

**GÖRBE- ÉS FELÜLETMODELLEZÉS VEGYES  
TÍPUSÚ SPLINE-FÜGGVÉNYEKSEL**  
**Ph.D dolgozat tézisei**

**PETHÓNÉ VENDEL TERÉZIA**

**TÉMAVEZETŐ: NAGYNÉ DR. SZILVÁSI MÁRTA**

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR  
Matematika Intézet, Geometria Tanszék  
2003

# 1 Bevezetés

A műszaki tervező munkájának jelentős részét a tervezett objektum alakjának meghatározására és szemléltetésére irányuló tevékenységek teszik ki. Az alakzatok numerikus meghatározása szempontjából a geometria a legfontosabb tényező. Ezért az elmúlt évtizedekben a geometriai modellezés kutatására, a geometriai modellező rendszerek fejlesztésére a világ különböző országaiban kutatócsoportok alakultak.

Napjainkban már látványos eredményeket értek el a geometriai modellezés terén, ugyanakkor a tetszőleges bonyolultságú 3D-s objektumok geometriai modellezésének általános elméletét eddig csak részben sikerült kidolgozni. A gyakorlatban mindez azt jelenti, hogy a modellezési folyamatban a szerkesztési lehetőségek korlátozottak.

A háromdimenziós világunkban előforduló bonyolult alakú tárgyak megfelelő modellezésére és valósághű képi megjelenítésére a CAD-rendszerek (Computer Aided Design) spline-technikán alapuló matematikai módszereket használnak.

Spline-görbék (ill. felületnek) nevezzük – szabadon fogalmazva – az intervallumonként azonos típusú függvényekkel leírt görbeívekből (ill. felületfoltokból) álló összetett görbét (felületet), amely ívek (felületdarabok) előírt csatlakozási feltételeknek tesznek eleget.

A görbék és felületek többféleképpen írhatók le. A számítógéppel segített tervezés számára a modelleket leíró spline-függvényeknek paraméteres alakban való megadása a leggyakoribb. A görbék megadása egyparámeteres, a felületek megadása kétparaméteres vektorfüggvényekkel történik.

Ha a két paraméter csak a  $[0, 1]$  intervallumon változik, akkor az  $\mathbf{R}(t, u)$  vektorfüggvény egy felületdarabot ír le, amely úgy tekinthető, mint a paramétersík  $[0, 1] \times [0, 1]$  egységnyezetének képe az  $\mathbf{R}(t, u)$  függvény által definiált leképezés mellett.

A felületábrázolásnak jól bevált módszere a paramétervonalak hálózatának megrajzolása. A paramétervonalak az  $\mathbf{R}(t_0, u)$ , ill.  $\mathbf{R}(t, u_0)$  függvényekkel leírt felületi görbék. Speciálisan a felületdarabot határoló görbék: az  $\mathbf{R}(0, u)$ ,  $\mathbf{R}(1, u)$   $t$  paramétervonalak, és az  $\mathbf{R}(t, 0)$ ,  $\mathbf{R}(t, 1)$   $u$  paramétervonalak.

A disszertációban a szerző trigonometrikus, racionális és polinom súlyfüggvényekkel definiált spline-görbék és felületeket mutat be görbe- és felületmodellezési problémákra.

A második fejezetben interpolációs pontokra illesztett görbét definiál trigonometrikusan súlyozott spline-ként, amelynek görbeíveit köríveknek és egyenes szakaszoknak konvex kombinációja állítja elő aszerint, hogy három egymás után következő pont egy körön vagy egy egyenesen van. Az így definiált spline-görbe görbület-folytonos lesz, sőt a csatlakozópontoktól eltekintve végtelen sokszor differenciálható.

A trigonometrikus súlyfüggvényeket racionális súlyfüggvényekkel is helyettesíti.

Alkalmazásként poligonok csúcsainak lekerekítésére mutat példát.

A harmadik fejezetben olyan általános eltolási felületet definiál, amelynek vezérgörbéje trigonometrikusan súlyozott spline, generáló görbéje pedig egy harmadfokú Bézier-görbe. A felületfoltokat tehát vegyes típusú, egyik irányban trigonometrikus, a másik irányban pedig

polinomiális kétparaméteres vektorfüggvény írja le. A szomszédos foltok  $G^1$ -rendben csatlakoznak egymáshoz.

További alkalmazást mutat a negyedik fejezetben két vezérgörbével definiált szabadon formált eltolási felület származtatására és az alaki paraméterek megválasztására.

Az ötödik fejezet két felület közti rés összekapcsolására olyan módszert mutat be, ahol a rés másik két oldalának határvonalát szabadon adjuk meg; valamint három felület által határolt háromszöglyuk kitöltésére ad eljárást. Az adott felületek és görbék csatlakozásától függően, valamint a súlyfüggvények megválasztásával  $G^1$ ,  $C^1$  és  $C^2$ -folytonos csatlakozást értünk el.

A hatodik fejezet – a tervezéstől kicsit elszakadva – elemzi a kidolgozott algoritmusokat, és megvizsgálja azok ill. a számítás hatékonyságát.

## 2 Trigonometrikusan súlyozott interpolációs spline-görbe

A háromdimenziós  $E^3$  euklideszi térben adott pontsorozaton áthaladó, azonos módon definiált ívekből összetett görbét készítünk úgy, hogy a görbe az ívek csatlakozási pontjaiban görbület-folytonos legyen. A görbeíveket az adott pontokon áthaladó köríveknek vagy egyenes szakaszoknak trigonometrikus súlyfüggvényekkel képezett kombinációjaként fogjuk leírni, ezért azt mondjuk, hogy az adott pontsorozatra trigonometrikusan súlyozott interpolációs spline-görbét illesztünk. A két szomszédos pont közötti görbeívre előírjuk, hogy egyenes szakaszt ill. körívet állítson elő abban az esetben, ha az adott pontsorozat négy egymás utáni eleme egy egyenesen ill. egy körön van.

### 2.1 A trigonometrikusan súlyozott interpolációs spline-görbe előállítása

Adott a  $\{ P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \} \subset E^3$  interpolációs pontok halmaza.

Keresünk egy olyan, trigonometrikus ívekből álló görbület-folytonos görbét, amely áthalad az adott pontokon, és visszaadja a körívet és egyenes szakaszt, ha azokon legalább négy interpolációs pontot választunk.

A görbét a következő algoritmussal állítjuk elő:

1. lépés: Az első kettő és az utolsó két pont közötti görbeívek definiálása végett kiegészítjük a pontsorozatot a  $P_0$  és  $P_{n+1}$  pontokkal (lásd 2.2).

2. lépés: Elkészítjük az  $i$ -edik görbeívet ( $i = 1, \dots, n - 1$ ):

- határozzunk meg egy kört vagy egyenest a  $P_{i-1}, P_i$  és  $P_{i+1}$  pontokon keresztül, és ennek a  $P_i$  és  $P_{i+1}$  közötti darabja legyen  $\text{ív}[i]^{\text{bal}}$ .
- határozzunk meg egy kört vagy egyenest a  $P_i, P_{i+1}$  és  $P_{i+2}$  pontokon keresztül, és ennek a  $P_i$  és  $P_{i+1}$  közötti darabja legyen  $\text{ív}[i]^{\text{jobb}}$ .

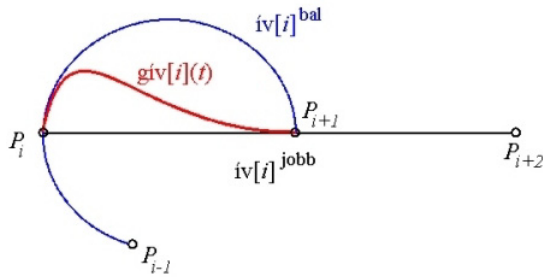
Az  $\text{ív}[i]^{\text{bal}}$  és  $\text{ív}[i]^{\text{jobb}}$  görbeíveket paraméteres vektoregyenlettel adjuk meg a  $[0, 1]$  intervallum felett.

- képezzük az  $\text{ív}[i]^{\text{bal}}(t)$  és  $\text{ív}[i]^{\text{jobb}}(t)$  görbék konvex kombinációját úgy, hogy az eredményül kapott görbe olyan legyen  $P_i$  és  $P_{i+1}$  között, hogy a  $P_i$  ponthoz közel az  $\text{ív}[i]^{\text{bal}}(t)$ -re, a  $P_{i+1}$  környezetében pedig  $\text{ív}[i]^{\text{jobb}}(t)$ -re hasonlítson:

$$\text{gív}[i](t) := \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{ív}[i]^{\text{bal}}(t) + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{ív}[i]^{\text{jobb}}(t), \quad (2.1)$$

$$t \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n-1.$$

3. lépés: Az ilyen módon meghatározott görbeívek uniója a kívánt interpolációs görbe.



**Megjegyzés** Ez a görbe lokálisan módosítható, azaz alakja csak az elmozdított pont valamely jól meghatározható környezetében változik.

1. ábra: Az  $i$ -edik görbeív

**2. 1. 1. tétel** A fenti (2.1) képlettel készített trigonometrikusan súlyozott spline-görbe ívei görbület-folytonosan csatlakoznak egymáshoz.

## 2.2 Peremfeltételek

Az interpolációs görbe  $n-1$  görbeívből áll, és minden ív a két végpontjával és még két szomszédos ponttal meghatározott, átfedő egyenes ill. kör konvex kombinációja. Emiatt az első és utolsó görbeív definíciója megkívánja a pontsor kibővítését. A  $P_0$  és  $P_{n+1}$  pontok megválasztása különböző peremfeltételeknek megfelelően történhet.

a) *Természetes peremfeltétel*

A kezdő- illetve a végpontban a görbe görbülete nulla.

Ekkor

$$\mathbf{p}_0 := \mathbf{p}_1 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}_{n+1} := \mathbf{p}_n + (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}),$$

ahol  $\mathbf{p}_i$  a  $P_i$  pont helyvektorát jelöli.

b) *Periodikus peremfeltétel*

Ilyen esetben  $P_1 = P_n$ . Legyenek

$$P_0 := P_{n-1}, \quad P_{n+1} := P_2.$$

c) *Körív szerinti peremfeltétel*

Ha a  $P_1, P_2, P_3$  pontokon átmenő kör középpontját  $C$ -vel, a  $\overline{CP_1}$  és  $\overline{CP_2}$  vektorok által bezárt szöget pedig  $\varphi$ -vel jelöljük, akkor a  $P_0$  pontot

$$\mathbf{p}_0 := \mathbf{c} + 2 \cdot \cos \varphi \cdot \overline{CP_1} - \overline{CP_2}$$

összefüggéssel határozzuk meg.

A  $P_{n+1}$  pontot pedig a

$$\mathbf{p}_{n+1} := \mathbf{k} + 2 \cdot \cos \delta \cdot \overline{KP_n} - \overline{KP_{n-1}}$$

képlettel, ahol  $K$  a  $P_n, P_{n-1}, P_{n-2}$  pontok köré írt kör középpontja,  $\delta$  pedig a  $\overline{KP_{n-1}}$  és  $\overline{KP_n}$  vektorok által bezárt szög. (A pontok helyvektorát a megfelelő kisbetűvel jelöltük.)

## 2.3 Súlyfüggvények és paraméterezés

A trigonometrikus ívekből álló görbület-folytonos görbe előállításához trigonometrikus súlyfüggvényeket használtunk:

$$\mu(t) = \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \text{ és}$$

$$1 - \mu(t) = \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Hátránya ennek a paraméterezésnek, hogy a trigonometrikus függvényértékek számolása a gépi számítást lelassítja, valamint a számolás a  $0^\circ$  közelében instabil.

A gyakorlatban azonban legtöbbször polinomokat vagy racionális törtfüggvényeket alkalmaznak súlyfüggvényekként. Ennek praktikus okai vannak: könnyen lehet számolni velük, számítógépen könnyen tárolhatók. Polinom esetén a deriváltja, integrálja is egy-egy polinom, amelyeknek együtthatóit algebrai úton egyszerűen ki lehet számolni.

Ha a  $t \cdot \frac{\pi}{2}$  radiánban adott szöget  $\varphi$ -vel jelöljük, akkor a trigonometriából ismert  $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ -es helyettesítéssel áttérhetünk racionális törtfüggvény alakú súlyfüggvényekre:

$$\mu(t) = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \text{ és} \quad 1 - \mu(t) = \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

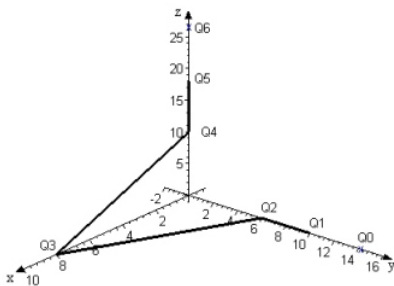
Tudjuk, hogy alkalmas paraméterezés megválasztásával javítható a számított pontok görbe menti eloszlása, így a görbéről jobb, egyenletesebb grafika nyerhető. A számításokat mi racionális paraméterezéssel végezzük el a gyakorlatban legtöbbször alkalmazott ún. normált tartomány választása mellett:  $0 \leq t \leq 1$ , de az elméleti tárgyalásban a trigonometrikus függvények és deriváltjaik áttekinthetőbbek. Mivel a kétféle paraméterezéssel ugyanazokat a görbéket és felületeket állítjuk elő, és a deriváltak a perempontokban ugyanazokat az értékeket adják, a csatlakozási viszonyokra vonatkozó tételeket a trigonometrikus alakban adott súlyfüggvényekkel bizonyítjuk.

## 2.4 Alkalmazás

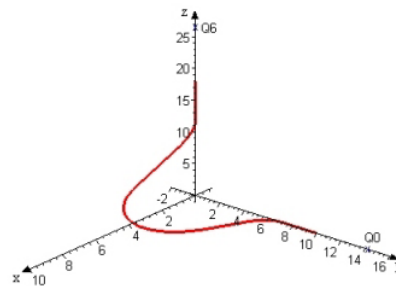
Tekintsünk egy példát a trigonometrikusan súlyozott interpolációs spline-görbe gyakorlati alkalmazására. Egy poligon csúcsait kerekítjük le adott sugarú körívekkel.

Adott a poligon a csúcspontjaival:  $\{ Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n \}$  és a lekerekítési körök  $r_i$  ( $i = 2, \dots, n - 1$ ) sugara. Az adott törött vonal mentén felvesszük az interpolációs pontokat, amelyek a lekerekítő köríveknek a poligon oldalain lévő érintési pontjai, és azoktól adott, elég kicsi  $\varepsilon$  távolságra mindkét irányban további egy-egy pontot a köríven és a poligon oldalán.

Legyen  $S := \{ P_1, P_2, P_3, \dots, P_k \} \subset \mathbf{E}^3$  ( $k = (n - 2) \cdot 6 + 2$ ) az interpolációs pontok sorozata, amely a spline-görbe meghatározó adata. Ebben az esetben a  $Q_1$  és  $Q_n$  pontoknál nincs csúcs, ezeket nem kell lekerekíteni, így a természetes peremfeltételt használhatjuk. A  $P_k$  pontokra alkalmazzuk az előzőekben leírt eljárást, és létrehozuk a  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$  pontokon átmenő trigonometrikusan súlyozott spline-függvényt. Ez a görbe egy érintőlegesen csatlakozó körív és egyenes szakasz párost négy görbeívvel helyettesít. Nevezetesen az  $\varepsilon$  távolsággal mindkét végén megrövidített körív és egyenes szakasz között két görbület-folytonosan csatlakozó átmeneti görbeívet tartalmaz.



2. ábra: Térbeli poligon



3. ábra: A csúcsoknál lekerekített poligon

## 3 Vegyes típusú felületfoltokból álló eltolási felület

A 2. pontban előállított trigonometrikusan súlyozott spline legyen a felület vezérgörbéje. Generáló görbeként négy kontrollponttal adott Bézier-görbét választunk, és a vezérgörbe mentén „mozgatjuk”.

A görbeívek csatlakozási pontjaiban elhelyezzük a Bézier-görbe kontrollpoligonját. Ennek a térbeli helyzetét szabadon választhatjuk meg. Mivel a vezérgörbe általában nem síkgörbe, a kontrollpoligon alkalmas pozicionálásához a végpontokhoz lokális koordináta-rendszerként a pontbeli kísérő triédert rendeljük. Kiindulásként tekintjük a vezérgörbe kezdő-pontjában megadott kontrollpoligon csúcsait és azok koordinátáit a kezdőpontban felvett loká-

lis koordináta-rendszerben. Feltéhetjük, hogy a kísérő triéder a vezérgörbe íveinek kezdő- és végpontjában is létezik.

Legyen  $V_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) a Bézier-görbe négy alappontja. Egy koordináta-rendszer transzformációval a  $V_I$  pontot a vezérgörbe  $P_i$  interpolációs pontjába, a  $\text{gív}[i](t)$  görbe  $P_i := \text{gív}[i](0)$  pontjában vett kísérő triédere által meghatározott koordináta-rendszerbe helyezzük, legyen ez  $\hat{V}_{i,1}$ . Ugyanez a transzformáció meghatározza a másik három alappontot, és ezáltal a köbös Bézier-görbe kezdőpontja is a görbeív kezdőpontjába kerül. Hasonlóképpen helyezzük el a kontrollpoligont a  $\text{gív}[i](t)$  ív  $P_{i+1} := \text{gív}[i](1)$  végpontjához tartozó kísérő triéder koordináta-rendszerébe is, ez a  $\hat{V}_{i+1,1}$  ponttal kapcsolódik a vezérgörbe  $P_{i+1}$  pontjához. A görbeív közbülső pontjaiban a kontrollpoligon csúcspontjait a két végpontjához rendelt  $\hat{V}_{i,k}$  és  $\hat{V}_{i+1,k}$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) pontokból készített konvex kombinációval definiáljuk:

$$V_{i,1}(t) = \text{gív}[i](t)$$

$$V_{i,k}(t) = \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i,k} + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i+1,k} + \text{gív}[i](t), \quad (3.1)$$

$$t \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n-1, \quad k = 2, 3, 4.$$

A fenti szerkesztést minden görbeívre ( $i = 1, \dots, n-1$ ) elvégezzük. Ezáltal a köbös Bézier-görbe kontrollpoligonját végigvisszük a trigonometrikusan súlyozott spline vezérgörbén, majd minden pontban elkészítjük a Bézier-görbét. Az eltolási felületet így vegyes típusú, egyik irányban trigonometrikus, másik irányban pedig polinomiális kétparaméteres vektorfüggvény írja le:

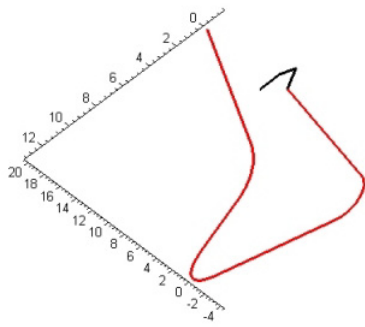
$$\mathbf{R}_i(t, u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{i,1}(t) \\ V_{i,2}(t) \\ V_{i,3}(t) \\ V_{i,4}(t) \end{bmatrix} =$$

$$= [B_{03}(u) \ B_{13}(u) \ B_{23}(u) \ B_{33}(u)] \cdot [V_{i,1}(t) \ V_{i,2}(t) \ V_{i,3}(t) \ V_{i,4}(t)]^T,$$

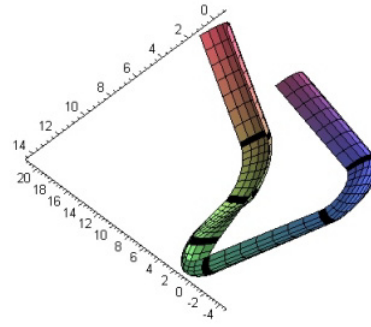
$$t, u \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.2)$$

ahol  $B_{j3}(u)$  ( $j = 0, \dots, 3$ ) súlyfüggvények a Bernstein alappolinomok, amelyek a harmadfokú polinomtér bázisát alkotják.

**3. 1. tétel** *A fent definiált (3.2)  $\mathbf{R}_i(t, u)$  felületfoltok normális-folytonosan kapcsolódnak egymáshoz, vagyis az érintő sík az egyik felület darabról a másikra való átlépéskor folytonosan változik.*



4. ábra: A vezérgörbe és a generáló görbe kontrollpoligonja



5. ábra: Az eltolási felület

## 4 Két vezérgörbével definiált általánosított eltolási felület

### 4.1 Két vezérgörbével és egy generáló görbével definiált felületek

Legyen a  $P_{1,i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) interpolációs pontokon átmenő trigonometrikusan súlyozott spline-görbe  $gív(t)$ , és a  $P_{2,i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) pontokat interpoláló görbe  $cív(t)$ , ( $t \in [0, 1]$ ) a két vezérgörbe. A generáló görbe a  $V_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) kontrollpontokkal adott Bézier-görbe. Az  $i$ -edik ( $i = 1, \dots, n-1$ ) görbeívekhez tartozó kontrollpoligont a következőképpen kapjuk:

- a  $V_1$  kontrollpontot a  $gív[i](t)$  görbe  $gív[i](0)$  pontjába helyezzük az ezen ponthoz tartozó kísérő triéder koordináta-rendszerében, így  $\hat{V}_{i,1}$  adódik. Ugyanez a transzformáció a  $V_2$  alappontot a  $\hat{V}_{i,2}$  pontba viszi szintén a  $gív[i](0)$  ponthoz tartozó kísérő triéder koordináta-rendszerében.
- A  $V_4$  kontrollpontot a  $cív[i](t)$  görbe kezdőpontjába helyezzük, a ponthoz tartozó kísérő triéder koordináta-rendszerébe való transzformálással:  $\hat{V}_{i,4}$  adódik, majd ugyanebben a koordináta-rendszerben  $\hat{V}_{i,3}$ -t is kiszámítjuk.
- Így a görbeívek kezdőpontjában létrehozuk a  $\hat{V}_{i,k}$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) pontokkal adott kontrollpoligont.
- Ezt a ívek végpontjában is elvégezzük, s a  $\hat{V}_{i+1,k}$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) kontrollpontokat kapjuk.
- A görbeívek közbülső pontjaiban a kontrollpoligont a következőképpen definiáljuk:

$$V_{i,1}(t) = gív[i](t)$$

$$V_{i,2}(t) = \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i,2} + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i+1,2} + gív[i](t)$$

$$V_{i,3}(t) = \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i,3} + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i+1,3} + cív[i](t)$$



$$V_{i,4}(t) = \text{cív}[i](t)$$

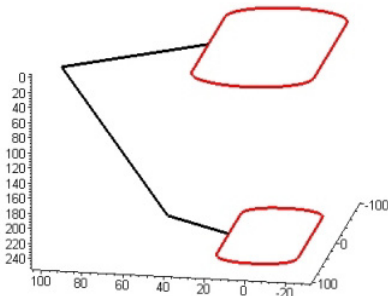
$$t \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Ezzel az eljárással a  $\hat{V}_{i,1}$  a  $\text{gív}[i](t)$  görbén, a  $\hat{V}_{i,4}$  pont a  $\text{cív}[i](t)$  görbén „csúszik”.

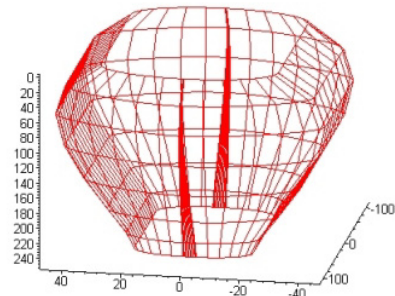
A generált harmadfokú Bézier-görbék halmaza lesz a definiált felület egyik paraméter vonalserege, és a trigonometrikusan súlyozott spline-görbék alkotják a másik paraméter vonalsereget.

**4. 1. 1. tétel** *A Bézier-görbék kontrollpontjainak pályagörbéi érintő-folytonosan csatlakozó görbeívekből állnak.*

A tételből következik, hogy a felületfoltok normális folytonosan csatlakoznak egymáshoz. Ez azt jelenti, hogy a szomszédos felületfoltok felületi normálisai a csatlakozó görbe pontjaiban párhuzamosak és egyirányúak. Ilyenkor valamely felületi görbe mentén haladva az egyik felület darabról a másikra való átlépéskor az érintő sík folytonosan változik. Ekkor azt mondjuk, hogy a felület sima.

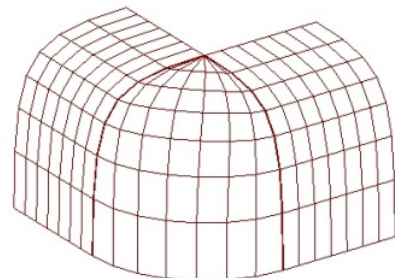


6. ábra: Két vezérgörbe és a generáló görbe kontrollpoligonja



7. ábra: Szabadon formált eltolási felület

**Megjegyzés** Az így szerkesztett felület jól alkalmazható az ún. „bőröndsarok lekerekítéseknél” is. A két vezérgörbét a poliéder szomszédos oldallapjain úgy vettük fel, hogy a lekerekítést a vizsgált sarok mentén végeztük el. A felső vezérgörbe lekerekítő sugara  $\varepsilon$ , az alsóé  $\rho$ .  $\varepsilon$  értéke olyan kicsi, amelyet a szerkesztés még megenged. A Bézier-görbét úgy adtuk meg, hogy a sarokban az érintők az oldallapokon legyenek, így a kapott eltolási felület a poliéder oldallapjaihoz érintőlegesen csatlakozik.



8. ábra: Lekerekített konvex sarok

## 4.2 Felületgenerálás alaktartó Bézier-görbével

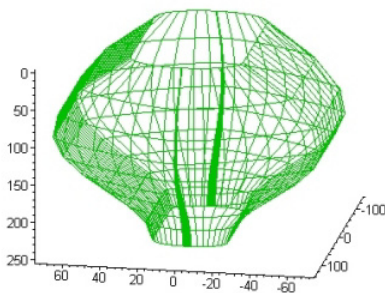
Mivel a felület definiálásakor a Bézier-görbe kontrollpoligonjának térbeli helyzetét és oldalainak hosszát bizonyos mértékig szabadon választhatjuk meg, a definiált felület alakját nemcsak a meghatározó görbék megválasztásával, hanem további geometriai feltételek előírásával is befolyásolhatjuk. Pl. a Bézier-kontrollpoligonokra előírt „hasonlósági feltétellel”. A két vezérgörbét és a generáló görbét a 4.1 fejezetben leírtak szerint adjuk meg.

Egy koordináta-rendszer transzformációval a  $V_1$  kontrollpontot az első, a  $V_4$  kontrollpontot a második vezérgörbe minden görbeívének kezdő- és végpontjához tartozó kísérő triéderének koordináta-rendszerébe helyezzük úgy, hogy a  $\hat{V}_{i,1}$  az első, a  $\hat{V}_{i,4}$  a második vezérgörbén „csússzon”, közben a kontrollpoligon oldalhosszainak aránya az eredetivel egyezzen meg. Ez párhuzamos vezérgörbék esetén a kontrollpoligonok hasonlóságát biztosítja. Ehhez minden görbeív ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) elején ill. végén meghatározzuk a  $\lambda_1$  ill.  $\lambda_2$  konstans szorzókat ( $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ), amelyek a kontrollpoligon két végpontja közötti aktuális és eredeti távolságainak arányát adják meg.

Az  $i$ -edik ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) görbeívek közbülső pontjaiban a Bézier-görbe kontrollpoligonját a következőképpen definiáljuk:

$$\begin{aligned} V_{i,1}(t) &= \text{gív}[i](t) \\ V_{i,2}(t) &= \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_1 \cdot \hat{V}_{i,2} + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_2 \cdot \hat{V}_{i+1,2} + \text{gív}[i](t) \\ V_{i,3}(t) &= \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_1 \cdot \hat{V}_{i,3} + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_2 \cdot \hat{V}_{i+1,3} + \text{cív}[i](t) \\ V_{i,4}(t) &= \text{cív}[i](t) \\ t &\in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n - 1. \end{aligned}$$

**4. 2. 1. tétel** *A Bézier-görbék kontrollpontjainak pályagörbéi  $G^1$ -folytonosak.*



Ezt a felületet is a (3.2) egyenlettel adott  $\mathbf{R}_i(t, u)$  kétparaméteres vektorfüggvény írja le.

9. ábra: Alaktartó transzformációval készült felület

### 4.3 Alakparaméterek meghatározása simasági feltételből

A két vezérgörbével definiált szabadon formált felület létrehozásakor a generáló Bézier-görbe kontrollpoligonja általában torzul. A két görbén ugyanis a megfelelő görbeívek végpontjainak távolsága, vagyis a  $\hat{V}_{i,1}$  és  $\hat{V}_{i,4}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) kontrollpontok távolsága változik. Másrészt ezekben a pontokban a két görbe kíséző triéderének élei általában nem párhuzamosak, következésképpen az adott  $\hat{V}_{i,1} \hat{V}_{i,2} \hat{V}_{i,3} \hat{V}_{i,4}$  kontrollpoligon  $\hat{V}_{i,1} \hat{V}_{i,2}$  és  $\hat{V}_{i,3} \hat{V}_{i,4}$  éleinek a különböző kíséző triéderek koordináta-rendszereihez való rögzítése a kontrollpoligon torzulását okozza. A 4.2 pontban az oldalhosszak arányát megtartó szorzótényezők bevezetésével – amelyeket a felület alakparamétereinek nevezhetünk – mérsékeljük ezt a torzulást.

Azért, hogy „szép alakú” felületeket kapjunk, olyan függvényeket vezetünk be, – nevezük ezeket energia-függvényeknek –, amelyek minimalizálásával simítani lehet.

Legyen  $\mathbf{R} : \Omega \rightarrow \mathbf{E}^3$ . A vékony membrán energiája az  $\Omega$  felületdarabon:

$$\iint_{\Omega} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) d\Omega$$

ahol  $\kappa_1$  és  $\kappa_2$  az  $\mathbf{R}$  felület főgörbületeit jelentik.

A hajlítási energia fizikailag azt az energiát jelenti, amely a vékony membrán meghajlításához szükséges. A kifejezésben a felület alakját jellemző főgörbületek a felület paraméterezésétől függetlenek.

A tapasztalat szerint azok a simító függvények, amelyek felületi görbületeket tartalmaznak, jó minőségű felületeket eredményeznek, de ezen megoldások kiszámításához sok időre van szükség.

Mi majd alakparaméterek megválasztásához alkalmazunk simító feltételeket.

A felületek fizikai viselkedésére jellemző különböző energiamennyiségek minimalizálása az alakparaméterek megválasztására hatékony módszernek bizonyult. A legtöbb esetben az energia-függvények felületi integrálok, amelyek különböző rendű parciális deriváltakat tartalmaznak, és mindegyik a deformációs energiára skalár értéket ad.

Ha a paraméterezés izometrikus, tehát  $\frac{\partial \mathbf{R}(t,u)}{\partial t}$  és  $\frac{\partial \mathbf{R}(t,u)}{\partial u}$  ortonormáltak, továbbá a görbületi irányok megegyeznek a paramétervonalak irányával, akkor a vékony membrán energiáját az

$$F = \iint_A \left[ \left( \frac{\partial^2 \mathbf{R}(t,u)}{\partial t^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \mathbf{R}(t,u)}{\partial t \partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \mathbf{R}(t,u)}{\partial u^2} \right)^2 \right] dt du$$

$$A = [0, 1] \times [0, 1]$$

felületi integrál - mint simító függvény (fairing function) – adja. Ha olyan alakparamétereket választunk, amelyek a felület vektoregyenletében első hatványon szerepelnek, akkor ez a függvény az alakparaméterekben másodfokú, pozitív definit, ezért a minimum helye jól számítható. Az alakparaméterekre tett feltételt, miszerint azok értékét úgy választjuk, hogy az  $F$  függvény értéke minimális legyen, simasági feltételnek (fairness condition) nevezük.

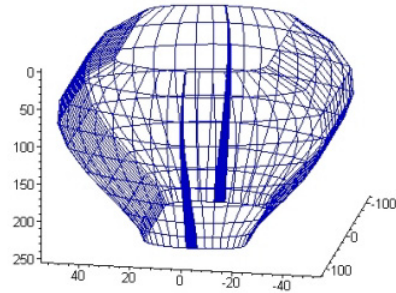
A két vezérgörbével és egy harmadfokú Bézier-görbével definiált szabadon formált felület alakparamétereit jelölje  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ), ahol  $n-1$  a felületfoltok száma. A simító függvénynek az egész felületre vett integrálja

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} F$$

$n-1$  változós másodfokú polinom. A szélsőérték meghatározása tehát az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldására vezet:

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Számos példán elvégzett vizsgálatok azt eredményezték, hogy az így generált felületek „feszesebb” alakot mutatnak, mint a 4.1 pontban leírt módszer, ami a  $\lambda_i = 1$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) esetnek felel meg.



10. ábra: Simasági feltétellel számolt felület

Az

$$E_1 = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{R}(t,u)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{R}(t,u)}{\partial u} \right)^2 \right] dt du$$

ún. Dirichlet-energia a normál deformáció gradiensén alapul. Azt mutatja meg, hogy mennyi energia szükséges a normális irányában történő alakváltoztatáshoz.

A harmadrendű parciális deriváltakkal felírt

$$E_2 = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial^3 \mathbf{R}(t,u)}{\partial t^3} \right)^2 + 3 \left\{ \left( \frac{\partial^3 \mathbf{R}(t,u)}{\partial t^2 \partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial^3 \mathbf{R}(t,u)}{\partial t \partial u^2} \right)^2 \right\} + \left( \frac{\partial^3 \mathbf{R}(t,u)}{\partial u^3} \right)^2 \right] dt du$$

a lökési energia. A modell, amelyre ez az energiafüggvény jellemző, egy papírszerű anyaghoz hasonlít, szögletes, mint egy poliéder.

A gyakorlatban sokszor a háromféle energia lineáris kombinációjával számolnak:

$$E_{\delta} = \alpha \cdot E_1 + \beta \cdot F + \gamma \cdot E_2$$

Az együtthatók megválasztásával lehet befolyásolni, hogy melyik alakváltoztatás domináljon.

## 5 Rések és lyukak kitöltése felületek konvex kombinációjaként

Ebben a fejezetben a négy peremgörbére illesztett Coons-féle felületszerkesztési módszert általánosítjuk.

A módszert az autótervezés területén dolgozók – S. A. Coons (Ford) és W. Gordon (Generál Motors) – fejlesztették ki.

Coons – az eredeti cikkében – a felületegyenletet magasabb dimenzióban is megadta.  $n$  dimenzióban a határoló görbéket  $n - 1$  dimenziós hiperfelületekkel helyettesítette.

Az általunk vázolt felületek csak formálisan követik Coons módszerét, hisz a két szemközti határvonal helyett két felület darabot használunk, amelyek a határvonalaik mentén az eredményül kapott felületfolttal normális-folytonosan kapcsolódnak. Ez a Coons-féle felületdefiniálás kiterjesztésének tekinthető, ahol a két kiindulási adat dimenziószáma megegyezik a kapott felület dimenziószámával.

## 5.1 Eljárás rés kitöltésére adott peremgörbékkel

Ebben az algoritmusban két felületet adunk meg az  $\mathbf{r}_1(t, u)$  és  $\mathbf{r}_2(t, u)$  kétparaméteres vektorfüggvényekkel, valamint két térgörbét az  $\mathbf{r}_3(u)$  és  $\mathbf{r}_4(u)$  egyparaméteres vektorfüggvényekkel, amelyek a keresett felületfolt határgörbéi lesznek, és a két adott felület határgörbéihez csatlakoznak. A réskitöltő felület a két adott felületet köti össze. A rés az  $\mathbf{r}_1(t, u)$  és  $\mathbf{r}_2(t, u)$  felületeknek az  $u \in [-a, 0]$ , ill.  $u \in [1, b]$  darabjai között van, és az eljárásban ezen felületeknek az  $u \in [0, 1]$  tartományra kiterjesztett darabjaival számolunk. Az  $\mathbf{R}(t, u)$  felületet a  $(t, u) \in [0, 1] \times [0, 1]$  paramétertartományban úgy definiáljuk, hogy a határoló görbék  $u = 0$  és  $u = 1$  esetén egyezzenek meg a rés határaival: az  $\mathbf{r}_1(t, 0)$  és az  $\mathbf{r}_2(t, 1)$  görbékkel, továbbá  $t = 0$  esetén az  $\mathbf{r}_3(u)$ ,  $t = 1$  esetén az  $\mathbf{r}_4(u)$ ,  $u \in [0, 1]$ , görbékkel essenek egybe.

Az  $\mathbf{R}(t, u)$  réskitöltő felületet a szemközti felületek és görbék trigonometrikus konvex kombinációjával és egy alkalmas korrekciós függvénnyel állítjuk elő.

Adott két felületdarab a  $[0, 1] \times [0, 1]$  paramétertartományon értelmezett  $\mathbf{r}_1(t, u)$  és  $\mathbf{r}_2(t, u)$  differenciálható vektorfüggvényekkel, és két görbe az  $\mathbf{r}_3(u)$  és  $\mathbf{r}_4(u)$  differenciálható vektorfüggvényekkel,  $u \in [0, 1]$ . A rés sarokpontjaira megköveteljük, hogy :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(0, 0) &= \mathbf{r}_3(0), & \mathbf{r}_1(1, 0) &= \mathbf{r}_4(0) \\ \mathbf{r}_2(0, 1) &= \mathbf{r}_3(1), & \mathbf{r}_2(1, 1) &= \mathbf{r}_4(1) \end{aligned} \text{ teljesüljön.}$$

Keresünk olyan  $\mathbf{R}(t, u)$  felületfoltot, amelynek a határoló görbéi az  $\mathbf{r}_1(t, 0)$ ,  $\mathbf{r}_2(t, 1)$ ,  $\mathbf{r}_3(u)$  és  $\mathbf{r}_4(u)$  görbék.

**5. 1. 1. tétel** Az  $\mathbf{R}(t, u) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(t, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(t, u) +$   
 $+ \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_3(u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_4(u) -$   
 $- \left\{ \left[ \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(0, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(0, u) \right] \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) + \right.$   
 $\left. + \left[ \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(1, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(1, u) \right] \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right\}$

(5.1.1)

vektoregyenlettel definiált felület a kívánt feltételeket kielégíti.

**Megjegyzés** Az  $\mathbf{R}(t,u)$  felületet felírhatjuk mátrixos alakban is:

$$\mathbf{R}(t,u) = \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) & \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_3(u) \\ \mathbf{r}_4(u) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(t,u) & \mathbf{r}_2(t,u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) & \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(0,u) & \mathbf{r}_2(0,u) \\ \mathbf{r}_1(1,u) & \mathbf{r}_2(1,u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \end{bmatrix}$$

ahol a súlyfüggvények:

$$f_1(t) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right),$$

$$f_1(0) = 1, \quad f_1(1) = 0$$

$$f_2(t) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right),$$

$$f_2(0) = 0, \quad f_2(1) = 1$$

$$f_1(t) + f_2(t) \equiv 1$$

valamint

$$g_1(u) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right),$$

$$g_1(0) = 1, \quad g_1(1) = 0$$

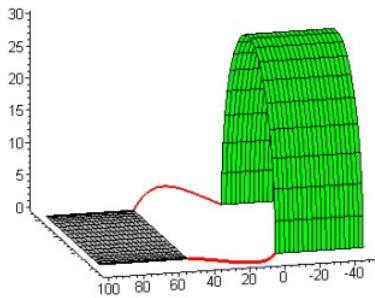
$$g_2(u) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right),$$

$$g_2(0) = 0, \quad g_2(1) = 1$$

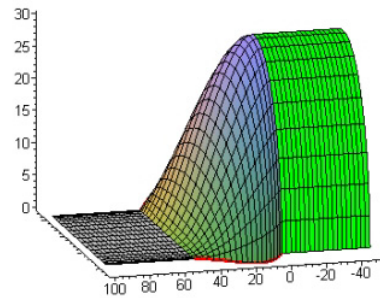
$$g_1(u) + g_2(u) \equiv 1.$$

A képlet utolsó tagja a korrekciós függvény, amely az (5.1.1) vektoregyenletben a kapcsos zárójelben szereplő kifejezés.

**5. 1. 2. tétel** Ha az  $\mathbf{r}_3(u)$  és  $\mathbf{r}_4(u)$  térgörbék  $C^1$ -folytonosan kapcsolódnak az  $\mathbf{r}_1(t,u)$  felület  $t = 0$  és  $t = 1$  határvonalához, akkor az (5.1.1) vektoregyenlettel definiált  $\mathbf{R}(t,u)$  felület az  $\mathbf{r}_1(t,u)$  felülethez  $C^1$ -folytonosan kapcsolódik az  $\mathbf{r}_1(t,0)$ ,  $t \in [0, 1]$ , határgörbe mentén.



11. ábra: Sík- és hengeres felületfolthoz kapcsolódó görbék



12. ábra: A rés folytonos kitöltése

A modellezés során gyakran jelentkeznek olyan problémák (pl. csatornák tervezésénél), amikor hengeres és toroidos felületi elemeket kell összekapcsolni. Ennek megvalósítására is lehetőség van ezzel a módszerrel, gyengébb feltételek mellett.

**5. 1. 4. tétel** Ha az  $\mathbf{r}_3(u)$  és  $\mathbf{r}_4(u)$  térgörbék  $G^1$ -folytonosan kapcsolódnak az  $\mathbf{r}_1(t,u)$  felület  $t = 0$  és  $t = 1$  határoló görbéjéhez, akkor az (5.1.1) vektoregyenlettel definiált  $\mathbf{R}(t,u)$  felület az  $\mathbf{r}_1(t,u)$  felülethez  $G^1$ -folytonosan kapcsolódik az  $\mathbf{r}_1(t,0)$ ,  $t \in [0, 1]$ , határgörbe mentén.

Bizonyos szerkesztéseknél a feladat megköveteli, hogy olyan réskitöltő felületet illesztünk a két adott –  $\mathbf{r}_1(t, u)$  és  $\mathbf{r}_2(t, u)$  – felület közé, amely  $C^2$ -folytonosan kapcsolódik az adott felületekhez. Ennek az előzőekben alkalmazott trigonometrikus súlyfüggvények nem fe-

lelnek meg, mert  $\frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} \neq 0$  és  $\frac{d^2 g_2(u)}{du^2} \Big|_{u=0} \neq 0$ .

Olyan súlyfüggvényeket kell alkalmazni, amelyekre (az előző jelöléseket használva)

$$f_2(0) = 0, \quad f_2(1) = 1 \quad f_1(t) + f_2(t) \equiv 1 \quad f_2'(0) = f_2'(1) = 0 \quad f_2''(0) = f_2''(1) = 0$$

és

$$g_2(0) = 0, \quad g_2(1) = 1 \quad g_1(u) + g_2(u) \equiv 1 \quad g_2'(0) = g_2'(1) = 0 \quad g_2''(0) = g_2''(1) = 0 \quad (5.1.2)$$

Ahhoz, hogy az  $\mathbf{R}(t, u)$  és  $\mathbf{r}_1(t, u)$   $\{\mathbf{r}_2(t, u)\}$  felületek az  $u = 0$   $\{u = 1\}$  paramétervonalak mentén másodrendben folytonosan kapcsolódjanak, az  $\mathbf{R}_{uu}(t, 0) = \mathbf{r}_{1,uu}(t, 0)$   $\{\mathbf{R}_{uu}(t, 1) = \mathbf{r}_{2,uu}(t, 1)\}$  egyenlőségnek kell teljesülnie.

Adott – a  $[0, 1] \times [0, 1]$  tartományon értelmezett, kétszer parciálisan deriválható  $\mathbf{r}_1(t, u)$  és  $\mathbf{r}_2(t, u)$  kétparaméteres vektor-skalár függvényekkel – két felületdarab, valamint – a  $[0, 1]$  intervallumon értelmezett, kétszer differenciálható  $\mathbf{r}_3(u)$  és  $\mathbf{r}_4(u)$  vektor-skalár függvényekkel – két görbe.

Keresünk olyan  $\mathbf{R}(t, u)$  felületet, amelynek határoló görbái:  $\mathbf{r}_1(t, 0)$ ,  $\mathbf{r}_2(t, 1)$ ,  $\mathbf{r}_3(u)$  és  $\mathbf{r}_4(u)$ .

A felületfoltot a következő egyenlettel definiáljuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t, u) = & [f_1(t) \quad f_2(t)] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_3(u) \\ \mathbf{r}_4(u) \end{bmatrix} + [\mathbf{r}_1(t, u) \quad \mathbf{r}_2(t, u)] \cdot \begin{bmatrix} g_1(u) \\ g_2(u) \end{bmatrix} - \\ & - [f_1(t) \quad f_2(t)] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(0, u) & \mathbf{r}_2(0, u) \\ \mathbf{r}_1(1, u) & \mathbf{r}_2(1, u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1(u) \\ g_2(u) \end{bmatrix} \\ & t, u \in [0, 1] \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

**5. 1. 6. tétel** Ha az  $\mathbf{r}_3(u)$  és  $\mathbf{r}_4(u)$  térgörbék  $C^2$ -folytonosan kapcsolódnak az  $\mathbf{r}_1(t, u)$  felület  $t = 0$  és  $t = 1$  határvonalához, akkor az (5.1.3) vektoregyenlettel definiált  $\mathbf{R}(t, u)$  felület az  $\mathbf{r}_1(t, u)$  felülethez  $C^2$ -folytonosan kapcsolódik az  $\mathbf{r}_1(t, 0)$ ,  $t \in [0, 1]$ , határgörbe mentén, ahol a súlyfüggvények eleget tesznek az (5.1.2) feltételeknek.

Példáinkban az (5.1.3) egyenlettel megadott felületek elkészítésekor ötödfokú Hermite polinomokat használtunk súlyfüggvényekként, melyek eleget tesznek az (5.1.2) feltételeknek:

$$\begin{aligned} f_2(t) &= 6t^5 - 15t^4 + 10t^3, & f_1(t) &= 1 - f_2(t) \\ g_2(u) &= 6u^5 - 15u^4 + 10u^3, & g_1(u) &= 1 - g_2(u) \end{aligned}$$

Felmerül a kérdés: vajon csak polinomiális súlyfüggvények esetén hozható létre  $C^2$ -folytonos illeszkedés?

Igazolható, hogy ha az (5.1.1) vektorfüggvényhez egy újabb tagot veszünk, azaz a korrekciós függvényt kibővítjük, akkor trigonometrikus súlyfüggvényekkel is létrehozható a  $C^2$ -folytonos kapcsolódás megfelelő bemenő adatok esetén.

Ekkor a felületfoltot a következő vektorfüggvénnyel adhatjuk meg:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t, u) &= \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) & \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_3(u) \\ \mathbf{r}_4(u) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(t, u) & \mathbf{r}_2(t, u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \end{bmatrix} - \\ &\quad - \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) & \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(0, u) & \mathbf{r}_2(0, u) \\ \mathbf{r}_1(1, u) & \mathbf{r}_2(1, u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \end{bmatrix} + \\ &\quad + s(u) \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot \left\{ \mathbf{r}_1(t, u) - \mathbf{r}_2(t, u) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot [\mathbf{r}_1(0, u) - \mathbf{r}_2(0, u)] - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot [\mathbf{r}_1(1, u) - \mathbf{r}_2(1, u)] \right\} \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

ahol  $s(u) := \frac{1}{8\pi^2} \cdot (-2u + 1)^3 \cdot \sin^2(\pi(2u + 1))$ .

**5. 1. 8. tétel** *Ha az  $\mathbf{r}_3(u)$  és  $\mathbf{r}_4(u)$  térgörbék  $C^2$ -folytonosan kapcsolódnak az  $\mathbf{r}_1(t, u)$  felület  $t = 0$  és  $t = 1$  határvonalához, akkor az (5.1.4) vektoregyenlettel definiált  $\mathbf{R}(t, u)$  felület az  $\mathbf{r}_1(t, u)$  felülethez  $C^2$ -folytonosan kapcsolódik az  $\mathbf{r}_1(t, 0)$ ,  $t \in [0, 1]$ , határgörbe mentén.  $\square$*

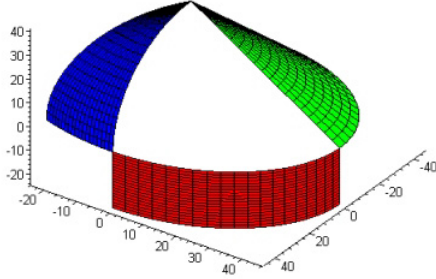
## 5.2 Háromoldalú lyuk kitöltése

A lyukkitöltő felületet a három adott felület konvex kombinációjaként állítjuk elő úgy, hogy az kapcsolódik az adott felületekhez a határgörbék mentén. Feltesszük, hogy az adott felületek a parciálisan differenciálható  $\mathbf{r}_i(t, u)$   $i = 1, 2, 3$  vektor-skalár függvényekkel adottak, ahol  $(t, u) \in [t_1, t_2] \times [u_1, u_2]$ , és ez a tartomány tartalmazza a  $[0, 1] \times [0, 1]$  négyzetet. A megkötés az algoritmusban az, hogy az adott felületek közül kettő felület háromoldalú degenerált felület legyen, amelyek egyetlen sarokpontjukkal találkoznak a lyuk sarkában. Ezek például részei két különböző forgásfelületnek, amelyek degenerált derékszögű foltként jelennek meg, vagy háromszög alakú foltok, amelyek külön-külön  $G^1$ -folytonosan kapcsolódnak a lyukat határoló harmadik felülethez.

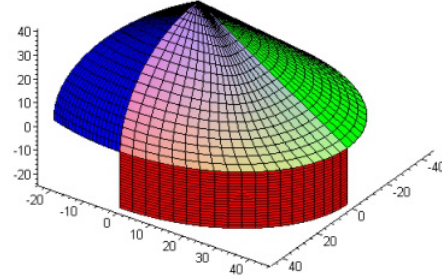
Esetünkben az adott 3 felületfolt konvex kombinációja az alapnégyzeten értelmezett, a korrekciós függvény pedig a határoló görbékéből készült trigonometrikus szorzótényezőkkel



adott. Az eredményül kapott lyukkitöltő felület egy degenerált derékszögű folt, ahol a határoló  $t = 0$  vonal csak egy pont, a háromoldalú lyuk egy sarokpontja.



13. ábra: Ellipszoid, kúp és henger által határolt háromszöglyuk



14. ábra: A lyukat kitöltő felületfolt a határoló felületdarabokkal

Adott három felület az  $\mathbf{r}_1(t, u)$ ,  $\mathbf{r}_2(t, u)$ ,  $\mathbf{r}_3(t, u)$  parciálisan differenciálható vektorfüggvényekkel, amelyek paramétertartománya a  $[0, 1] \times [0, 1]$  alapnégyzetet tartalmazza, és a sarokpontokra:  $\mathbf{r}_1(0, u) = \mathbf{r}_2(0, u) = \mathbf{m}$ ,  $\mathbf{r}_1(1, 0) = \mathbf{r}_3(1, 0)$  és  $\mathbf{r}_2(1, 1) = \mathbf{r}_3(1, 1)$ .

Keresünk olyan  $\mathbf{R}(t, u)$  felületfoltot, amelynek határoló görbéi az  $\mathbf{r}_1(t, 0)$ ,  $\mathbf{r}_2(t, 1)$  és  $\mathbf{r}_3(1, u)$  görbék.

**5. 2. 1. tétel** Az  $\mathbf{R}(t, u) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(t, u) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(t, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_3(t, u) - \left\{ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot [\mathbf{r}_3(t, 0) - \mathbf{r}_1(t, 0)] + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot [\mathbf{r}_3(t, 1) - \mathbf{r}_2(t, 1)] \right\}$   $(t, u) \in [0, 1] \times [0, 1]$  (5.2.1)

vektoregyenlettel definiált felület a kívánt feltételeket kielégíti.

**5. 2. 2. tétel** Ha a háromszöglyukat kitöltő (5.2.1)  $\mathbf{R}(t, u)$  felületre az

$$\mathbf{r}_{1,u}(t, 0) \parallel \mathbf{r}_{3,u}(t, 0) \quad \text{és} \quad \mathbf{r}_{2,u}(t, 1) \parallel \mathbf{r}_{3,u}(t, 1)$$

párhuzamossági feltételek, valamint az

$$\mathbf{r}_{1,t}(1, 0) = \mathbf{r}_{3,t}(1, 0) \quad \text{és} \quad \mathbf{r}_{2,t}(1, 1) = \mathbf{r}_{3,t}(1, 1)$$

egyenlőségek állnak fenn, akkor az  $\mathbf{R}(t, u)$  lyukkitöltő felület a lyukat  $G^1$ -folytonosan tölti ki.

Az (5.2.1)-ben definiált felület alakja a szinguláris pontban a következőképpen vizsgálható:

- Ha az  $\mathbf{r}_1(t, u)$  és  $\mathbf{r}_2(t, u)$  felületek valamelyikének nincs érintő síkja, vagy az érintő síkjaik különbözőek az adott  $t = 0$  pontban, akkor az eredményül kapott lyukkitöltő felületnek sincs érintő síkja ugyanabban a pontban.

- Ha a  $t = 0$  pontban az  $\mathbf{r}_1(t, u)$  és  $\mathbf{r}_2(t, u)$  felületeknek mint ponthalmazoknak van érintő síkja, csak a leíró vektorfüggvény egyik parciális deriváltja  $\mathbf{0}$ , akkor ebben a pontban a felületi merőleges egységvektorokat a következőképpen definiálhatjuk:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \mathbf{r}_{1,t}(t, u_0) \times \mathbf{r}_{1,u}(t, u_0) \right)^0 \quad \text{és} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left( \mathbf{r}_{2,t}(t, u_0) \times \mathbf{r}_{2,u}(t, u_0) \right)^0,$$

ahol  $u_0 \in [0, 1]$  és a 0 a kitevőben a vektorok normalizációját jelenti.

A feltétel szerint a két felületnek van közös érintő síkja a háromszöglyuk ezen pontjában, következésképpen ez a két vektor egyenlő a közös felületi merőlegessel, melyet  $\mathbf{n}$  jelöl.

Megmutatjuk, hogy az  $\mathbf{R}(t, u)$  lyukkitöltő felületnek ugyanaz az érintő síkja ebben a pontban.

Ehhez meghatározzuk a  $t = 0$  pontban mindkét paraméterirányban az érintővektorokat:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{R}_t(t, u_0) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u_0\right) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}_{1,t}(t, u_0) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u_0\right) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}_{2,t}(t, u_0) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{R}_u(t, u_0) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u_0\right) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}_{1,u}(t, u_0) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u_0\right) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}_{2,u}(t, u_0), \end{aligned}$$

ahol  $u_0 \in [0, 1]$  és felhasználtuk a határértékképzés műveleti tulajdonságai mellett a sarokpontra tett megállapítást is.

A felületi normális:  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \mathbf{R}_t(t, u_0) \times \mathbf{R}_u(t, u_0) \right)^0$ .

Az  $u = u_0$  paramétervonal mentén a  $t = 0$  pont felé haladva a felületi normális határértéke párhuzamos az  $\mathbf{n}$  vektorral, mert a vektoriális szorzatban a vektor mindkét komponense merőleges  $\mathbf{n}$ -re. Következésképpen az  $\mathbf{R}(t, u)$  lyukkitöltő felületnek ugyanaz az érintősíkja a  $(t, u) = (0, 0)$  pontban, mint az  $\mathbf{r}_1(t, u)$  és  $\mathbf{r}_2(t, u)$  felületeknek.

## 6 A kidolgozott algoritmusok vizsgálata

### 6.1 Az algoritmusok elemzése

A számítógépi geometriát többek között a matematikában, a korszerű mérnöki tudományokban, a számítógéppel támogatott tervezésben, a számítógépi grafikában, a robotikában és a statisztikában használják fel.

Módszereinek **bemenete** jellemzően egy geometriai objektumhalmaz leírása, mint például egy ponthalmazé.

A **kimenet** lehet egy új objektum, mint például a pontokat interpoláló görbe, de lehet válasz egy, az objektumokra irányuló kérdésre, mint például, hogy három pont egy egyenesen van-e, vagy egy körre illeszkedik.

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy milyen kiindulási pontrendszer esetén alkalmazható a 2. fejezetben leírt algoritmus, mikor állítható elő a kívánt görbe, valamint egy poligon csúcsainak lekerekítésekor milyen feltételek mellett használható a trigonometrikusan súlyozott spline előállítására kidolgozott algoritmus?

## 6.2 Az algoritmusok és számítási eljárások hatékonyságának vizsgálata

Egy feladatra adott algoritmus esetén alapvető kérdés, mennyi ideig tart a számolás vagy mekkora ennek memóriaigénye. Bár általában nehéz ezt megbecsülni, mindent meg kell tennünk annak érdekében, hogy számításainkat alkalmas matematikai modellek használatával és hatékony programozással optimalizáljuk.

Általában egy algoritmus által felhasznált idő a bemenet méretével nő, így a program futási idejét bemenete méretének függvényével írjuk le.

A bemenet mérete a bemenő elemek (pontok)  $n$  száma.

Egy algoritmus futási ideje egy bizonyos bemenetre a végrehajtott alapműveletek száma.

Az adott  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  interpolációs pontokra illeszkedő trigonometrikus ívekből álló görbület-folytonos görbe előállításához  $2n - 1$  ívet kell elkészítenünk. Mivel minden görbeív elkészítése ugyanannyi (konstans) számítást igényel, a futási idő  $n$  lineáris függvénye, azaz  $O(n)$ .

Vegyes típusú felületfoltokból álló eltolási felület előállításához először a trigonometrikusan súlyozott spline vezérgörbét készítjük el. Az előzőekben láttuk, hogy ennek futási ideje  $O(n)$ . A görbe  $n$  interpolációs pontjába transzformáljuk a Bézier-görbe kontrollpoligonját, a közbülső pontokban pedig ezek konvex kombinációjaként állítjuk elő. Az ezek segítségével létrehozott  $n - 1$  darab vegyes típusú felületfolt elkészítéséhez  $4 \times 4$ -es mátrixszal való szorzást végzünk, ami konstans időt vesz igénybe. Így összességében a futási idő  $O(n)$ .

Két vezérgörbével definiált általános eltolási felület elkészítéséhez két trigonometrikusan súlyozott spline vezérgörbét állítunk elő  $O(n)$  idő alatt, majd  $n - 1$  felületfoltot szintén  $O(n)$  idő alatt. Így a felület létrehozásának futási ideje  $O(n)$ .

A felületek előállítása simasági feltételek felhasználásával már több vizsgálatot igényel. A szabadon formált felület  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) alakparaméterei meghatározására  $n - 1$  egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kapunk. Ezt viszont az energiafüggvényből kaptuk, amelyet nem integrálással, hanem az integrál numerikus közelítésével állítottunk elő. Itt a pontok számának és helyének megválasztása befolyásolja az eredményt.

A lineáris egyenletrendszer átírható mátrixegyenletté, ahol a mátrix, illetve a vektor elemei az  $\mathbf{R}$  valós számtesthez tartoznak. Az  $\mathbf{M} \cdot \lambda = \mathbf{b}$ , ( $\mathbf{M}$  nemszinguláris mátrix)  $n - 1$  lineáris egyenletet és  $n - 1$  ismeretlent tartalmazó rendszer megoldásaként  $\lambda = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{b}$  adódik. E módszer hátránya a numerikus instabilitás. Szerencsére létezik egy numerikusan stabil megoldás, az LUP felbontás is, amelynek másik előnye, hogy az előzőnél háromszor gyorsabb. Amikor a  $\mathbf{P}$  permutációs mátrix nincs jelen, akkor az  $\mathbf{M} = \mathbf{LU}$  szorzat tényezőit kell meghatározni. Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy egyenletrendszerünk megoldásának futási ideje az LUP felbontás futási idejével megegyezik, tehát  $O(n^3)$ . Ha a numerikus integrálásnál felvett pontok száma  $n$ -nél nem nagyobb, akkor a felület előállításának futási ideje szintén  $O(n^3)$ .

Munkánk során a **Maple** általános célú számítógépi algebrai rendszert használtuk.

## A szerző témakörben készített publikációi

1. Pethőné Vendel Teréz, Felületek előállítása trigonometrikusan súlyozott spline-függvények felhasználásával, *Alkalmazott matematikai lapok* 20 (2000) 75–89.
2. Vendel, Teréz P., Über eine neuartige Bewegungsfläche, TOPICS in algebra, analysis and geometry, BPR Kiadó, Leoben, 1999, 317–328.
3. Szilvási-Nagy, Márta – Vendel, Teréz P., Generating curves and swept surfaces by blended circles, *Computer Aided Geometric Design* 17 (2000) 197–206.
4. Szilvási-Nagy, Márta – Vendel, Teréz P. – Stachel, Hellmuth,  $C^2$  Filling of Gaps by Convex Combination of Surfaces under Boundary Constraints, *KOG-6* (2002) 41–48.
5. Szilvási-Nagy, Márta – Vendel, Teréz P., A Coons-type construction with surfaces, I. Magyar Számítógépes Grafika és Geometriai Konferencia, 2002. május 28–29. Budapest
6. Pethőné Vendel Teréz, Térgörbék és felületek előállítása trigonometrikusan súlyozott spline-függvényekkel, PTE PMMFK Jubileumi Tudományos Ülésszak 2000, Pécs, Kiadvány 141-145.
7. Pethőné Vendel Teréz, Térgörbék és felületek előállítása trigonometrikusan súlyozott spline-függvényekkel, *GÉP, A Gépipari Tudományos Egyesület Műszaki Folyóirata* (2001/1-2) 52-54.