920-as években többek között *Werner Heisenberg* és *Erwin Schrödinger* munkássága során teljesen új fizika képe kezdett kirajzolódni. *Neumann János* éppen Göttingenben dolgozott, mikor Heisenberg az első előadásokat tartotta új elméletéről. Neumann felismerte, hogy Heisenberg és Schrödinger elmélete mögött ugyanaz a matematikai tartalom található és lefektette a kvantumelmélet precíz matematikai alapjait a Hilbert tér lineáris operátorainak kutatásával [14]. A továbbiakban *F.J. Murray*-vel közösen, a ma Neumann-algebráknak nevezett operátoralgebrák vizsgálatába kezdett és megadta ezek első klasszifikációját [13]. Ezt tekinthetjük a nemkommutatív valószínűségelmélet kiinduló pontjának.

A nemkommutatív vagy kvantum valószínűségelméletben a valószínűségi változók szerepét egy egységelemes $\mathcal{A}$ C*-algebra önadjungált elemei veszik át. Valószínűségi mértéken az $\mathcal{A}$ algebra egy ϕ állapotát, azaz egy pozitív, lineáris funkcionálját értjük, melyre $\phi(\mathbf{1}) = 1$, ahol $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ az egységelem. Ekkor az $(\mathcal{A}, \phi)$ párt algebrai vagy absztrakt valószínűségi mezőnek hívjuk, míg ha $\mathcal{A}$ nemkommutatív algebra, nemkommutatív valószínűségi mezőről beszélünk. Ha $\mathcal{A}$ kommutatív, akkor a Gelfand-Naimark- illetve a Riesz-Kakutáni-tétel következtében visszajuthatunk a klasszikus valószínűségi mezőhöz. Nemkommutatív esetben $\mathcal{A}$-t reprezentálhatjuk a $\mathcal{H}$ komplex szeparábilis Hilbert-téren vett korlátos operátorok $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ Neumann-algebrájának részalgebrájaként. Ha a ϕ állapot úgynevezett normál állapot $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-n, azaz feltesszük, hogy gyengén folytonos, akkor létezik pontosan egy ρ sűrűségi mátrix (statisztikus operátor) $\mathcal{H}$-n, melyre $0 < \rho = \rho^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathrm{Tr}\,(\rho) = 1$ és $\phi(A) = \mathrm{Tr}\,(\rho A)$, minden $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ esetén. Fizikai szempontból $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ önadjungált operátorait azonosítjuk a fizikailag megfigyelhető mennyiségekkel (obszervábilisek), míg a ϕ normál állapotok jellemzik magát a fizikai rendszert. Amennyiben a Markov-tulajdonságot szeretnénk definiálni, szükségünk van a feltételesség fogalmára. A feltételes várható érték fogalmát először *H. Umegaki* definiálta 1962-ben, mint egy $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 1-normájú projekciót az $\mathcal{A}$ C*-algebráról a $\mathcal{B}$ részalgebrára [19]. Az E leképezés teljesen pozitív egységtartó kétoldali $\mathcal{B}$ modulus *J. Tomiyama* egy tételének következtében [18]. Azt mondjuk, hogy E kompatibilis a ϕ állapottal, ha $\phi \circ E = \phi$. Sajnos Umegaki definiciója nem tökéletes a Markov-tulajdonság kifejezésére, hiszen könnyű látni, hogy egy ϕ állapot $M_n \otimes M_n$-n pontosan akkor lesz kompatibilis egy $M_n \otimes I$-ra vett Umegaki-féle feltételes várható értékkel, ha szorzatállapot, ami azt fejezi ki, hogy a marginálisai függetlenek. (Itt M_n az $n \times n$-es komplex mátrixok algebráját jelöli, ami tipikusan egy nemkommutatív C*-algebra.) Ez a jelenség késztette *L. Accardi*-t és *A. Frigerio*-t 1978-ban arra, hogy új definicióval éljenek [3]. Tekintsük egységelemes C*-algebrák egy $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ hármasát. Általánosított várható értéken az adott hármasra nézve egy teljesen pozitív, egységtartó lineáris $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ leképezést értünk, melyre

$$E(ca) = cE(a), \quad a \in \mathcal{A}, c \in \mathcal{C}.$$

Az általánosított várható érték fogalmával a Markov-tulajdonság általánosítása a következőképpen történik [1, 2].

Definíció 1.1 *Egy ϕ állapotot az $\mathcal{A}$ C*-algebrán Markov-állapotnak hívunk, ha létezik egy E általánosított várható érték a $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ hármasra nézve, melyre teljesülnek a következők:*

(i) $\phi_{\mathcal{B}} \circ E = \phi$

(ii) $E(\mathcal{A} \setminus \mathcal{C}) \subset (\mathcal{B} \setminus \mathcal{C})$,

ahol $\phi_{\mathcal{B}}$ jelöli ϕ megszorítását a $\mathcal{B}$ részalgebrára.

Használni fogjuk a Markov-hármas vagy Markov-triplet kifejezést is ϕ állapotra. Belátható, hogy ha ismét a kommutatív esetet tekintjük, visszakapjuk a klasszikus értelemben vett Markov-hármast. Az absztrakt definició ellenére a nemkommutatív (kvantum) Markov-állapotok elmélete hamar virágzásnak indult. Több általánosítás és speciális eset is górcső alá került (itt csak a kvantum Markov-láncokra és mezőkre valamint a végesen korrelált állapotokra utalnék), melyek több szilárdtestfizikai alkalmazást nyertek. Megemlítendő többek között *M.*

Fannes, *B. Nachtergaele* és *R.F. Werner* munkássága, akik az antiferromágneses Heisenberg-modell alapállapotát találták meg egy alkalmazásként [7]. Természetesen adódik a kérdés, hogy lehetséges-e a Markov-állapotok karakterizálása információelméleti módszerekkel, mint ahogy azt láttuk a klasszikus esetben. Ha ρ egy normál ϕ állapot sűrűségi mátrixa, definiálhatjuk a Neumann-entrópiát a

$$S(\phi) \equiv S(\rho) = -\mathrm{Tr}\,\rho \log \rho$$

formulával. Hasonlóan a Shannon-entrópiához, a Neumann-entrópia is fontos szerepet játszik összetett rendszerek korrelációjának vizsgálatában. A Neumann-entrópia is szubadditív, azaz

$$S(\phi_{12}) \leq S(\phi_1) + S(\phi_2),$$

ahol ϕ_{12} az összetett $\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ rendszer egy normál állapota. Az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha ϕ_{12} a marginálisainak szorzata, vagyis $\phi_{12} = \phi_1 \otimes \phi_2$, ami a nemkommutatív analogonja valószínűségi változók függetlenségének. A Neumann-entrópia erős szubadditívitását *E. Lieb* és *M.B. Ruskai* bizonyította 1973-ban [10]. Tekintsük $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ Neumann-algebra $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ és $\mathcal{A}_3$ részalgebráit, melyekről tegyük fel, hogy három kvantumrendszert reprezentálnak. Vegyük ezek különböző $\mathcal{A}_{123} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ és $\mathcal{A}_{23} = \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$ összetételeit. Legyen ϕ_{123} $\mathcal{A}_{123}$ egy normál állapota és jelölje az $\mathcal{A}_{12}$, $\mathcal{A}_{23}$ illetve $\mathcal{A}_2$ részrendszerekre vett megszorításait rendre ϕ_{12}, ϕ_{23} és ϕ_2. Ekkor fennáll a Neumann-entrópia erős szubaddítívitása, azaz

$$S(\phi_{123}) + S(\phi_2) \leq S(\phi_{12}) + S(\phi_{23}).$$

Sőt, a fent vázolt esetben egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha ϕ_{123} Markov-állapot. A tenzorszorzat rendszereken a Markov-állapotok teljes karakterizációját 1994-ben adta meg *P. Hayden, R. Jozsa, Petz D.* és *A. Winter* [8]. Összetett fizikai rendszerek esetén nem mindig elégséges a részrendszerek tenzorszorzatát tekintenünk, hiszen ebben az esetben az egyes részrendszereket leíró operátorok kommutálnak. Valóban, tekintsünk egy n számú ν szabadsági fokú azonos pontszerű részecskéből álló kvantumrendszert, melyet $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^{\nu n})$ Hilbert-tér sugarai jellemeznek. Ha a $\psi \in \mathcal{H}$ normált, akkor

$$\mathrm{d}p(x_1, \ldots, x_n) = |\psi(x_1, \ldots, x_n)|^2 \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

megadja annak a valószínűségét, hogy a ψ hullámfüggvénnyel jellemzett n részecske az $\mathbb{R}^{\nu n}$ konfigurációs tér egy $(x_1, \ldots, x_n)$ pontjának egy infinitezimális környezetében található. Mivel azonban a kvantumfizikában az azonos részecskék megkülönböztethetetlenek, ez a tulajdonság tükröződik a ψ hullámfüggvény szimmetriájában a részecskék koordinátáinak felcserélésekor. Ezen koordinátacserék megadják a permutációcsoport egy unitér ábrázolását, melynek két részábrázolása bír kiemelt jelentőséggel. Az első esetben ψ szimmetrikus a koordinátacserékre nézve. Az így transzformálódó részecskéket bozonoknak hívjuk és az un. Bose-Einstein-statisztikának engedelmeskednek. A második esetben a hullámfüggvény antiszimmetrikus a koordináták felcserélésére. A megfelelő részecskéket fermionoknak hívjuk és a Fermi-Dirac-statisztikát elégítik ki. A fermion hullámfüggvény antiszimmetriájának fontos következménye a Pauli-elv, mely szerint nem tartózkodhat egyszerre két fermion ugyanabban az állapotban. Bozonokra a Pauli-elv nem áll fenn, az egy állapotban tartózkodó bozonok számának nincs felső korlátja. Matematikailag ez azt jelenti, hogy az úgynevezett bozon keltő illetve eltüntető operátorok nem lesznek korlátosak, mely számos technikai nehézséget okoz. A problémák részben elkerülhetővé válnak, ha ezen operátorok bizonyos korlátos függvényeit tekintjük. Igy jutunk el a Weyl-operátorok fogalmához. A Weyl-operátorok eleget tesznek egy speciális felcserélési relációnak, melyet kanonikus felcserélési relációnak hívunk, míg az általuk generált algebrát az angol elnevezés után CCR-algebrának nevezzük. A fermionok esetén a keltő és eltüntető operátorok korlátosak, így ezek tárgyalása matematikailag egyszerűbb. Ezen operátorok az úgynevezett kanonikus "anti-felcserélési" relációnak tesznek eleget, az általuk generált algebrát CAR-algebrának hívjuk. Megemlítjük, hogy mind a CAR-, mind a CCR-algebra esetén lehetőség nyílik a klasszikus Gauss-eloszlás analogonjának a definiálására. Valóban, a klasszikus valószínűségszámításban a Gauss-mérték olyan karakterisztikus függvényhez vezet, melynek exponensében egy kvadratikus forma áll. Ennek logaritmusa így egy másodfokú polinom és az összes korrelációs függvény eltünik a második rend fölött. Megjegyzendő, hogy *J. Marcinkiewitz* egy tétele szerint, ha egy véges rend fölött eltünnek a korrelációk, akkor eltünnek a második rend fölött is és az együttes eloszlás normális [11]. A fermionok és a bozonok esetén is definiálhatjuk a korrelációs függvényeket és a klasszikus gondolatmenetet követve eljuthatunk a Gauss-mérték általánosításához, az úgynevezett kváziszabad állapotokhoz. Ezen állapotokban az összes n-pont korrelációs függvényt meghatározzák a 2-pont függvények, sőt ezen állapotok megkaphatók, mint bizonyos határeloszlás tételek limeszei.

Munkám során a nemkommutatív Markov-állapotok analízisét tüztem ki célul. Szükséges és elégséges feltételeket találtam ahhoz, hogy egy állapot Markov-tulajdonságú legyen. Megadtam két fizikailag is releváns esetben (a fermionok illetve a bozonok esetében) a Gauss-eloszlásnak megfelelő kváziszabad állapotokra a Markov-tulajdonság teljes karakterizációját. Vizsgálódásaim során, több önmagában is érdekes eredményt találtam, különös tekintettel bizonyos entrópikus mennyiségekre vonatkozólag.

2. Főbb eredmények

1. Bár a Neumann-entrópia erős szubadditívitása régóta ismert, az eddigi bizonyítások zöme meglehetősen bonyolult. Sikerült egy viszonylag egyszerű bizonyítást adnom a Golden-Thompson-Lieb-egyenlőtlenségre támaszkodva, melynek előnye, hogy nemcsak tenzorszorzatokon működik, hanem pusztán egy nyomtartó feltételes várható érték meglétét követeli meg, ami egészen általános esetekben létezik is. A bizonyítás további előnye, hogy szükséges és elégséges feltételt ad az egyenlőség esetére.

Tétel 2.1 *Tekintsük az $\mathcal{A}_{123}$ C^*-algebra $\mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{23}$ és $\mathcal{A}_2$ részalgebráit, továbbá legyen $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{23}$. $\mathcal{A}_{123}$ egy ϕ_{123} normál állapotára jelölje rendre ϕ_{12}, ϕ_{23} és ϕ_2 ennek megszorításait $\mathcal{A}_{12}$, $\mathcal{A}_{23}$ illetve $\mathcal{A}_2$ algebrákra. Ha léteznek a nyomtartó $E_{12} : \mathcal{A}_{123} \to \mathcal{A}_{12}$ és $E_{23} : \mathcal{A}_{123} \to \mathcal{A}_{23}$ feltételes várható értékek, melyekre $E_{12} \circ E_{23} = E_{23} \circ E_{12}$ teljesül, akkor a Neumann-*

entrópiákra fennáll az erős szubadditívitás, azaz

$$S(\phi_{123}) + S(\phi_2) \leq S(\phi_{12}) + S(\phi_{23}).$$

Továbbá, akkor és csak akkor kapunk egyenlőséget, ha a megfelelő statisztikus operátorok kielégítik a

$$\log D_{123} + \log D_2 = \log D_{12} + \log D_{23}.$$

egyenlelet.

Megjegyzendő, hogy az egyenlőség feltételei egyéb formában is kifejezhetőek [16, 17].

2. Láttuk, hogy egy három tényezős tenzorszorzat téren pontosan azok a Markov-állapotok, melyekre egyenlőség van a Neumann-entrópia erős szubadditívitásában. Egy tenzorszorzat téren vett Markov-hármasok teljes karakterizációja ismert [8]. Ezen rendszerek részrendszerei azonban kommutálnak, nagyban leegyszerűsítve a vizsgálatokat. Tekintsünk egy megszámlálható fermionból álló rendszert, melynek elemeit indexelje az I megszámlálható halmaz. Bár ekkor a rendszert leíró $\mathcal{A}(I)$ CAR-algebra izomorf a $\overline{\otimes_I M_2(\mathbb{C})}^{C^*}$ C*-tenzorszorzattal, ám az izomorfizmus nem őrzi meg a természetes lokalizációt. Más szóval, a diszjunkt részrendszerek nem felcserélhetőek egymással, szemben a tenzorszorzat rendszerekkel. Matematikailag többek között ebben fejeződik ki a Pauli-elv, még nem kölcsönható fermionok között is erős korreláció van statisztikájukból kifolyólag. Számunkra ez azt jelenti, hogy a tenzorszorzatra vonatkozó bizonyítások nem

alkalmazhatóak közvetlenül a CAR-algebrák esetén. Ezen nehezségek ellenére a Neumann-entrópia erősen szubadditív marad, ahogy az a 2.1 Tételből adódik, lévén létezik nyomtartó feltételes várható érték. Más úton jutott hasonló eredményre Araki és Moriya [5].

Legyen I és J $\mathbb{Z}$ két tetszőleges részhalmaza. Jelölje $\mathcal{A}(I \cup J)$, $\mathcal{A}(I)$, $\mathcal{A}(J)$ és $\mathcal{A}(I \cap J)$ rendre az $I \cup J$, I, J $I \cap J$ halmazokhoz tartozó CAR-algebrákat, az $\phi_{I \cup J}$, ϕ_I, ϕ_J és $\phi_{I \cap J}$ állapotokkal. Ekkor

$$S(\phi_I) + S(\phi_J) \geq S(\phi_{I \cap J}) + S(\phi_{I \cup J}). \tag{1}$$

Igazoltam, hogy ha az állapotok egy fontos osztályára, az úgynevezett páros állapotokra szorítkozunk, a Markov-tulajdonság és a Neumann-entrópia erős additívitása ekvivalensek egymással.

Tétel 2.2 *Legyen $\phi_{I \cup J}$ a $\mathcal{A}(I \cup J)$ CAR-algebra egy páros állapota. Ekkor $\phi_{I \cup J}$ Markov-állapot az $\{\mathcal{A}(I \setminus J), \mathcal{A}(I), \mathcal{A}(I \cup J)\}$ lokalizációra nézve, azaz létezik egy γ általánosított várható érték az $\mathcal{A}\,(I \setminus J) \subset \mathcal{A}(I) \subset \mathcal{A}(I \cup J)$ hármasra nézve, melyre fennállnak a*

$$\phi_I \circ \gamma = \phi_{I \cup J}, \tag{2}$$

$$E\,(\mathcal{A}(J)) \subset \mathcal{A}(I \cap J), \tag{3}$$

feltételek, akkor és csak akkor, ha egyenlőség teljesül a Neumann-entrópia erős szubadditívitásában, azaz

$$S(\phi_I) + S(\phi_J) = S(\phi_{I \cap J}) + S(\phi_{I \cup J}). \tag{4}$$

Sikerült az állapot paritására tett megszorítás enyhítése is, amennyiben a lokalizáció feltételein erősítünk.

Tétel 2.3 *A $\phi_{I\cup J}$ állapot az $\mathcal{A}(I \cup J)$ CAR-algebrán pontosan akkor Markov-állapot az $\{\mathcal{A}(I\setminus J)^+, \mathcal{A}(I), \mathcal{A}(I\cup J)\}$ lokalizációra nézve, ha (4) fennáll.*

Itt $\mathcal{A}(I \setminus J)^+$ a páros részalgebrát jelöli. A 2.2 Tétel egy enyhébb változatát Moriya már korábban bizonyította.

3. CAR-algebrák állapotainak egy fontos osztályát jelentik a kváziszabad állapotok, amelyek a klasszikus Gauss-eloszlás analogonjainak tekinthetők. Megmutattam, hogy ilyen állapotok pontosan akkor Markov-állapotok, ha a marginálisaik szorzatai az adott lokalizációra nézve, vagyis függetlenek.

4. A továbbiakban a bozonokat leíró CCR-algebrákkal foglalkoztam. Tekintsük a $CCR(\mathcal{H})$ algebrát valamilyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér felett és rajta egy ψ normál állapotot. A

$$C_\psi(f,g) := \psi(B^+(f)B^-(g)), \quad f,g \in \mathcal{H}$$

függvényt ψ 2-pont függvényének nevezzük, amennyiben létezik. Itt B^- és B^+ jelölik a bozon keltő illetve eltüntető operátorokat. A

$$\langle g|Tf\rangle = C_\psi(f,g) \tag{5}$$

által definiált pozitív T operátort ψ 2-pont operátorának hívjuk. Egy kváziszabad állapotot teljes mértékben meghatároz a 2-pont operátora, ezért ezt szokás az állapot indexében is feltüntetni, és az állapot szimbólumának hívni. Petz Dénessel kiszámoltuk ψ és egy kváziszabad ω_A állapot relatív entrópiáját.

Tétel 2.4 *Legyen ψ egy állapot a $CCR(\mathcal{H})$ algebrán, melynek T a 2-pont operátora. Ekkor ψ relatív entrópiája egy kváziszabad ω_A állapotra nézve*

$$S(\psi\|\omega_A) = -S(\psi) - \mathit{Tr}\, T \log A(I+A)^{-1} + \mathit{Tr}\, \log(I+A). \quad (6)$$

Következményként adódik, hogy egy kváziszabad ω_A állapot rendelkezik a legnagyobb Neumann-entrópiával az összes A 2-pont operátorú állapot között.

Tétel 2.5 *Tekintsük ψ állapotot* $\mathrm{CCR}(\mathcal{H})$*-n, melyre*

$$\psi(B^+(f)B^-(g)) = \langle g, Af\rangle \quad (f, g \in \mathcal{H})$$

valamely pozitív $A \in B(\mathcal{H})$ operátorra. Ekkor $S(\psi) \leq S(\omega_A)$ és egyenlőség esetén $\psi = \omega_A$.

5. Vizsgáltuk a Markov-tulajdonság teljesülését CCR-algebrákon. Tekintsük a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egy $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$ ortogonális felbontását. Ekkor

$$\mathrm{CCR}(\mathcal{H}) = \mathrm{CCR}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathrm{CCR}(\mathcal{H}_2) \otimes \mathrm{CCR}(\mathcal{H}_3)$$

és a Markov-tulajdonságot definiálhatjuk egyenlőségként a Neumann-entrópia erős szubadditívitásában, ahogy tenzorszorzatokon szokás [15]. Ha a φ_{123} állapot kváziszabad, akkor teljesen meghatározza a 2-pont operátora. Célunk az, hogy leírjuk a Markov-tulajdonságot ezen operátoron keresztül.

Tekintsük az $\omega_A \equiv \omega_{123}$ kváziszabad állapotot, ahol A egy pozitív operátor $\mathcal{H}$-n, az állapot 2-pont operátora. Ezen operátor a következő blokkmátrixos alakba írható, $\mathcal{H}$ felbontásának megfelelően:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12}^* & A_{22} & A_{23} \\ A_{13}^* & A_{23}^* & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Jelölje P_i az ortogonális projekciót $\mathcal{H}$-ról $\mathcal{H}_i$-ra, $(1 \leq i \leq 3)$. Természetesen, $P_1 + P_2 + P_3 = I$ és bevezethetjük az $P_{12} := P_1 + P_2$ és $P_{23} := P_2 + P_3$ jelöléseket. Petz Dénessel igazoltuk a következő tételt.

Tétel 2.6 *Tegyük fel, hogy $A \in B(\mathcal{H})$ pozitív operátor és az $\omega_A \equiv \omega_{123}$ egy kváziszabad állapot* CCR($\mathcal{H}$)*-n véges Neumann-entrópiával. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.*

(a) $S(\omega_{123}) + S(\omega_2) = S(\omega_{12}) + S(\omega_{23})$

(b) $Tr\,\kappa(A) + Tr\,\kappa(P_2 A P_2) = Tr\,\kappa(P_{12} A P_{12}) + Tr\,\kappa(P_{23} A P_{23})$, *ahol* $\kappa(t) = -t \log t + (t+1)\log(t+1)$.

(c) Létezik $P \in B(\mathcal{H})$ projekció, melyre $P_1 \leq P \leq P_1 + P_2$ és $PA = AP$.

A (c) feltétel azt jelenti, hogy A a következő blokkdiagonális formát ölti

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} a^* \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & b^* \end{bmatrix} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & a \\ a^* & c \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} d & b \\ b^* & A_{33} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

ahol a, b, c, d, valamint 0 megfelelő operátorok.

6. Vizsgáltuk a relatív entrópia minimalizálását a kváziszabad állapotra nézve, bizonyos feltételek mellett. Megmutattuk, hogy hasonlóan a klasszikus esethez [6], a minimalizáló állapot is Markov-tulajdonságú.

Tétel 2.7 *Legyen* $\omega \equiv \omega_A$ *egy kváziszabad Markov-állapot a* $\mathrm{CCR}(\mathcal{H})$ *algebrán és* ψ_1 *egy állapot* $\mathrm{CCR}(\mathcal{H}_1)$*-n valamely 2-pont függvénnyel. Ha* ψ *minimalizálja az* $S(\psi||\omega_A)$ *relatív entrópiát, úgy hogy a* $\psi|\mathrm{CCR}(\mathcal{H}_1) = \psi_1$ *marginális rögzített, akkor* ψ *Markov-állapot.*

Megjegyzendő, hogy a ψ állapotnak ugyanaz a feltételes várható értéke, mint az adott ω állapotnak. A klasszikus valószínűségszámításban hasonló tétel bizonyítható. Hasonló tételt igazoltunk a feltétel megváltoztatásakor.

Tétel 2.8 *Legyen* $\omega \equiv \omega_A$ *kváziszabad Markov-állapot* $\mathrm{CCR}(\mathcal{H})$*-n. Ekkor létezik egy* ψ *állapot, mely minimalizálja a* $S(\psi||\omega_A)$ *relatív entrópiát azon feltétel mellett, hogy* $\psi|\mathcal{A}_1$*-nak rögzítjük a 2-pont függvényét. Sőt,* ψ *is Markov-állapot.*

7. Ha $\langle f|g\rangle = 0$, $(f, g \in \mathcal{H})$, akkor a $W(f), W(g) \in \mathrm{CCR}(\mathcal{H})$ algebra elemek, az un. Weyl-unitérek kommutálnak és lehetőség nyílik összehasonlítani a Markov-tulajdonságot a klasszikus Gauss-eloszlás, illetve a CCR-algebrán vett kváziszabad állapotok esetében. Azt kaptuk, hogy a kommutáló úgynevezett mezőoperátorok klasszikus értelemben is Gauss-eloszlású Markov-

hármasokat alkotnak, míg a megfordítás nem igaz, csak bizonyos feltételek mellett.

3. A disszertációhoz kapcsolódó publikációk

1. V.P. Belavkin, J. Pitrik, Notes on the equality in SSA of entropy on CAR algebra arXiv:math-ph/0602035

2. J. Pitrik, Markovian quasifree states on canonical anticommutation relation algebras, J. Math. Phys. **48**(2007), 112110.

3. A. Jenčová, D. Petz and J. Pitrik, Markov triplets on CCR-algebras, Acta Sci. Math. (Szeged), **76**(2009), 625–648.

4. D. Petz and J. Pitrik, Markov property of Gaussian states of canonical commutation relation algebras, J. Math. Phys. **50**, 1 (2009)

5. D. Petz and J. Pitrik, Gaussian Markov triplets, *közlésre elfogadva a* Proceedings of the Quantum Bio-Informatics III., $QP-PQ$ Quantum Probability and White Noise Analysis *kiadványban*

6. J. Pitrik, Markov triplets on CAR algebras, *megjelenik a* Quantum Probability and Related Topics, Vol. 25. *kötetben*

Hivatkozások

[1] L. Accardi, On the noncommutative Markov property (in Russian), Funkcional. Anal. i Prilozen. **9**(1975), 1–8.

[2] L. Accardi, On noncommutative Markov property, Funct. Anal. Appl., **8**(1975), 1–8.

[3] L. Accardi and A. Frigerio, Markovian cocycles, Proc. R. Ir. Acad., **83**(1983), 251–263.

[4] T. Ando and D. Petz, Gaussian Markov triplets approached by block matrices, Acta Sci. Math. (Szeged), **75**(2009), 265–281.

[5] H. Araki and H. Moriya, Equilibrium statistical mechanics of fermion lattice systems, Rev. Math. Phys, **15**(2003), 93–198.

[6] A. Beghi, On the relative entropy of discrete-time Markov processes with given end-point densities, IEEE Transactions on Information Theory **42**(1996), 1529–1535.

[7] M. Fannes, B. Nachtergaele and R:F: Werner, Finitely correlated states on quantum spin chains, Commun. Math. Phys., **144**(1992), 443–490.

[8] P. Hayden, R. Jozsa, D. Petz and A. Winter, Structure of states which satisfy strong subadditivity of quantum entropy with equality, Comm. Math. Phys. **246**(2004), 359–374.

[9] A.N. Kolmogorov, *Grunbegriffe der Wahrscheinlichkeitscrehnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1933.

[10] E. H. Lieb and M. B. Ruskai, Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy, J. Math. Phys., **14**(1973), 1938–1941.

[11] J. Marcinkiewicz, Sur une propriété de la loi de Gauß, Mathematisches Zeitschrift, **44**(1939), 612–618.

[12] H. Moriya, Markov property and strong additivity of von Neumann entropy for graded systems, J. Math. Phys., **47**(2006), 033510.

[13] F.J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, Annals of Mathematics, **37**(1936), 116–229.

[14] J. von Neumann, *Mahematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1932.

[15] D. Petz, Entropy of Markov states, Riv. di Math. Pura ed Appl. **14**(1994), 33–42.

[16] D. Petz, Monotonicity of quantum relative entropy revisited, Rev. Math. Phys. **15**(2003), 79–91.

[17] D. Petz, Sufficiency of channels over von Neumann algebras, Quart. J. Math. Oxford **39**(1984), 475–483.

[18] M. Takesaki, *Theory of operator algebras, Vol.I, II, III*, Springer-Verlag, 2003.

[19] H. Umegaki, Conditional expectations in an operator algebra IV (entropy and information), Kodai Math. Sem. Rep. **14** (1962), 59–85.