

**FELÜLETEK SZÁMÍTÓGÉPES
ELŐÁLLÍTÁSA ÉS A 3^- FELÜLET
SZIMMETRIACSOPORTJAI**

PhD dolgozat
tézisei

STETTNER ELEONÓRA

Témavezető: **Dr. MOLNÁR EMIL**

**BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM**
Alkalmazott Matematika Szak
2004

„A matematikusok mintáinak, miként a festő és a költő mintáinak, szépeknek kell lenniük. A gondolatoknak, miként a színeknek vagy a szavaknak, harmonikusan kell egymáshoz illeszkedniük. A szépség az első kritérium: a csúnya matematikának nincs tartós helye a világban.”

G. H. Hardy

1 Bevezetés

Ez az értekezés kompakt felületek szimmetriacsoportjait tárgyalja. A 3^- felület szimmetriacsoportjait szeretnénk megadni, ezért tekintsük át néhány (nem csak kompakt) felület ismert diszkrét szimmetriacsoportjait.

Az E^2 euklideszi síkban 17 kristálycsoport van. Ezek első teljes felsorolását Fjodorov közölte (1890) a $219+11$ térbeli kristálycsoporttal együtt, amit vele egyidőben Schoenflies (1891) is felfedezett. Fricke és Klein is foglalkozott a síkbeli kristálycsoportokkal 1897-ben, majd Pólya György 1924-ben. Nowacki absztrakt módon írta le a kristálycsoportokat. Az E^3 euklideszi térben 230 kristálycsoport van, közülük 219 nem-izomorf, 11 tükrös pár lép fel, 1890-ben Fjodorov, 1891-ben Schoenflies, 1894-ben Barlow különböző helyeken, különböző módszerekkel egymástól függetlenül jutottak ugyanarra az eredményre. Valódi kristályokat vizsgálva röntgensugarakkal arra is következtethetünk, hogy a „mi méreteinkben” a tér euklideszi.

A Hilbert által megfogalmazott híres problémák között vannak kristálycsoportokra vonatkozó kérdések is. Az egyik: Igaz-e, hogy minden dimenzióban véges sok euklideszi kristálycsoport van? Bieberbach 1912-ben válaszolt: ez igaz, de számuk rohamosan nő a dimenzióval. Az E^4 térben 4783 (nem izomorf) kristálycsoport van (111 tükrös pár lép fel), ezt számítógéppel határozták meg. 5 és 6 dimenzióban a számuk ismert, de a kristálycsoportok felsorolása nem reményteljes, az esetek száma olyan gyorsan nő.

A hiperbolikus sík kövezései még áttekinthetőek [L-M 90, 91], [L-M-V 98]. Végtelen szériák lépnek fel, melyeket később a szignatúra jellemez majd. A 3-dimenziós hiperbolikus tér kristálycsoportjairól nincs áttekintésünk.

Jól ismert, hogy bármely g^+ ($g \geq 2$) nemszámú Riemann-felület irányítást megtartó \mathbf{N}/\mathbf{G} izometria-csoportja véges, rendje legfeljebb $84(g-1)$. Itt $\mathbf{G} = \mathbf{O}^g$ g tórusz összefüggő egyesítésének fundamentális csoportját jelöli és \mathbf{N} a \mathbf{G} normalizátora H^2 mozgáscsoportjában, azaz a hiperbolikus sík orientációt megtartó izometria-csoportjában. Ez a becslés végtelen sok g -re pontos, pl. először $g=3$ -ra.

Ismereteink szerint analóg becslést nem bizonyítottak még $g \geq 3$ nemszámú, kompakt nem-irányítható felületre, melynek univerzális fedőfelülete, a konstans negatív görbületű H^2 hiperbolikus sík.

A 0 nemszámú gömb, a 1^- nemszámú projektív sík, a 2^- nemszámú Klein-kancsó diszkrét izometriacsoportjait a gömb, illetve az euklideszi sík diszkrét szimmetriacsoportjainak ismeretében áttekinthetjük.

A 3^- felület – ami 3 projektív sík összefüggő egyesítése - nem irányítható, és az első e felületek között, melynek fedőfelülete hiperbolikus metrikával rendelkezhet. Mint látni fogjuk, véges izometria-csoporttal rendelkezik, mint minden hiperbolikusan metrizált kompakt felület.

2 Alkalmazott új módszerek

Vizsgálataink új módszere, a számítógéppel előállított felületkiterítés. [S 1998]. Ez azt jelenti, hogy meghatározzuk egy $2n$ -szög lényegesen különböző oldalpárosításait úgy, hogy az oldalpárok mentén összeragasztva (logikailag azonosítva a pontokat) a $2n$ -szög egy kompakt felület lesz. Fordítva, a felület egy $2n$ -szögbe teríthető ki. A problémát algoritmikusan [L-M 90], [L-M 91] és [M 1992] értelmében oldottam meg. Az exponenciálisan növekvő esetszám miatt akkor egy Commodore 64 számítógéppel csak $2n=10$ -ig tudtam a programot lefuttatni. Majd később egy 133 MHz-es Intel Pentium processzorú, 16 Mbyte RAM-mal rendelkező géppel $2n=14$ -ig, a futási idő ekkor, 14-szög esetén kb. 6,5 óra volt. (A dolgozathoz mellékeltem a számítógépes program forráskódját.) *Meghatároztuk tehát $2n=14$ -ig egy adott $2n$ oldalszámú sokszög fixpontmentes oldalpárosításait. Számítógéppel minden kombinatorikusan különböző esetet megkaptunk. Ezután becslést adtunk a sokszögek oldalszámától függően a kombinatorikusan különböző felületkiterítések esetszámára.*

Észrevesszük az eredmények táblázatából, hogy a három projektív sík összefüggő egyesítéseként kapott felület (továbbiakban 3^- felület) összes kombinatorikusan különböző sokszög kiterítését megkaptuk, mivel a 3^- felületnél a $6 \leq 2n \leq 12$ eseteket kell csak tekintenünk (lsd. 1. táblázat).

A kapott előállítások lehetővé teszik, hogy megvizsgáljuk az említett felület eddig ismeretlen szimmetriacsoportjait. Gondolatmenetünk általános módszert ad arra, hogy a felületek, mint állandó görbületű 2-dimenziós térformák lehetséges szimmetriacsoportjait meghatározzuk. A disszertációban részletesen elvégzett becslés a felület nemszámának (g -nek) függvényében exponenciális növekedést mutat.

3 Új eredmények, tételek

Az univerzális fedőfelület általános konstrukciója lehetővé teszi, hogy bármely kompakt nemirányítható felületet mint Π^2/\mathbf{G} orbitstruktúrát tekinthessünk. Itt Π^2 egyszeresen összefüggő topologikus felület, egy az S^2 , E^2 , H^2 , azaz a gömb, az euklideszi és a hiperbolikus sík közül. \mathbf{G} pedig Π^2 -en fixpont-mentesen (szabadon) ható izometriacsoport $\mathcal{F}_{\mathbf{G}}$ kompakt fundamentális tartománnyal. Ez a tartomány egy $2g$ oldalú sokszögnek választható az egymásutáni oldalak alábbi (kanonikus) oldalpárosításával, ahol

$$(1.1) \quad a_i: s_{ai-1} \rightarrow s_{ai}, \quad a_i^{-1}: s_{ai} \rightarrow s_{ai-1}, \quad 1 \leq i \leq g$$

irányításváltó izometriák (eltolástükrözések). Ez a \mathbf{G} fundamentális csoport kanonikus előállításához (prezentálásához) vezet:

$$(1.2) \quad \mathbf{G} = (a_1, a_2, \dots, a_g \text{ — } a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_g a_g = 1) =: \otimes^g$$

S^2 , $g=1$ a projektív síkot
 E^2 , $g=2$ a Klein-kancsót jellemzi,
 H^2 , $g \geq 3$ más, nem irányítható kompakt felülethez vezet,
pl. 3^- felületünkhöz.

Először a 3^- felület 8 fundamentális hatszög előállításából kapott szimmetriacsoportokat vizsgáljuk. Majd megfogalmazzuk a következő tételt (1.a)-b) ábra):

1.1 Tétel. *A hatszögtartományok csúcsalakzataikkal együtt a 3^- felület alábbi (kombinatorikusan nem bővíthető) N/G szimmetriacsoportját hozzák létre a G fundamentális csoport N normalizátorával a hiperbolikus sík H^2 izometriacsoportjában.*

1. aabbcc: $|N/G|=12$. Az N normalizátort négy tengelyes tükrözés generálja, melyek az oldalaira tükrözik az \mathcal{F}_N tartományt, amint a 1.a) ábra mutatja. Az N Conway-Macbeath szignaturája $*2223$, amely egy peremkomponenssel rendelkezik a felsorolt diédercsúcsokkal.

2. aabcBC: $|N/G|=2$. Az N normalizátor \mathcal{F}_G centrumalakzatát a csúcsalakzatba képezi le \mathcal{F}_N szerint ($2*\otimes$ szignaturával, ahol a keresztsapka a projektív síkot jelenti) a következő előállítással

$$N=(m, h, t, g - m^2, h^2, mtmt^{-1}, hggt)$$

(1. a) ábra) .

3. aabcBC: $|N/G|=4$. Az N normalizátor \mathcal{F}_N fundamentális tartományának előállítása az 1.a) ábrán látható. N szignaturája $2*222$ (egy másodrendű forgáscentrummal és egy peremkomponenssel rendelkezik).

4. aabccb: $|N/G|=8$. Az N alaptartománya az \mathcal{F}_N tükrözéstartomány a 1.b) ábrán látható $*2224$ szignaturával.

5. abacbc, 8. abcaBC: $|N/G|=4$. Az \mathcal{F}_N fundamentális tartomány a következő N normalizátort állítja elő

$$N=(m_1, m_2, h(2), t - m_1^2, m_2^2, h^2, m_1tm_1t^{-1}, m_2thm_2ht^{-1}),$$

amely az 1.b) ábrán látható, N szignaturája $2*222$.

6. abacbc, 7. abacBC: $|N/G|=2$. \mathcal{F}_N oldalpárosításával a következő geometriai előállítását láthatjuk

$$N=(m_1, m_2, h(2), t - m_1^2, m_2^2, h^2, m_1tm_1t^{-1}, m_2thm_2ht^{-1})$$

az 1.b) ábrán, $2**$ szignaturával (két peremkomponenssel).

A 3. 5. és 8. esetben izomorf a normalizátor és ekvivariánsak a szimmetriacsoportok. \square

A továbbiakban a számítógépes program által adott mind a 65 kombinatorikusan különböző fundamentális tartományt figyelembe véve, a 3^- felület szimmetriáit és az ezekhez tartozó (fundamentális) kövező sokszögeit elemzzük. Különösen fontosak az úgynevezett maximális szimmetriacsoportok, amelyek kombinatorikusan már nem bővíthetők tovább. A 2. táblázatban látható eredményünk az

1.2 Tétel 3^- felületnek 2 maximális, nem bővíthető szimmetriacsoportja van: a 12-rendű $*2223/G$ és a 8-adrendű $*2224/G$ csoportok. A további N/G ($G = \otimes^3$) csoportok ezek részcs csoportjai, melyek háló struktúrával (részcs csoport-háló) rendelkeznek. \square

Ez analógiában van az euklideszi sík (E^2) N/T kristály csoportjainak 17 osztályával, melyeknél

$$(1.3) \quad N_1 = p 6 m m = * 2 3 6 \text{ és } N_2 = p 4 m m = * 2 4 4$$

az alábbi tóruszcsoportnak a maximális normalizátorai (további eltolások nélkül!):

$$(1.4) \quad T = p 1 = O = (a_1, b_1 \text{ — } a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} (=1)).$$

Ezért tárgyalásunkat tekinthetjük úgy, mint a 17 diszkrét E^2 csoport analóg kiterjesztését más, hiperbolikus metrikájú kompakt felületre. A számítógépes előállításunk [S 98]-ban felsorolja a H^2/\otimes^3 jelű 3^- felület 65 kombinatorikusan különböző fundamentális tartományát (3. táblázat). Az általános algoritmus alapja - amely g^- -nek minden fundamentális tartományát megadja [L-M 90, 91], [L-M-V 98]-ben - a $2g$ oldalú sokszög fixpontmentes oldalpárosítása: egy csúcsosztállyal, legalább egy irányítást megváltoztató oldalpárral. Ezt fagráf szerkesztésével kell bővítenünk, esetleg további csúcsok hozzáadásával. Ezen gráf mentén a felületet felvágjuk és kiterítjük legfeljebb $6(g-1)$ oldalú topológiai sokszöggé, legfeljebb $2(g-1)$ csúcsosztállyal úgy, hogy minden osztályba legalább 3 csúcs tartozzon (ezt az eljárást mutatja a 3.a)-3.b) ábra).

Ily módon majd nem csak a lehetséges N/G csoportokat kapjuk meg, de a H^2/G 3^- felület normalizátor- kövezéseit is, az \mathcal{F}_N tartományok kombinatorikus (topológiai) ekvivalenciájáig egyértelműen. Természetesen a $G = \otimes^3$ különböző fundamentális tartományai indukálhatják az N normalizátor ugyanazon tartományait, így a 3^- felület ekvivariáns kövezéseit (lsd. pl. 3.a) és 3.b) ábrát). De a fix N -hez tartozó kombinatorikusan különböző \mathcal{F}_N -eket meg fogjuk különböztetni, mint H^2/G különböző kövezéseit. A 3. táblázat felsorolja az ugyanazon \mathcal{F}_G -hez tartozó jellemző maximális normalizátort (normalizátorokat), ez néha nem egyetlen. A 2. táblázatban más fundamentális kövezésbe alakíthatjuk át ezeket részcs csoport-szimmetriatöréssel.

A 3^- felület \mathcal{F}_N fundamentális kövezéseinek teljes osztályozása ezután már viszonylag könnyű, de túl hosszadalmas lenne felsorolni. Mint információt megadjuk az összes kombinatorikusan különböző \mathcal{F}_N poligonszimbólumot a 4. táblázatban és egy esetet illusztrálunk a 3. a-b ábrán.

Megfogalmazzuk fő eredményünket:

1.3 Tétel: *A hiperbolikus (H^2) metrikával ellátott 3^- felület, mint 3 projektív sík összefüggő egyesítése, 12 darab N/G izometria-csoportot határoz meg. Ezek a csoportok a 3^- felületen hatnak, amit H^2 izometria- csoportjában a felület $G = \otimes^3$ fundamentális csoportjának N normalizátora indukál homeomorf ekvivarianciáig egyértelműen. Ez a 12 darab N normalizátor a 3^- felület $65+58$ fundamentális kövezését adja (2-4 táblázat). \square*

Ezután bizonyítjuk majd osztályozásunk teljességét.

Alapeszközünk egy tetszőlegesen adott szignaturájú tetszőleges kompakt felület (orbifold) fundamentális tartományainak algoritmikus felsorolása [L-M 90], [L-M 91], [L-M-V 98]. Nevezetesen, most a 3^- kompakt felület G fundamentális csoportjához és ennek a H^2 sík $\text{Isom}H^2$ izometria- (egybevágóság-) csoportjában vett tetszőleges N normalizátorához (lsd. 2-4. táblázatban).

Az alábbi diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbf{G}_i \triangleleft \text{Isom } \Pi_j^2 \\
 & & \Downarrow \\
 & & \mathbf{g}_i \\
 \\
 \Pi_j^2 \ni P_j & \longrightarrow & P_j^{\mathbf{g}_i} \in \Pi_j^2 (=H^2) \\
 \downarrow \mathbf{N}_k \ni \mathbf{n}_k & & \downarrow \mathbf{n}_k \in \mathbf{N}_k \triangleleft \text{Isom } \Pi_j^2 \\
 & & P_j^{\mathbf{g}_i^{\mathbf{n}_k}} \\
 & & \parallel \\
 \Pi_j^2 \ni P_j^{\mathbf{n}_k} & \longrightarrow & P_j^{\mathbf{n}_k^{\mathbf{g}_i}} \in \Pi_j^2 \\
 & & \Downarrow \\
 & & \mathbf{g}_i' \\
 & & \Downarrow \\
 & & \mathbf{G}_i
 \end{array}$$

(1.1)

azt szimbolizálja, hogy a $\mathbf{G}_i = \{ \mathbf{g}_i \}$ fundamentális csoport hogyan hat a $\Pi_j^2 = \{ P_j \}$ univerzális fedősíkon a Π_j^2 / \mathbf{G}_i orbittérhez, mint felülethez képest, és hogyan hat az orbittéren a \mathbf{G}_i -hez tartozó normalizátor $\mathbf{N}_k \triangleleft \text{Isom } \Pi_j^2$, miközben az \mathbf{n}_k leképezés egy tetszőleges $P_j^{\mathbf{g}_i}$ \mathbf{G}_i -orbitot képez egy másik $P_j^{\mathbf{n}_k^{\mathbf{g}_i}} = P_j^{\mathbf{g}_i^{\mathbf{n}_k}}$ orbitba bármely $\mathbf{n}_k \in \mathbf{N}_k$ -re. Ez indukálja a felületen az $\mathbf{N}_k / \mathbf{G}_i$ izometria csoportot:

$$(1.5) \quad \mathbf{G}_i \triangleleft \mathbf{N}_k \triangleleft \text{Isom } \Pi_j, \text{ ezért } \mathbf{n}_k \mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i \mathbf{n}_k \in \mathbf{N}_k / \mathbf{G}_i.$$

Itt a Π_j^2 sík vagy az S^2 , vagy az E^2 , vagy a H^2 síkot jelenti. A \mathbf{G}_i és \mathbf{N}_k csoportokat homeomorfizmus-ekvivariancia erejéig egyértelműen a szignatúra fogja meghatározni.

1.1 Definíció: A \mathbf{G}_1 csoportnak a Π_1^2 -síkon történő hatása φ -ekvivariáns a \mathbf{G}_2 csoport Π_2^2 -síkon való hatásával, ha létezik egy φ homeomorfizmus az alábbiak szerint:

$$(1.6) \quad \varphi: \Pi_1^2 \rightarrow \Pi_2^2: P_1 \rightarrow P_2 := P_1^\varphi, \text{ úgyhogy } \mathbf{G}_2 = \varphi^{-1} \mathbf{G}_1 \varphi,$$

tehát a \mathbf{G}_1 hatását φ viszi át a \mathbf{G}_2 hatásába.

Ha a fenti φ homeomorfizmusra még $\mathbf{N}_2 = \varphi^{-1} \mathbf{N}_1 \varphi$ is teljesül, akkor az $\mathbf{N}_1 / \mathbf{G}_1$ és $\mathbf{N}_2 / \mathbf{G}_2$ faktorcsoporthoz (szimmetriacsoporthoz) szintén ekvivariánsnak nevezzük. Ha $\mathbf{N}_2 > \varphi^{-1} \mathbf{N}_1 \varphi$, akkor $\mathbf{N}_2 / \mathbf{G}_2 > \mathbf{N}_1 / \mathbf{G}_1$, azaz \mathbf{N}_2 gazdagabb szimmetriacsoporthoz vezet a Π_2^2 / \mathbf{G}_2 felületen, mint \mathbf{N}_1 a Π_1^2 / \mathbf{G}_1 felületen.

A G csoport izomorf, vagyis ekviviáns N normalizátorai ekvivalenciaosztályokat hoznak létre és felvethetjük a különböző ekvivalenciaosztályok meghatározását és a részcsoporthoz tartozások vizsgálatát. Ehhez elegendő a maximális (valódi) részcsoporthoz többi részcsoporthoz való kapcsolatát tanulmányozni.

Habár sok kombinatorikusan különböző $\mathcal{F}_G(\mathcal{F}_N)$ tartományunk lehet — algoritmusunk [L-M 90], [L-M 91], [L-M-V 98] mindegyiket felsorolja. Bármely \mathcal{F}_G , a baricentrikus felbontásával és G -képeivel, a G -t generáló oldalpárosításokkal, a nem- G -ekvivalens csúcsok a definiáló relációkkal, teljes információt ad — véges algoritmikus eljárásban — a lokálisan minimális zárt geodetikusok rendszeréről, az irányítástartó és irányítást váltó transzformációkról és ezek G -képeiről (konjugáltjairól) is. Az N normalizátornak bármely n eleme ezt a rendszert önmagára képezi, most metrikusan is, ha az \mathcal{F}_G tartományt jól deformáltuk egy φ homeomorfizmussal. Tehát \mathcal{F}_N -t lépésről lépésre határozzuk meg.

Természetesen, bármely \mathcal{F}_G deformálható oly módon, hogy bármely lehetséges N normalizátor előforduljon, mert bármely kombinatorikus \mathcal{F}_G -t átdarabolással és ragasztással átalakíthatunk bármely másikba a szokásos topologikus eljárással. De most csak azokra az esetekre koncentrálunk, ahol \mathcal{F}_N -nek N - képei kikövezik \mathcal{F}_G -t N/G reprezentánsaival, és tudjuk, hogy ez az eljárás véges.

1.4 Tétel: *A $G = \otimes^3$ csoporthoz a fundamentális (topologikus) poligonoknak 65 típusa van, melyeket a 3. táblázatban megadott a számítógépes eljárás. \square*

Megvizsgáljuk mindegyiket a fenti szempontból. \mathcal{F}_G kombinatorikus strukturájából kiválasztjuk a normalizátor elemeit és lépésről lépésre felvágjuk \mathcal{F}_G -t kisebb tartományokra az indukált oldalpárosításokkal, először kombinatorikus egyenes tükrözéssel, azután forgatással, speciálisan félfordulattal, eltolás-tükrözéssel, eltolással, megőrizve az oldalak G -ekvivalenciáját. Mindig ellenőrizzük a homomorfizmus kritériumát bármely lehetséges N -nel. Így megkapjuk \mathcal{F}_N -t és N -et, majd N/G -t, ezenkívül a legkisebb \mathcal{F}_N -t \mathcal{F}_G -hez, így adódik a leggazdagabb N és N/G , amely kövezi \mathcal{F}_G -t az N/G -t reprezentáló \mathcal{F}_N képeivel.

Ily módon megkapjuk majd a 2. táblázatot a 3. és a 4. táblázatból.

4 Sejtések, további feladatok megfogalmazása

Végül a kapott eredmények alapján általános megjegyzések is megfogalmazhatók tetszőleges g^- , $g \geq 3$ felület esetére, amely sejtéseket egy későbbi dolgozatban szeretnénk bizonyítani.

1.1 Megjegyzés Az 2.b ábrán feltüntettük a séma általános előállítását tetszőleges g^- , $g \geq 3$ felület esetén. Általános feltevésünk az, hogy

$G = \otimes^g$ maximális normalizátora a hiperbolikus sík $Isom H^2$ izometria csoportjában az $N_{g^-} = *222g$ $|N/G|=4g$, mint tükrözés csoport a $(\pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/g)$ szögű négyszög oldalegyeneseire.

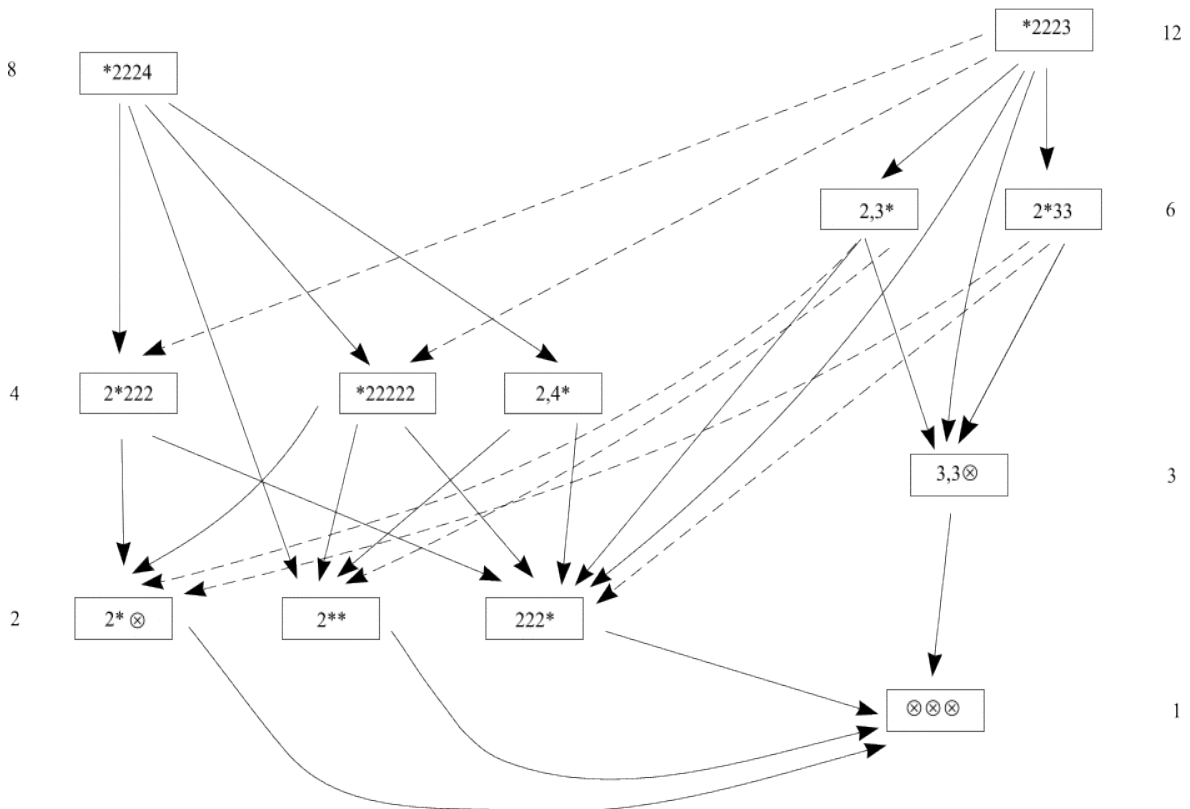
1.2 Megjegyzés Az általunk létrehozott sémát szabályos $\pi/2$ szögű $4(g-1)$ -szög is generálja.

Ekkor $N_{g^-} = *222[2(g-1)]$ a sejtett második leggazdagabb normalizátor. A $4(g-1)$ -szög oldalait $g-1$ eltolás tükrözéssel és ugyancsak $g-1$ eltolással párosítjuk, és $g-1$ egyenként 4 csúcsot tartalmazó csúcsoztály keletkezik $|N/G|=4(g-1)$.

2n	p1	p2	p3	n2	n3	n4	n5	n6	n7
4	1			2					
6	1			2	8				
8		4			22	47			
10		18			24	279	473		
12		34	82		11	682	4928	7192	
14		38	1022			838	20979	110266	144906

1. táblázat

Az N/G (maximális) részcsoport relációi N normalizátorral: — invariáns eset - - - - - nem-invariáns eset



2. táblázat

A 3^- felület fundamentális tartományainak felsorolása a tipikus maximális kövező normalizátorokkal, N/G faktorcsoportjaival és azok rendjével

			10/1	aabcbdeeDc	→ 10/16
6/1	aabbcc	2*33 / 3m, 6	2	aabccBdeeD	2*⊗ / m, 2
2	aabcbC	⊗ ³ / 1, 1	3	aabcbdeCed	⊗ ³ / 1, 1
3	aabcBC	2*⊗ / m, 2	4	aabcdBeCDE	2*⊗ / m, 2
4	aabccb	2*222 / mm, 4	5	aabcdBedcE	222* / m, 2
5	abacbc	*2224 / mm o m, 8	6	aabcdceDeB	→ 8/16
6	abacbC	2** / m, 2	7	aabcdCedEB	→ 8/19
7	abacBC	2** / m, 2	8	aabcdCeDEB	→ 8/18
8	abcaBC	2*222 / mm, 4	9	aabcdecDeB	→ 8/18
			10	aabcdeCDEB	→ 8/16
8/1	aabbcdC	→ 6/4	11	aabcdeCedB	→ 8/15
2	aabcbCd	2*⊗ / m, 2	12	aabcbdeeDcB	*2223 / m o 3m, 12
3	aabcbddc	2*⊗ / m, 2	13	abacdbeCDE	⊗ ³ / 1, 1
4	aabcBdcD	222* / m, 2	14	abacdbedcE	⊗ ³ / 1, 1
5	aabcBdCD	2** / m, 2	15	abacdBceDe	2*⊗ / m, 2
6	aabcdbCd	2** / m, 2	16	abacdBeCed	2*⊗ / m, 2
7	aabcdBCD	2*⊗ / m, 2	17	abacdCbedE	222* / m, 2
8	aabcdBdc	⊗ ³ / 1, 1	18	abacdCbeDE	2** / m, 2
9	aabcdcDB	→ 6/6	19	abacdeBcDe	2** / m, 2
10	aabcdCDB	→ 6/5	20	abcadBeCDe	2*222 / m o 2, 4
11	aabcbdcB	→ 6/8	21	abcadcebDE	⊗ ³ / 1, 1
12	abacbdC	⊗ ³ / 1, 1	22	abcadcedBE	2*⊗ / m, 2
13	abacbdCD	⊗ ³ / 1, 1	23	abcAdeBCEd	2*222 / mm, 4
14	abacBdCd	2*⊗ / m, 2	24	abcAdecbed	2*222 / mm, 4
15	abacdbCD	2*⊗ / m, 2			
16	abacdbdc	*2223 / mm o 3, 12	12/1	aabcdceffEdB	2*⊗ / m, 2
17	abacdBcD	⊗ ³ / 1, 1	2	aabcbddCeffEB	*2223 / 3m o m, 12
18	abAcdbDc	*22222 / mm, 4	3	aabcbdecfdfeB	→ 12/11
19	abAcdbDc	*22222 / mm, 4	4	aabcbdeCfDEFB	→ 10/23
20	abcadBCD	2*⊗ / m, 2	5	aabcbdeCfedFB	→ 10/23
21	abcadcbD	2*⊗ / m, 2	6	abacdeBcfDfe	2*⊗ / m, 2
22	abcdaBcD	*2224 / 4m, 8	7	abacdeCbfDEF	2*⊗ / m, 2
	és	*2223 / 2 o 3m, 12	8	abacdeCbfedF	222* / m, 2
			9	abcadeBdfCEf	*2223 / 3m o m, 12
			10	abcadecfdBEF	2*⊗ / m, 2
			11	abcadecfeBdF	2*⊗ / m, 2

3.táblázat

Az \mathcal{F}_N sokszög szimbólumok felsorolása [L-M-V 98] alapján $\mathbf{G} = \otimes^3$ nem triviális \mathbf{N} normalizátoraival. A szimbólumban ...a...a... eltolástükrözéssel történő oldalpárosításra utal ...b...B... hiperbolikus eltolásra, — egyenes tükrözésre; ...anb... n-ed rendű forgatási, vagy tükrözési középpontot jelent, ami a-t b-vel kapcsolja össze, ...c2C... az oldal középpontja körüli ponttükrözést jelenti, ...dnD... n-ed rendű elforgatásra utal d-ből D-be.

222* (13 tartomány): —a2Ab2Bc2C, —a2Ab2c2C2B, —a2b2B2c2CA, —a2b2c2C2B2A,
—a2A—b2Bc2C, —a2A—b2c2C2B, —a2A—b2B—c2C,
—a2Abc2Cd2DB, —ab2Bc2Cd2DA, —ab2Bc2d2D2CA,
—a2bc2Cd2DB2A, —a2A—bc2cd2DB, —ab2Bcd2De2ECA

2** (4): —a2Ab—B, —a—A—b2B, —a2b—B2A, —ab—Bc2CA

2*⊗ (16): — ab2Ba, —a2ba2b, —a2b2b2A, —a—ab2B, —a2b—a2b,
—a—a—b2B, —abac2Cb, —abbAc2C, —abbc2CA, —abc2CbA,
— ab2cb2cA, —a2bccBA, —a2A—bccB, —ab—ac2Cb,
—ab2BcddCA,
— abc2CdbdA

3,3⊗ (8): a3a3b3B3, a3b3a3b3, aab3Bc3C, aab3c3C3B, a3Ab3cb3c, a3Abc3Cb,
aabc3Cd3DB, a3ABc3CdBd

24* (5): —a2Ab4B, —a4b2B4A, —a2b4B2A, —a2A—b4B, —ab2Bc4CA

***22222** (1): —2—2—2—2—2

2*222 (2): —2—2—2a2A2, —2—2—2—a2A

2*33 (2): —3—3a2A3, —3—3—a2A

23* (5): —a2Ab3B, —a3b2B3A, —a2b3B2A, —a2A—b3B, —ab2Bc3CA

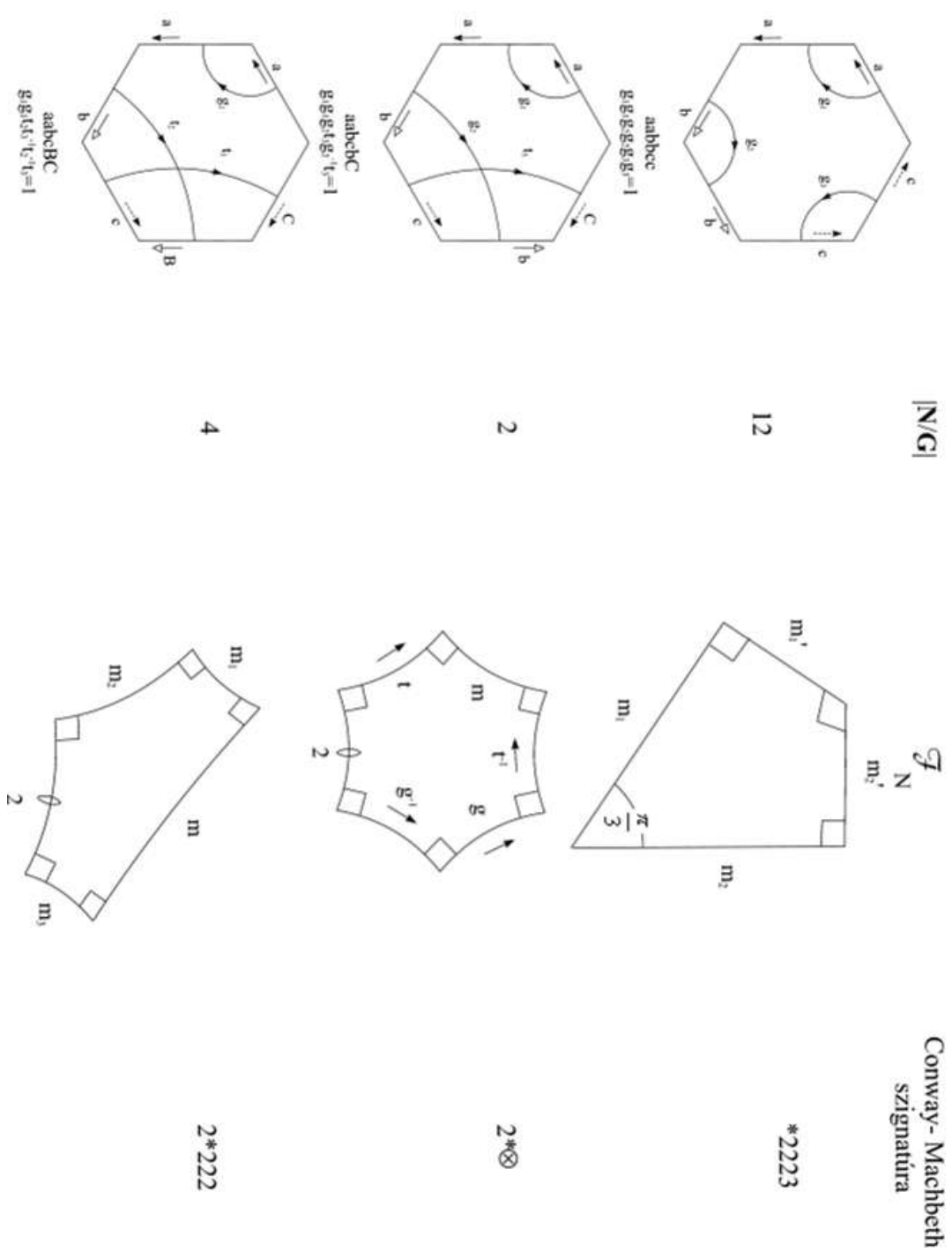
***2224** (1): —2—2—2—4

***2223** (1): —2—2—2—3

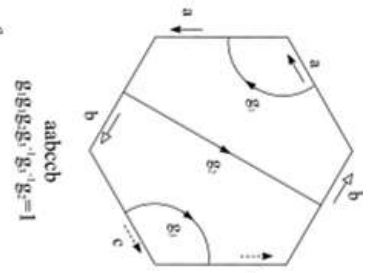
65+
58 kövezés

4. táblázat

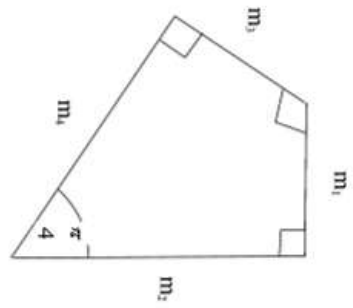
Hatszögletarmányok zárt geodetikus vonalakkal és a $\bar{3}$ felület néhány tipikus normalizátora



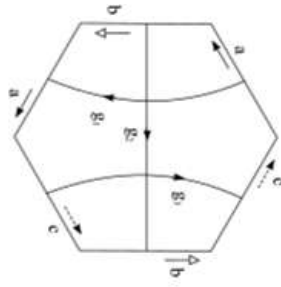
1.a) ábra



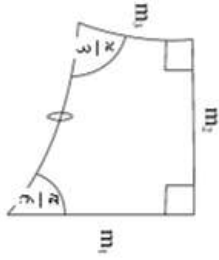
8



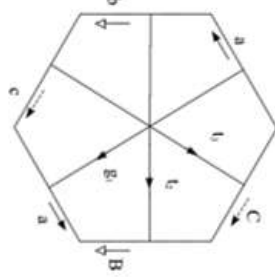
*2224



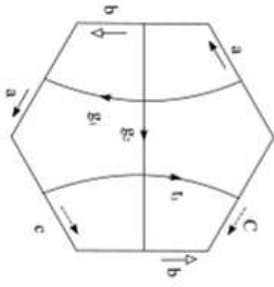
4



2*222

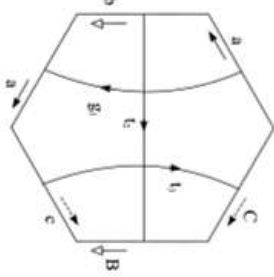


abcabc
 $g_1 t_1^{-1} g_2 t_2^{-1} g_3 t_3^{-1} g_4 t_4^{-1} g_5 t_5^{-1} g_6 t_6^{-1} = 1$

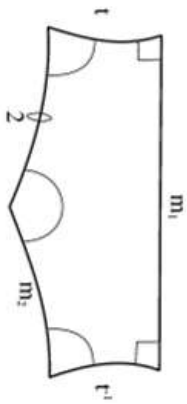


abacbc
 $g_1 g_2 t_1^{-1} g_3^{-1} g_4 t_2^{-1} g_5 t_3^{-1} g_6 t_4^{-1} = 1$

2



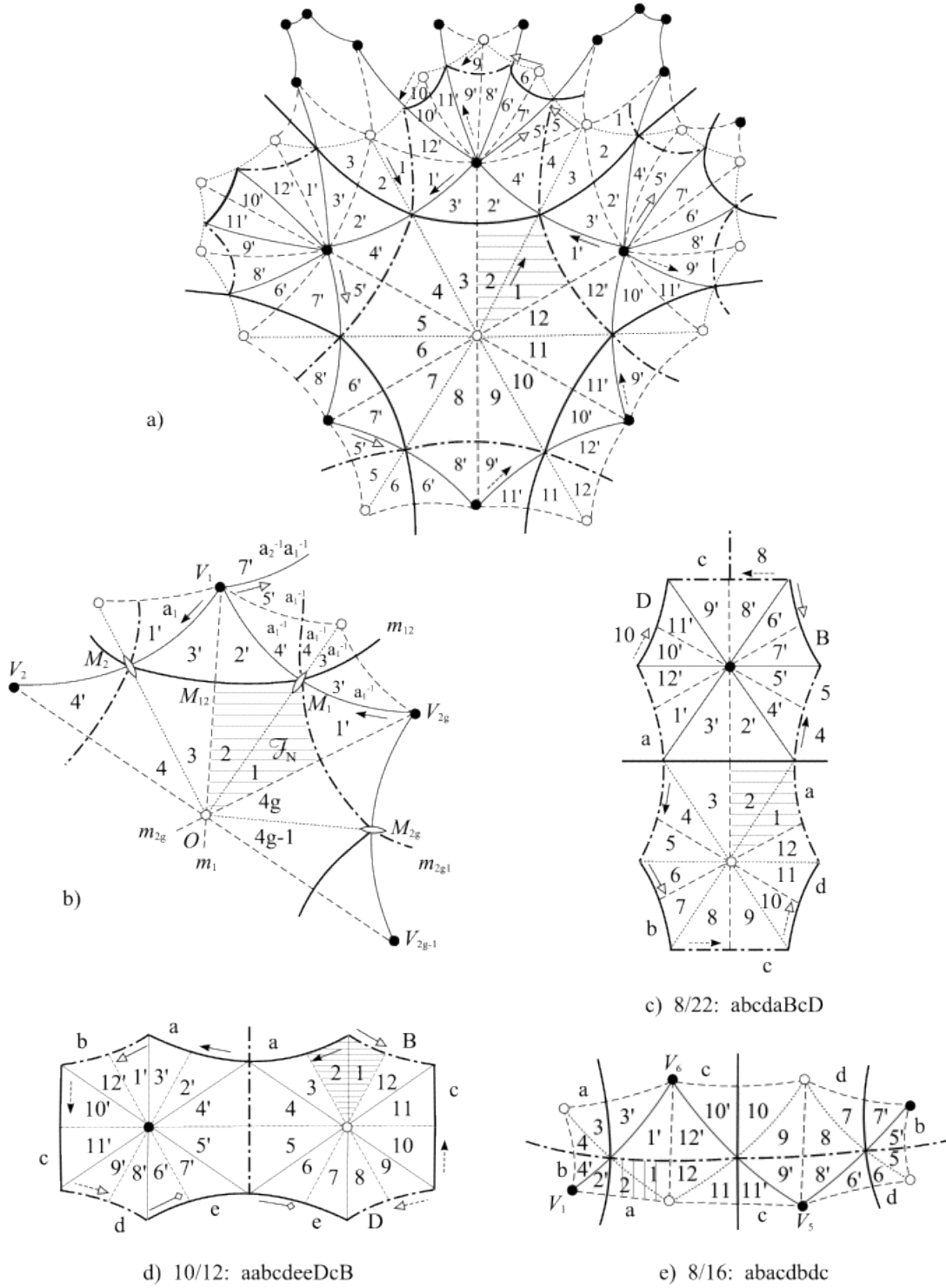
abacBC
 $g_1 t_1 t_1^{-1} g_2 t_2^{-1} g_3 t_3^{-1} g_4 t_4^{-1} = 1$



2**

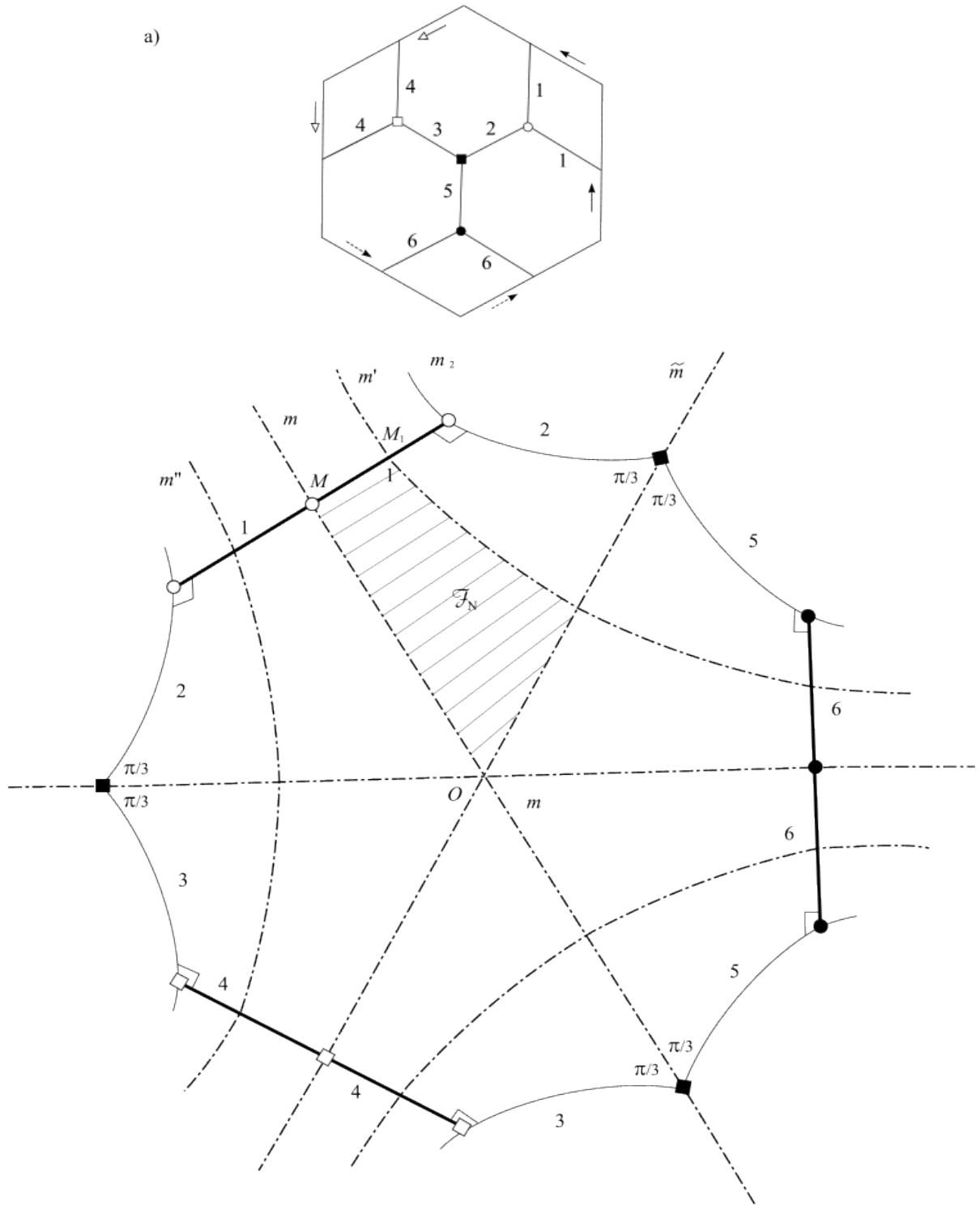
1.b) ábra

a) Az **aabbc** sokszög szimbólumhoz tartozó 6/1 kő és baricentrikus felbontása; b) a g^- felület maximális normalizátora, $g=3$, és fundamentális tartománya $\mathcal{F}_N=(1,2)$; c) - e) A 3^- felület néhány tartománya \mathcal{F}_N -nel közeve



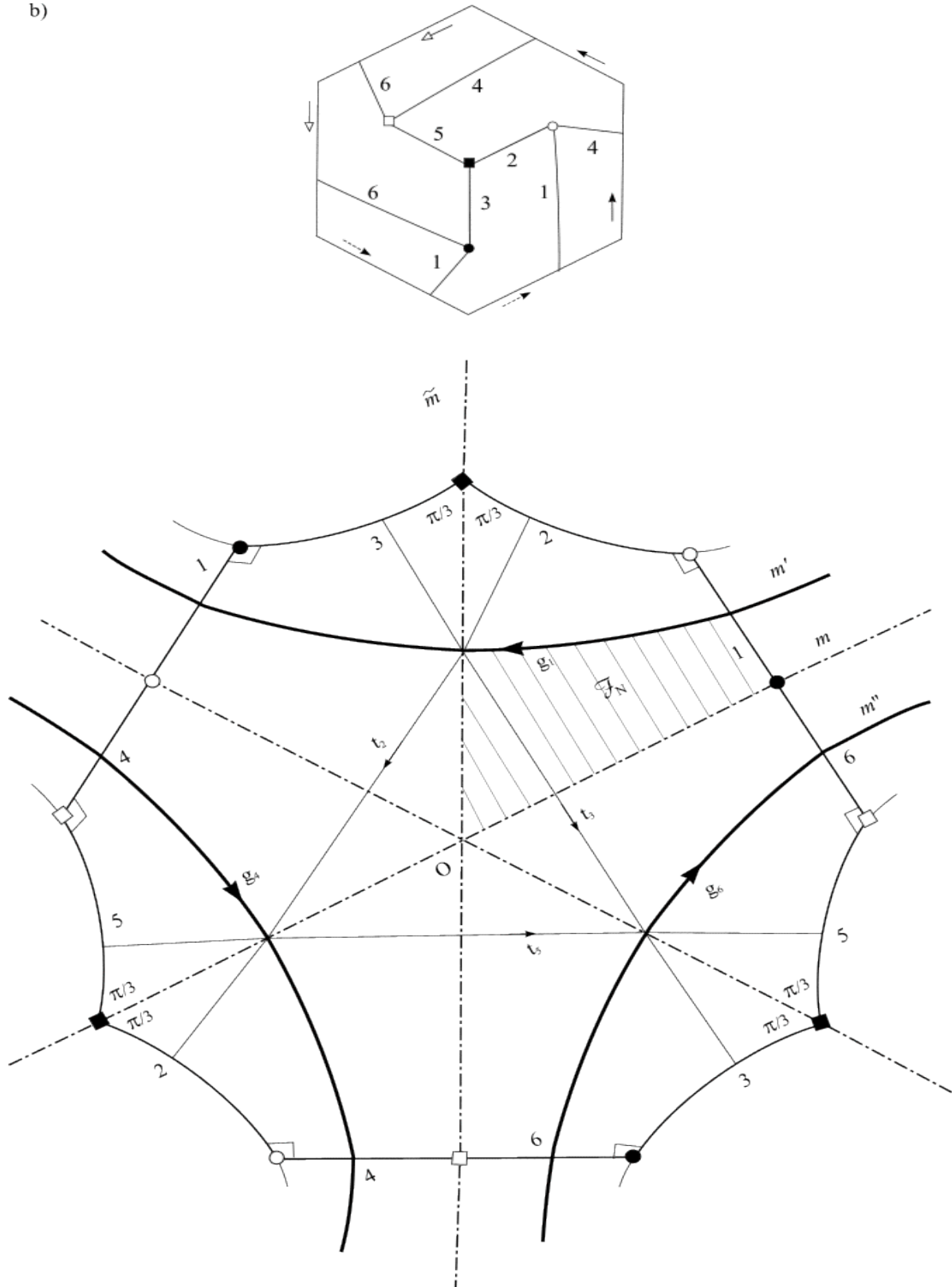
2. ábra

A $G=\otimes^3$ két 12-szög fundamentális tartománya az $N=2223$ maximális normalizátorral ekviviáns kövezéshez vezet a) 12/2 **aabddCeffEB** b) 12/9 **abcadeBdfCEf**



3. a) ábra

b)



3. b) ábra

5 Irodalomjegyzék

- [B 00] T. Breuer, *Characters and automorphism groups of compact Riemann Surfaces*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **280**, Cambridge Univ. Press, 2000.
- [B 51] S. Bilinski, Homogene mreže zatvorenih orientabilnih ploha, *Jugosl. Akad. Zn. Umj. Zagreb, Rad* **277** (1951), 129-164. – Homogene Netze geschlossener orientierbarer Flächen, *Bull. Int. Acad. Yugosl.* **6** (1952), 59-75.
- [B–E–G–G 90] E. Bujalance–J. J. Etajo–J. M. Gamboa–G. Gromadzki, *Automorphism Groups of Compact Bordered Klein Surface, A Combinatorial Approach*, Lecture Notes in Mathematics **1439**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1990
- [C 87] M. D. E. Conder, The genus of Compact Riemann surfaces with maximal automorphism group, *J. Algebra* (1987), no. **108**, 204-247.
- [C–B 88] A. J. Casson–S.A. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, London Mathematical Society Student Texts **9**.
- [D–F 87] A. W. M. Dress–R. Franz, Zu einer Frage von Herrn S. Bilinski, Pflasterungen von Brezelflächen betreffend, *Jugosl. Akad. Zn. Umj. Zagreb, Rad* **428** (1987), 83-101.
- [F–H 92] R. Franz–D. H. Huson, The classification of quasi regular polyhedra of genus 2, *J. Discrete and Comp. Geom.* **7** (1992), 347-357.
- [H 93] D. Huson, The generation and classification of tile-k-transitiv tilings of the Euclidean plane, the sphere and the hyperbolic plane, *Geometriae Dedicata*, **47** (1993), 269-296.
- [K–W 96] H. Karcher, M. Weber, On Klein's Riemann surface, *Manuscript*, 1996. – The geometry of Klein's Riemann surface. *The eightfold way* 9-49, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **35**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999
- [L–M 90] Z. Lučić–E. Molnár, Combinatorial classification of fundamental domains of finite area for planar discontinuous isometry groups, *Arch. Math.* **54** (1990), 511-520.
- [L–M 91] Z. Lučić–E. Molnár, Fundamental domains for planar discontinuous groups and uniform tilings, *Geometriae Dedicata*, **40** (1991), 125-143.
- [L–M–V 98] Z. Lučić–E. Molnár–N. Vasiljević, Combinatorial structure of fundamental polygons of finite area for plane discontinuous groups, *Manuscript*, 1998.
- [M 92] E. Molnár, Polyhedron complexes with simply transitive group actions and their metric realizations, *Acta Math. Hung.* **59** (1992), 175-216.
- [M–S 05] E. Molnár and E. Stettner, Symmetry groups and fundamental tilings for the compact surface of genus 3^{-2} . The normalizer diagram with classification, *Beiträge Alg. Geom. (Contr. Alg. Geom.)* to appear in 2005
- [R 94] J. G. Ratcliffe, On the isometry groups of hyperbolic manifolds, *Contemporary Math.* **169** (1994) 491-495.
- [S 88] M. Senechal, Tiling the torus and other space forms, *Discrete and Computational Geometry*, Vol. **3**, No. 1, 1988 (55-72).

- [S 98] E. Stettner, Die Computergestützte Klassifizierung der Flächeneinwickelungen in einem Vieleck vorgegebener Seitenanzahl, *Annales Univ. Sci. Budapest*, **41** (1998), 103-115.
- [S 03] E. Stettner, Symmetriegruppen und fundamentale Pflasterungen der Fläche vom Geschlecht -3 I. Maximale Gruppen mit Sechseckbereichen, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **40** (2003), 41-57.
- [SS 98] P. Schmutz Schaller, Geometry of Riemann surfaces based on closed geodesics, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, Volume **35**, Number 3, 193-214.
- [Z 97] E. Zamorzaeva, On isohedral tilings of hyperbolic manifolds, *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N. S.)* **43** (1997), no. 1, 81-88 (1998).
- [Z-V-C 80] H. Zieschang, E. Vogt and H. Coldewey, *Surfaces and Planar Discontinuous Groups*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1980.