

**GÖRBE- ÉS FELÜLETMODELLEZÉS VEGYES
TÍPUSÚ SPLINE-FÜGGVÉNYEKKEL**

Ph.D dolgozat

PETHŐNÉ VENDEL TERÉZIA

TÉMAVEZETŐ: NAGYNÉ DR. SZILVÁSI MÁRTA

**BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR**

Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2003

Tartalom

Tartalom	2
1 Bevezetés	3
2 Trigonometrikusan súlyozott interpolációs spline-görbe.....	6
2.1 Trigonometrikusan súlyozott interpolációs spline-görbe előállítás.....	6
2.2 Peremfeltételek	10
2.3 Súlyfüggvények és paraméterezés	12
2.4 Alkalmazás.....	15
3 Vegyes típusú felületfoltokból álló eltolási felület.....	17
4 Két vezérgörbével definiált általánosított eltolási felület	21
4.1 Két vezérgörbével és egy generáló görbével definiált felületek.....	21
4.2 Felületgenerálás alaktartó Bézier-görbével	30
4.3 Alakparaméterek meghatározása simasági feltételből.....	32
5 Rések és lyukak kitöltése felületek konvex kombinációjaként	37
5.1 Eljárás rés kitöltésére adott peremgörbékkel	38
5.2 Háromoldalú lyuk kitöltése.....	55
6 A kidolgozott algoritmusok vizsgálata	65
6.1 Az algoritmusok elemzése	65
6.2 Az algoritmusok és számítási eljárások hatékonyságának vizsgálata	68
7 Irodalomjegyzék.....	72
8 Konferencia előadások, hivatkozások.....	76
9 Melléklet	77

1 Bevezetés

A műszaki tervező munkájának jelentős részét a tervezett objektum alakjának meghatározására és szemléltetésére irányuló tevékenységek teszik ki. Az alakzatok numerikus meghatározása szempontjából a geometria a legfontosabb tényező. Ezért az elmúlt évtizedekben a geometriai modellezés kutatására, a geometriai modellező rendszerek fejlesztésére a világ különböző országaiban kutatócsoportok alakultak.

1950-ben készült el az első számítógéppel vezérelt megjelenítő. Az 50-es években az interaktív számítógépes grafika még csekély haladást ért el. 1962 fordulópontot jelentett. Az 1960-as évek közepére már nagyszabású kutatóprogramok folytak a MIT-nál (Massachusetts Institute of Technology, Boston), a General Motors-nál, a Bell Telephone Laboratories-nál, valamint a Lockheed repülőgépgyárnál. Az úgynevezett szabad formájú (free form surfaces), vagy szoborszerű felületek (sculptured surfaces) legismertebb fajtái az approximációs felületek (pl. Bézier és B-spline felületek), valamint az interpoláló felületek (pl. Coons-foltok, Gordon felületek). Mindkét módszert az autótérvezés területén dolgozók fejlesztették ki. Az első módszer P. Bézier (Renault) és P. de Casteljau (Citroën) nevéhez fűződik, a másik megközelítés pedig S. A. Coons (Ford) és W. Gordon (General Motors) nevéhez.

Napjainkban már látványos eredményeket értek el a geometriai modellezés terén, ugyanakkor a tetszőleges bonyolultságú 3D-s objektumok geometriai modellezésének általános elméletét eddig csak részben sikerült kidolgozni. A gyakorlatban mindez azt jelenti, hogy a modellezési folyamatban a szerkesztési lehetőségek korlátozottak.

A háromdimenziós világunkban előforduló bonyolult alakú tárgyak megfelelő modellezésére és valósághű képi megjelenítésére a CAD-rendszerek (Computer Aided Design) spline-technikán alapuló matematikai módszereket használnak.

A spline-függvényeket a matematika különböző fejezetei más-más szempontból vizsgálják. E vizsgálatok a spline-függvények egzakt és absztrakt definiálásától az approximációelméleti vonatkozásokig minden területre kiterjednek.

A sokféle spline-függvényt a gyakorlati igények sokfélesége magyarázza. Hogy ténylegesen egy adott probléma megoldásánál melyik spline-függvényt kell használni, az számos egyéb körülmény mellett elsősorban magától a problémától függ.

Spline-görbének (ill. felületnek) nevezzük – szabadon fogalmazva – az intervallumonként azonos típusú függvényekkel leírt görbeívekből (ill. felületfoltokból) álló összetett görbét (felületet), amely ívek (felületdarabok) előírt csatlakozási feltételeknek tesznek eleget.

A görbék és felületek többféleképpen írhatók le. A számítógéppel segített tervezés számára a modelleket leíró spline-függvényeknek a paraméteres leírása a leggyakoribb. A görbék megadása egyparaméteres, a felületek megadása kétparaméteres vektorfüggvényekkel történik.

Az $\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$, $t \in [a, b] \subset \mathbf{R}$ vektor-skalár függvénnyel megadott pontok halmazát

(differenciálgeometriai értelemben) görbének nevezzük, ha az $\mathbf{r}(t)$ függvény:

- kölcsönösen egyértelmű és mindkét irányban folytonos (topológikus leképezés),
- t szerint folytonosan differenciálható,
- a differenciálhányados sehol sem tűnik el.

Megjegyzés A paraméteres felírásnak fizikai jelentés is tulajdonítható. Egy mozgó pont pályája megadható úgy, hogy minden t időpillanatban megadjuk az illető pontba mutató helyvektor koordinátáit. Így a mozgó pontba mutató $\mathbf{r}(t)$ vektor koordinátáinak t szerinti deriváltjaiból képzett vektor adja a mozgó pont sebességét, a második derivált vektor pedig a gyorsulását.

Az $\mathbf{R}(t, u) = \begin{bmatrix} X(t, u) \\ Y(t, u) \\ Z(t, u) \end{bmatrix}$, $[t, u] \in T \subset \mathbf{R}^2$ elemi felületfolton olyan kétparaméteres vektor-skalár függvény által meghatározott ponthalmazt értünk, ahol T a paramétersík egy egyszerűen összefüggő, korlátos zárt tartománya, és az $\mathbf{R}(t, u)$ függvény

- topológikus a paramétertartományon,
- a paramétertartomány minden pontjában legalább egyszer folytonosan differenciálható,
- a $\frac{\partial \mathbf{R}(t, u)}{\partial t}$ és $\frac{\partial \mathbf{R}(t, u)}{\partial u}$ vektorok a paramétertartománynak legfeljebb véges sok pontjában párhuzamosak.

Ha a két paraméter csak a $[0, 1]$ intervallumon változik, akkor az $\mathbf{R}(t, u)$ vektorfüggvény egy felületdarabot ír le, amely úgy tekinthető, mint a paramétersík $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnyezetének képe az $\mathbf{R}(t, u)$ függvény által definiált leképezés mellett.

A felületábrázolásnak jól bevált módszere a paramétervonalak hálózatának megrajzolása. A paramétervonalak, a $t = t_0$ és $u = u_0$ egyeneseknek az $\mathbf{R}(t, u)$ leképezéssel keletkező képei, olyan felületi görbék, amelyeknek egyparaméteres vektoregyenlete $\mathbf{R}(t_0, u)$, ill. $\mathbf{R}(t, u_0)$. Speciálisan a felületdarabot határoló görbék: az $\mathbf{R}(0, u)$, $\mathbf{R}(1, u)$ t paramétervonalak, és az $\mathbf{R}(t, 0)$, $\mathbf{R}(t, 1)$ u paramétervonalak.

Az analitikus leírási módnak többek között a következő előnyeit ismerjük:

- A matematikai leírás precíz, a görbe jellemző tulajdonságai (meredekség, görbület) könnyen kiszámíthatóak.
- A képlet teljes egészében tárolható a számítógépen.
- A görbe alakja könnyen változtatható.

Ebben a dolgozatban trigonometrikus, racionális és polinom súlyfüggvényekkel definiált spline-görbéket és felületeket mutatunk be görbe- és felületmodellezési problémákra.

A második fejezetben interpolációs pontokra illesztett görbét definiálunk trigonometrikusan súlyozott spline-ként, amelynek görbeveit köríveknek és egyenes szakaszoknak konvex kombinációja állítja elő aszerint, hogy három egymás után következő pont egy körön vagy egy egyenesen van. Az így definiált spline-görbe görbület-folytonos lesz, sőt a csatlakozópontoktól eltekintve végtelen sokszor differenciálható.

A trigonometrikus súlyfüggvényeket racionális súlyfüggvényekkel is helyettesíthetjük.

Alkalmazásként poligonok csúcsainak lekerekítésére mutatunk példát.

A harmadik fejezetben olyan általános eltolási felületet definiálunk, amelynek vezérgörbéje trigonometrikusan súlyozott spline, generáló görbéje pedig egy harmadfokú Bézier-görbe. A felületfoltokat tehát vegyes típusú, egyik irányban trigonometrikus, a másik irányban pedig polinomiális kétparaméteres vektorfüggvény írja le. A szomszédos foltok G^1 -rendben csatlakoznak egymáshoz.

További alkalmazást mutatunk a negyedik fejezetben két vezérgörbével definiált szabadon formált eltolási felület származtatására és az alaki paraméterek megválasztására.

Az ötödik fejezet két felület közti rész összekapcsolására olyan módszert mutat be, ahol a rész másik két oldalának határvonalát szabadon adjuk meg; valamint három, páronként egymást metsző felület közti lyuk kitöltésére olyan eljárást ad, amely a Coons-foltok elkészítésének egy kiterjesztése. Az adott felületek és görbék csatlakozásától függően, valamint a súlyfüggvények megválasztásával G^1 , C^1 és C^2 -folytonos csatlakozást értünk el.

A hatodik fejezetben – a tervezéstől kicsit elszakadva – elemezzük a kidolgozott algoritmusokat, és megvizsgáljuk azok ill. a számítás hatékonyságát.

2 Trigonometrikusan súlyozott interpolációs spline-görbe

A háromdimenziós E^3 euklideszi térben adott pontsorozaton áthaladó, azonos módon definiált ívekből összetett görbét készítünk úgy, hogy a görbe az ívek csatlakozási pontjaiban görbület-folytonos legyen. A görbeíveket az adott pontokon áthaladó köríveknek vagy egyenes szakaszoknak trigonometrikus súlyfüggvényekkel képezett kombinációjaként fogjuk leírni, ezért azt mondjuk, hogy az adott pontsorozatra trigonometrikusan súlyozott interpolációs spline-görbét illesztünk. A két szomszédos pont közötti görbeívre előírjuk, hogy egyenes szakaszt ill. körívet állítson elő abban az esetben, ha az adott pontsorozat négy egymás utáni eleme egy egyenesen ill. egy körön van.

2.1 Trigonometrikusan súlyozott interpolációs spline-görbe előállítás

Adott a $\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\} \subset E^3$ interpolációs pontok halmaza.

Keresünk egy olyan, trigonometrikus ívekből álló görbület-folytonos görbét, amely áthalad az adott pontokon, és visszaadja a körívet és az egyenes szakaszt, ha azokon legalább négy interpolációs pontot választunk.

A görbét a következő algoritmussal állítjuk elő [32, 39]:

1. lépés: Az első kettő és az utolsó két pont közötti görbeívek definiálása végett kiegészítjük a pontsorozatot a P_0 és P_{n+1} pontokkal (lásd 2.2).

2. lépés: Elkészítjük az i -edik görbeívet ($i = 1, \dots, n-1$):

— határozzunk meg egy kört vagy egyenest a P_{i-1}, P_i és P_{i+1} pontokon keresztül, és ennek a P_i és P_{i+1} közötti darabja legyen $\text{ív}[i]^{\text{bal}}$.

— határozzunk meg egy kört vagy egyenest a P_i, P_{i+1} és P_{i+2} pontokon keresztül, és ennek a P_i és P_{i+1} közötti darabja legyen $\text{ív}[i]^{\text{jobb}}$.

Az $\text{ív}[i]^{\text{bal}}$ és $\text{ív}[i]^{\text{jobb}}$ görbeíveket paraméteres vektoregyenlettel adjuk meg a $[0, 1]$ intervallum felett. Az egyenes szakaszt az

$$(1-t) \cdot \mathbf{p}_i + t \cdot \mathbf{p}_{i+1} \quad t \in [0, 1],$$

vektorfüggvénnyel írjuk le, ahol \mathbf{p}_i a P_i pont, \mathbf{p}_{i+1} a P_{i+1} pont helyvektorát jelöli.

A körívet, amelynek középpontja C és középponti szöge $\alpha_i := \angle(P_i, C, P_{i+1})$, a

$$\mathbf{c} + \mathbf{R}_i(t) \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{c}) \quad t \in [0, 1]$$

függvénnyel írjuk le, ahol \mathbf{c} a középpont helyvektora,

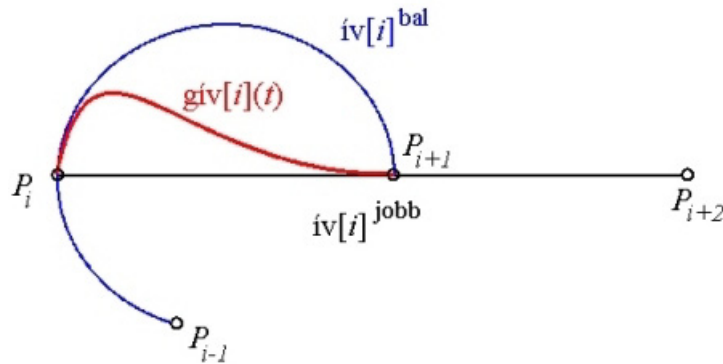
$$\mathbf{R}_i(t) = \begin{pmatrix} \cos(t\alpha_i) & -\sin(t\alpha_i) & 0 \\ \sin(t\alpha_i) & \cos(t\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pedig a térbeli forgatás mátrixa a kör síkjában α_i szögsebességgel egy megfelelő koordináta-rendszerben.

— képezzük az $\text{ív}[i]^{\text{bal}}(t)$ és $\text{ív}[i]^{\text{jobb}}(t)$ görbék konvex kombinációját úgy, hogy az eredményül kapott görbe olyan legyen P_i és P_{i+1} között, hogy a P_i ponthoz közel az $\text{ív}[i]^{\text{bal}}(t)$ -re, a P_{i+1} környezetében pedig $\text{ív}[i]^{\text{jobb}}(t)$ -re hasonlítson:

$$\text{gív}[i](t) := \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{ív}[i]^{\text{bal}}(t) + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{ív}[i]^{\text{jobb}}(t), \quad (2.1)$$

$$t \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n-1.$$

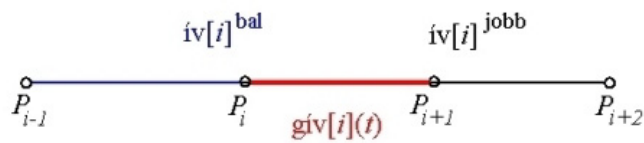


1. ábra: Az i -edik görbeív

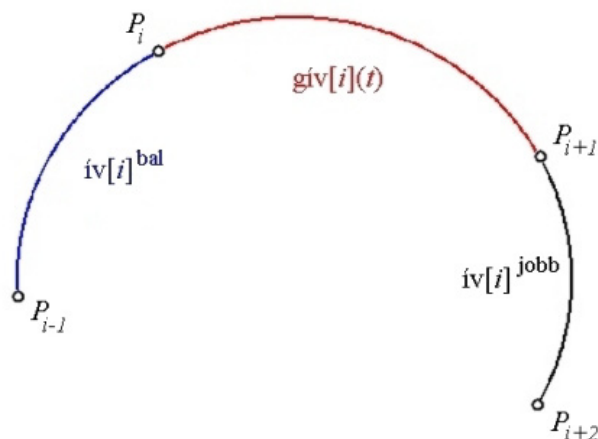
3. lépés: Az ilyen módon meghatározott görbeívek uniója a kívánt interpolációs görbe.

Megjegyzés Ez a görbe lokálisan módosítható, azaz alakja csak az elmozdított pont valamely jól meghatározható környezetében változik.

Megjegyzés Az előállításból következik, hogy ha a P_{i-1} , P_i , P_{i+1} , és P_{i+2} pontok egy egyenesen vannak, akkor a P_i és P_{i+1} pontok közötti görbeív egyenes szakasz, illetve ha a P_{i-1} , P_i , P_{i+1} , és P_{i+2} pontok egy körön vannak, akkor a P_i és P_{i+1} pontok közötti görbedarab körív. (Polinomiális spline-görbével sohasem hozható létre körív, csak közelítően állítható elő.)



2. ábra: Az i -edik görbeív egyenes szakasz



3. ábra: Az i -edik görbedarab körív

2. 1. 1. tétel *A fenti (2.1) képlettel készített trigonometrikusan súlyozott spline-görbe ívei görbület-folytonosan csatlakoznak egymáshoz.*

Bizonyítás A görbületet az $(i-1)$ -edik görbeív $gív[i-1](t)$ és az i -edik görbedarab $gív[i](\tau)$ ($i = 2, \dots, n-1$) $t = 1$, ill. $\tau = 0$ csatlakozó pontjában vizsgáljuk.

Tekintsük (2.1) deriváltjait:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} gív[i-1](t) &= -\frac{\pi}{2} \cdot \sin(t \cdot \pi) \cdot ív[i-1]^{bal}(t) + \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{d}{dt} ív[i-1]^{bal}(t) + \\ &+ \frac{\pi}{2} \cdot \sin(t \cdot \pi) \cdot ív[i-1]^{jobb}(t) + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{d}{dt} ív[i-1]^{jobb}(t) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} gív[i](\tau) &= -\frac{\pi}{2} \cdot \sin(\tau \cdot \pi) \cdot ív[i]^{bal}(\tau) + \cos^2\left(\tau \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{d}{d\tau} ív[i]^{bal}(\tau) + \\ &+ \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\tau \cdot \pi) \cdot ív[i]^{jobb}(\tau) + \sin^2\left(\tau \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{d}{d\tau} ív[i]^{jobb}(\tau) \\ t, \tau &\in [0, 1], \quad i = 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

A csatlakozási pontban

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} gív[i-1](1) &= \frac{d}{dt} ív[i-1]^{jobb}(1), \\ \frac{d}{d\tau} gív[i](0) &= \frac{d}{d\tau} ív[i]^{bal}(0) \end{aligned}$$

adódik. Hasonlóan a második deriváltakra

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} gív[i-1](1) &= \frac{d^2}{dt^2} ív[i-1]^{jobb}(1) \\ \frac{d^2}{d\tau^2} gív[i](0) &= \frac{d^2}{d\tau^2} ív[i]^{bal}(0) \end{aligned}$$

teljesül.

Az $ív[i-1]^{jobb}(t)$ és az $ív[i]^{bal}(\tau)$ görbék ($i = 2, \dots, n-1$) a P_{i-1} , P_i és P_{i+1} pontokon áthaladó csatlakozó $\widehat{P_{i-1}P_i}$ és $\widehat{P_iP_{i+1}}$ azonos sugarú körívek illetve egyenes szakaszok definiálják.

A P_{i-1} , P_i és P_{i+1} pontokon áthaladó ívnek a P_{i-1} , és P_i közé eső darabja $ív[i-1]^{jobb}(t)$, a P_i és P_{i+1} pontok közé eső darabja pedig $ív[i]^{bal}(\tau)$. Bár mindkettő paramétertartománya a $[0, 1]$ intervallum, a két ívhossz általában különböző. Ennek megfelelően $\tau = \lambda \cdot t$, ($\lambda > 0$). Vegyük észre, hogy a fenti első deriváltak az ívhosszakkal fordítottan arányosak:

$$\frac{d}{dt} \text{ív}[i-1]^{\text{jobb}}(1) : \frac{d}{dt} \text{ív}[i]^{\text{bal}}(0) = \widehat{P_i P_{i+1}} : \widehat{P_{i-1} P_i}.$$

A fenti második deriváltak pedig az ívhosszak négyzetével fordítottan arányosak. Tehát a két görbe P_i pontbeli érintője párhuzamos, a görbületei pedig megegyeznek, összhangban az ívhossz és a görbület szokásos képleteivel [32]. \square

Megjegyzés Az (2.1) képlettel adott trigonometrikusan súlyozott görbévek a csatlakozási pontoktól különböző pontokban végtelen sokszor differenciálhatók.

Megjegyzés A körívek és egyenes szakaszok lineáris kombinációjával készített görbévek csak érintő-folytonosan csatlakoznak egymáshoz [47].

2.2 Peremfeltételek

Az interpolációs görbe $n-1$ görbeiből áll, és minden ív a két végpontjával és még két szomszédos ponttal meghatározott, átfedő egyenes ill. kör konvex kombinációja. Emiatt az első és utolsó görbeív definíciója megkívánja a pontsor kibővítését. A P_0 és P_{n+1} pontok megválasztása különböző peremfeltételeknek megfelelően történhet [32].

a) Természetes peremfeltétel

A kezdő- illetve a végpontban a görbe görbülete nulla.

Ekkor

$$\mathbf{p}_0 := \mathbf{p}_1 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2),$$

$$\mathbf{p}_{n+1} := \mathbf{p}_n + (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}),$$

ahol \mathbf{p}_i a P_i pont helyvektorát jelöli.

A 25. ábrán a kezdő- és végpontot a természetes peremfeltételt alkalmazva adtuk meg.

b) Periodikus peremfeltétel

Ilyen esetben $P_1 = P_n$. Legyenek

$$P_0 := P_{n-1},$$

$$P_{n+1} := P_2.$$

A 19. ábrán a két vezérgörbét a periodikus peremfeltételt felhasználva határoztuk meg.

c) *Körív szerinti peremfeltétel*

Mivel a 2.1 fejezetben definiált görbe egy körön elhelyezkedő négy pont esetén körívet ad vissza, a P_0 ill. P_{n+1} pontokat az első három ill. az utolsó három pont által meghatározott körön vesszük fel.

Ha a P_1, P_2, P_3 pontokon átmenő kör középpontját C -vel, a $\overrightarrow{CP_1}$ és $\overrightarrow{CP_2}$ vektorok által bezárt szöget pedig φ -vel jelöljük, akkor a P_0 pontot

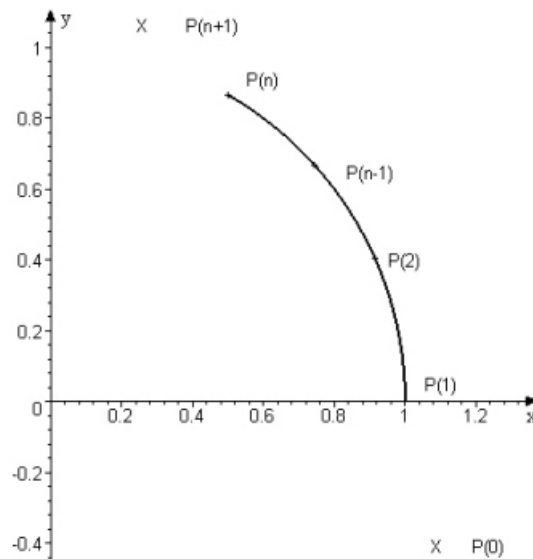
$$\mathbf{p}_0 := \mathbf{c} + 2 \cdot \cos \varphi \cdot \overrightarrow{CP_1} - \overrightarrow{CP_2}$$

összefüggéssel határozzuk meg.

A P_{n+1} pontot pedig a

$$\mathbf{p}_{n+1} := \mathbf{k} + 2 \cdot \cos \delta \cdot \overrightarrow{KP_n} - \overrightarrow{KP_{n-1}}$$

képlettel, ahol K a P_n, P_{n-1}, P_{n-2} pontok köré írt kör középpontja, δ pedig a $\overrightarrow{KP_{n-1}}$ és $\overrightarrow{KP_n}$ vektorok által bezárt szög. (A pontok helyvektorát a megfelelő kisbetűvel jelöltük.)

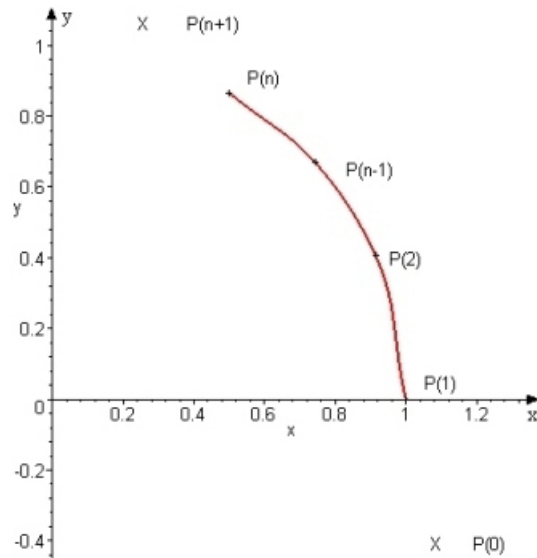


4. ábra: Köríven választott interpolációs pontok

A 4. ábrán egy körívet és azon adott interpolációs pontokat látunk. A P_0 és P_{n+1} pontokat a természetes peremfeltételt felhasználva vettük fel.

Az 5. ábrán jól látható, hogy a P_1 és P_2 pontok között a konvex kombináció után létrejött trigonometrikusan súlyozott spline-görbe görbülete eltér az eredeti görbéétől, mert a P_0, P_1 és

P_2 pontokon átmenő egyenes „kiegyenesítette” a görbét. Ugyanez figyelhető meg a P_{n-1} és P_n pontok között is.



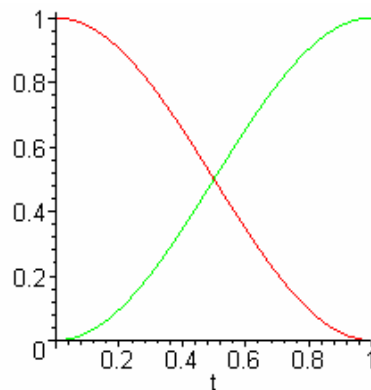
5. ábra: Adott pontokra illesztett interpolációs görbe

2.3 Súlyfüggvények és paraméterezés

A trigonometrikus ívekből álló görbület-folytonos görbe előállításához trigonometrikus súlyfüggvényeket használtunk:

$$\mu(t) = \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{és}$$

$$1 - \mu(t) = \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$



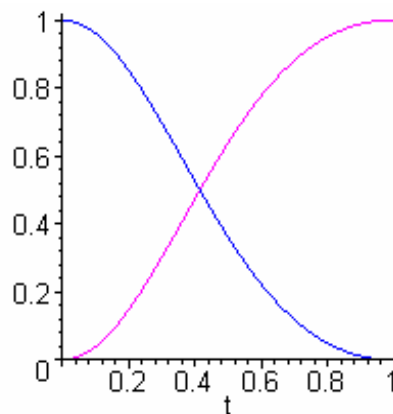
6. ábra: Trigonometrikus súlyfüggvények

A gyakorlatban azonban legtöbbször polinomokat vagy racionális törtfüggvényeket alkalmaznak súlyfüggvényekként. Ennek praktikus okai vannak: könnyen lehet számolni velük, számítógépen könnyen tárolhatók. Polinom esetén a deriváltja, integrálja is egy-egy polinom, amelyeknek együtthatóit algebrai úton egyszerűen ki lehet számolni.

Ha a $t \cdot \frac{\pi}{2}$ radiánban adott szöveget φ -vel jelöljük, akkor a trigonometriából ismert $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ -es helyettesítéssel áttérhetünk racionális törtfüggvény alakú súlyfüggvényekre [37]:

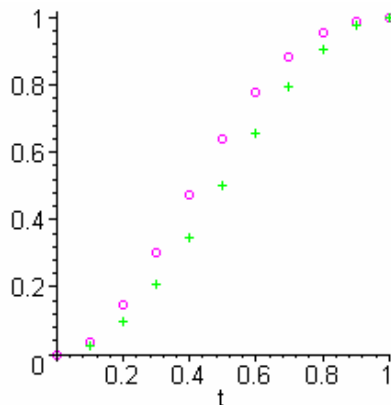
$$\mu(t) = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \quad \text{és}$$

$$1 - \mu(t) = \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

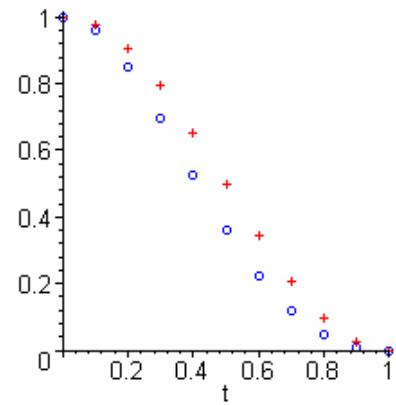


7. ábra: Racionális súlyfüggvények

Első pillanatban a két súlyfüggvény-pár azonosnak látszik, a különbséget akkor érzékeljük, ha azonos koordináta-rendszerben ábrázoljuk őket. (A $[0; 1]$ intervallum 10 egyenlő részre való osztásával határoztuk meg a pontokat.)

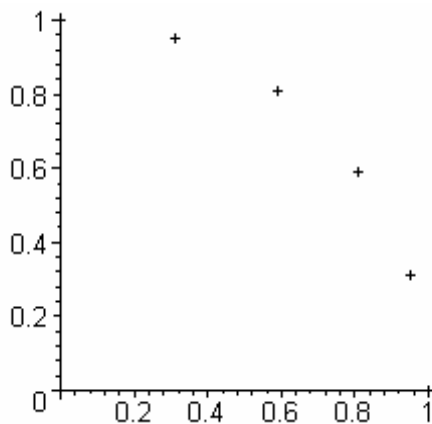


8. ábra: $\mu(t)$ trigonometrikus és racionális alakban

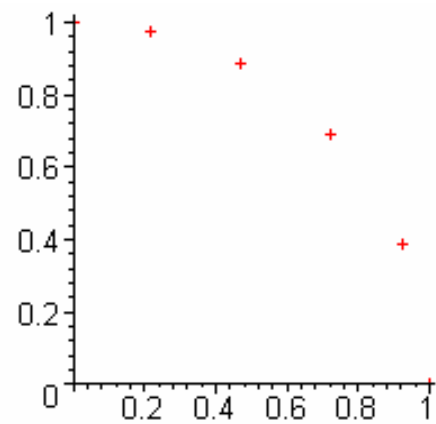


9. ábra: $1 - \mu(t)$ trigonometrikus és racionális alakban

Hogy a görbére nézve ez milyen különbséget jelent, megvizsgálhatjuk, ha kétféleképpen ábrázoljuk az első síknegyedbe eső egységsugarú negyed körív 6 pontját a $[0; 1]$ intervallum 5 egyenlő részre osztása esetén.



10. ábra: $x = \cos\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, $y = \sin\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right)$



11. ábra: $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$

A 10. ábrán a t értékek egyenlő lépésközű változtatásával kapott pontok a köríven is egyenlő távolságra lesznek. Hátránya ennek a paraméterezésnek, hogy a trigonometrikus függvényértékek számolása a gépi számítást lelassítja, valamint a számolás a 0° közelében instabil.

A 11. ábrán t egyenletes változtatásával kapott pontok nem lesznek azonos távolságra egymástól, viszont a paraméterezés nagyon kevés gépidőt igényel. (lásd Függelék 3)

Kompromisszumot kell kötni!

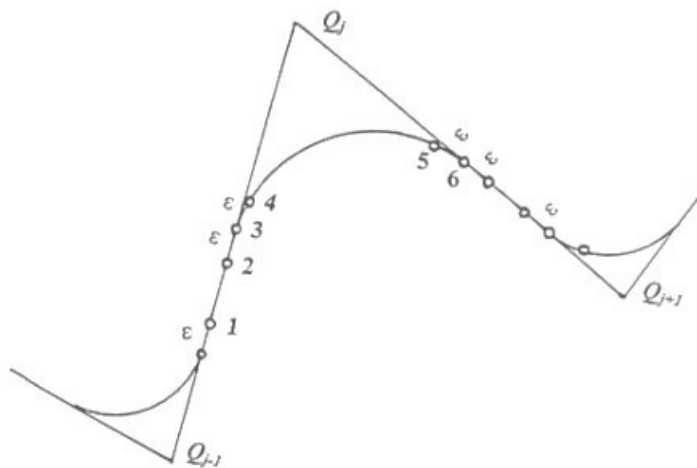
Tudjuk, hogy alkalmas paraméterezés megválasztásával javítható a számított pontok görbe menti eloszlása, így a görbéről jobb, egyenletesebb grafika nyerhető. A számításokat mi racionális paraméterezéssel végezzük el a gyakorlatban legtöbbször alkalmazott ún. normált tartomány választása mellett: $0 \leq t \leq 1$, de az elméleti tárgyalásban a trigonometrikus függvények és deriváltjaik áttekinthetőbbek. Mivel a kétféle paraméterezéssel ugyanazokat a görbéket és felületeket állítjuk elő, és a deriváltak a perempontokban ugyanazokat az értékeket adják, a csatlakozási viszonyokra vonatkozó tételeket a trigonometrikus alakban adott súlyfüggvényekkel bizonyítjuk.

2.4 Alkalmazás

Tekintsünk egy példát a trigonometrikusan súlyozott interpolációs spline-görbe gyakorlati alkalmazására. Egy poligon csúcsait kerekítjük le adott sugarú körívekkel.

Adott a poligon a csúcspontjaival: $\{ Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n \}$ és a lekerekítési körök r_i ($i = 2, \dots, n - 1$) sugara.

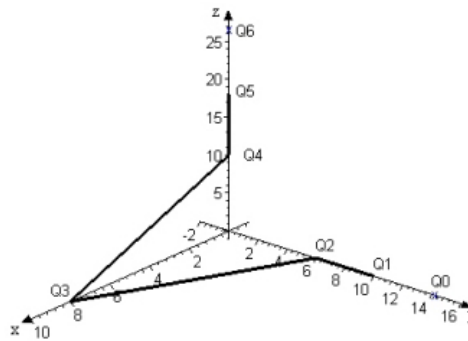
Az adott törött vonal mentén felvesszük az interpolációs pontokat, amelyek a lekerekítő köríveknek a poligon oldalain lévő érintési pontjai, és azoktól adott, elég kicsi ε távolságra mindkét irányban további egy-egy pontot a köríven és a poligon oldalán. (12. ábra)



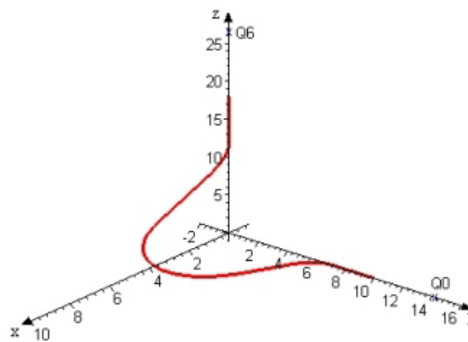
12. ábra: Az interpolációs pontok felvétele

Legyen $S := \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_k\} \subset \mathbf{E}^3$ ($k = (n - 2) \cdot 6 + 2$) az interpolációs pontok sorozata, amely a spline-görbe meghatározó adata. Ebben az esetben a Q_1 és Q_n pontoknál nincs csúcs, ezeket nem kell lekerekíteni, így a természetes peremfeltételt használhatjuk. A P_k pontokra alkalmazzuk az előzőekben leírt eljárást, és létrehozuk a $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$ pontokon átmenő trigonometrikusan súlyozott spline-függvényt. Ez a görbe egy érintőlegesen csatlakozó körív és egyenes szakasz párost négy görbeívvel helyettesít. Nevezetesen az ε távolsággal mindkét végén megrövidített körív és egyenes szakasz között két görbület-folytonosan csatlakozó átmeneti görbeívet tartalmaz.

A 13. ábrán a poligont, az 14. ábrán a lekerekítéssel kapott görbét látjuk.



13. ábra: Térbeli poligon



14. ábra: A csúcsoknál lekerekített poligon

3 Vegyes típusú felületfoltokból álló eltolási felület

Felületet definiálhatunk görbesereggel is:

$$\mathbf{R}(t, u) = \mathbf{g}(t) \otimes \mathbf{b}(u), \quad t \in [t_0, t_1], \quad u \in [u_0, u_1],$$

ahol $\mathbf{g}(t)$ a vezérgörbe, amely mentén a $\mathbf{b}(u)$ generáló (vagy leíró) görbét mozgatjuk. Az így kapott felület nem más, mint egy egyparaméteres – az u paramétertől függő – görbesereg által súrolt felület (angol neve: sweeping). A görbe mentén való eltolás többféleképpen történhet.

- A generáló görbét önmagával párhuzamosan toljuk el, azaz a generáló görbe orientációja a görbék definiálásánál használt koordináta-rendszerhez képest változatlan.

Ekkor a felület felírható:

$$\mathbf{R}(t, u) = \mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(t_0) + \mathbf{b}(u), \quad t \in [t_0, t_1], \quad u \in [u_0, u_1],$$

alakban. Az ilyen felület twist-vektora bármely pontban a nullvektor, ugyanis:

$$\frac{\partial}{\partial t \partial u} (\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(t_0) + \mathbf{b}(u)) = \mathbf{0}.$$

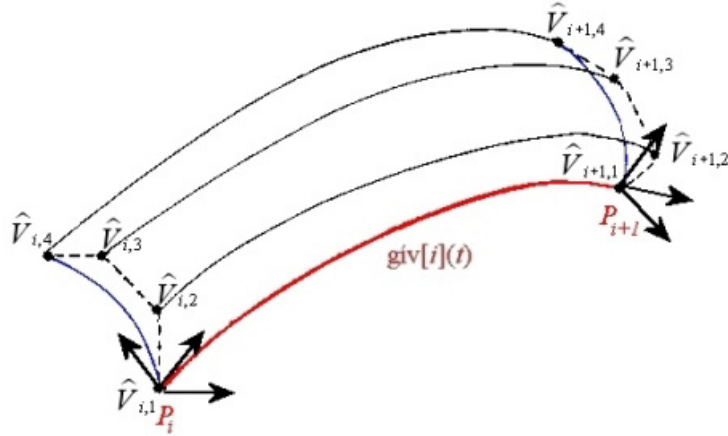
Ezeket a translációs felületeknek nevezik.

- A leíró görbe térbeli helyzete a vezérgörbe mentén való eltolás közben változik (pl. forgatva eltolás).
- Mozgatás közben a leíró görbe alakja is változhat. A leíró görbének ezt a fajta mozgatását és egyidejű deformálását homotópikus eltolásnak nevezhetjük, mivel bármely két leíró görbe egymással homotóp. A keletkező felületre klasszikus geometriai elnevezés nincs, lehetne pl. kígyófelületnek vagy szabadon formált eltolási felületnek nevezni. (lásd alább).

A 2. pontban előállított trigonometrikusan súlyozott spline legyen a felület vezérgörbéje. Generáló görbeként négy kontrollponttal adott Bézier-görbét választunk, és a vezérgörbe mentén „mozgatjuk”.

A görbeívek csatlakozási pontjaiban elhelyezzük a Bézier-görbe kontrollpoligonját. Ennek a térbeli helyzetét szabadon választhatjuk meg. Mivel a vezérgörbe általában nem síkgörbe, a kontrollpoligon alkalmas pozicionálásához a végpontokhoz lokális koordináta-rendszerként a pontbeli kísérő triédert rendeljük. Kiindulásként tekintjük a vezérgörbe kezdőpontjában megadott kontrollpoligon csúcsait és azok koordinátáit a kezdőpontban felvett loká-

lis koordináta-rendszerben. Feltehetjük, hogy a kísérő triéder a vezérgörbe íveinek kezdő- és végpontjában is létezik.



15. ábra: Kontrollpoligon szerkesztése egy vezérgörbe esetén

Legyen V_k ($k = 1, \dots, 4$) a Bézier-görbe négy alappontja. Egy koordináta-rendszer transzformációval a V_I pontot a vezérgörbe P_i interpolációs pontjába, a $gív[i](t)$ görbe $P_i := gív[i](0)$ pontjában vett kísérő triédere által meghatározott koordináta-rendszerbe helyezzük, legyen ez $\hat{V}_{i,1}$. Ugyanez a transzformáció meghatározza a másik három alappontot, és ezáltal a köbös Bézier-görbe kezdőpontja is a görbeív kezdőpontjába kerül. (A 16. ábrán a vezérgörbe és fekete vonallal a kontrollpoligon látható.) Hasonlóképpen helyezzük el a kontrollpoligont a $gív[i](t)$ ív $P_{i+1} := gív[i](1)$ végpontjához tartozó kísérő triéder koordináta-rendszerébe is, ez a $\hat{V}_{i+1,1}$ ponttal kapcsolódik a vezérgörbe P_{i+1} pontjához. A görbeív közbülső pontjaiban a kontrollpoligon csúcspontjait a két végpontjához rendelt $\hat{V}_{i,k}$ és $\hat{V}_{i+1,k}$ ($k = 1, \dots, 4$) pontokból készített konvex kombinációval definiáljuk [32, 39]:

$$V_{i,1}(t) = gív[i](t)$$

$$V_{i,k}(t) = \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i,k} + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i+1,k} + gív[i](t), \quad (3.1)$$

$$t \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n-1, \quad k = 2, 3, 4.$$

A fenti szerkesztést minden görbévre ($i = 1, \dots, n-1$) elvégezzük. Ezáltal a köbös Bézier-görbe kontrollpoligonját végigvisszük a trigonometrikusan súlyozott spline vezérgörbén, majd minden pontban elkészítjük a Bézier-görbét. Az eltolási felületet így vegyes típusú, egyik irányban trigonometrikus, másik irányban pedig polinomiális kétparaméteres vektorfüggvény írja le:

$$\mathbf{R}_i(t, u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{i,1}(t) \\ V_{i,2}(t) \\ V_{i,3}(t) \\ V_{i,4}(t) \end{bmatrix} =$$

$$= [B_{03}(u) \ B_{13}(u) \ B_{23}(u) \ B_{33}(u)] \cdot [V_{i,1}(t) \ V_{i,2}(t) \ V_{i,3}(t) \ V_{i,4}(t)]^T,$$

$$t, u \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.2)$$

ahol $B_{j3}(u)$ ($j = 0, \dots, 3$) súlyfüggvények a Bernstein alappolinomok, amelyek a harmadfokú polinomtér bázisát alkotják.

3. 1. tétel *A fent definiált (3.2) $\mathbf{R}_i(t, u)$ felületfoltok normális-folytonosan kapcsolódnak egymáshoz, vagyis az érintő sík az egyik felület darabról a másikra való átlépéskor folytonosan változik.*

Bizonyítás Mivel két szomszédos felület darab egyik irányban egy harmadfokú Bézier-görbe mentén csatlakozik, amely C^2 -folytonos, elegendő megmutatni, hogy a másik paraméter irányában a trigonometrikus paramétervonalak G^1 , azaz érintő-folytonosak.

Ezt a Bézier-kontrollpontok pályagörbéinek érintő-folytonosságával igazoljuk.

Tekintsük a k -adik ($k = 1, \dots, 4$) kontrollpont pályagörbét, és vizsgáljuk a (3.1) vektorfüggvény ($i-1$)-edik és i -edik görbéjét:

$$V_{i-1,k}(t) = \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i-1,k} + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i,k} + \text{gív}[i-1](t)$$

$$t \in [0, 1]$$

$$V_{i,k}(\tau) = \cos^2\left(\tau \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i,k} + \sin^2\left(\tau \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i+1,k} + \text{gív}[i](\tau)$$

$$\tau \in [0, 1]$$

$$i = 1, \dots, n-1, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Ezek deriváltjai:

$$\frac{d}{dt} V_{i-1,k}(t) = -\sin\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \hat{V}_{i-1,k} + \sin\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \hat{V}_{i,k} + \frac{d}{dt} \text{gív}[i-1](t)$$

$$\frac{d}{d\tau} V_{i,k}(\tau) = -\sin(\tau \cdot \pi) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \hat{V}_{i,k} + \sin(\tau \cdot \pi) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \hat{V}_{i+1,k} + \frac{d}{d\tau} \text{gív}[i](\tau)$$

$$t \in [0, 1], \quad \tau \in [0, 1].$$

A szomszédos szegmensek csatlakozási pontjában:

$$\frac{d}{dt} V_{i-1,k}(1) = \frac{d}{dt} \text{gív}[i-1](1)$$

$$\frac{d}{d\tau} V_{i,k}(0) = \frac{d}{d\tau} \text{gív}[i](0)$$

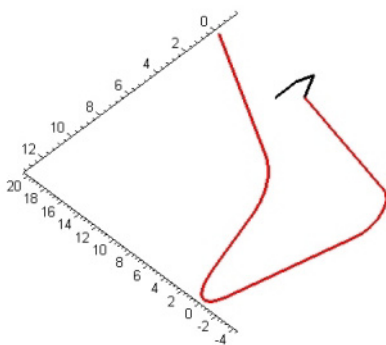
adódik. Ezek az érintő vektorok párhuzamosak és egyirányúak, ahogy azt a 2.1.1. tételben bizonyítottuk.

Tehát a Bézier-kontrollpontok pályagörbéi érintő-folytonosak. \square

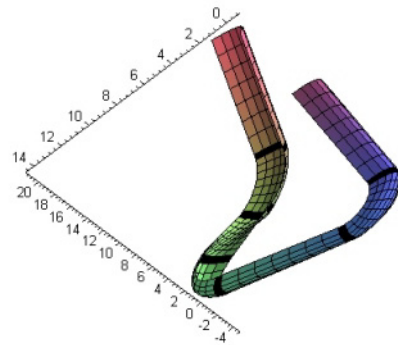
Megjegyzés Amennyiben a vezérgörbe poligon lekerekítésével származott trigonometrikusan súlyozott interpolációs spline, akkor egyenes szakaszokat is tartalmaz. Az egyenes szakaszokhoz viszont mindkét végpontban átmeneti görbeívek csatlakoznak. Végül tehát a görbe minden csatlakozási pontjában létezik a kíséző triéder, ezért a fenti felületgenerálás elvégezhető.

Megjegyzés A $\frac{\partial \mathbf{R}_i(t,u)}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{R}_i(t,u)}{\partial u} \neq \mathbf{0}$ feltétel tetszőleges geometriai bemenő adatokra általában nem teljesül, az ilyen szingularitások elkerülése a tervezési folyamatban interaktívan megoldható.

A 17. ábrán egy ilyen vegyes típusú felületfoltokból álló eltolási felületet látunk.



16. ábra: A vezérgörbe és a generáló görbe kontrollpoligonja



17. ábra: Az eltolási felület

4 Két vezérgörbével definiált általánosított eltolási felület

4.1 Két vezérgörbével és egy generáló görbével definiált felületek

Legyen a $P_{1,i}$ ($i = 1, \dots, n$) interpolációs pontokon átmenő trigonometrikusan súlyozott spline-görbe $gív(t)$, és a $P_{2,i}$ ($i = 1, \dots, n$) pontokat interpoláló görbe $cív(t)$, ($t \in [0, 1]$) a két vezérgörbe. (19. 22. 25. és 28. ábra) A generáló görbe a V_k ($k = 1, \dots, 4$) kontrollpontokkal adott Bézier-görbe.

Az i -edik ($i = 1, \dots, n - 1$) görbeívekhez tartozó kontrollpoligont a következőképpen kapjuk:

- a V_1 kontrollpontot a $gív[i](t)$ görbe $gív[i](0)$ pontjába helyezzük az ezen ponthoz tartozó kísérő triéder koordináta-rendszerében, így $\hat{V}_{i,1}$ adódik. Ugyanez a transzformáció a V_2 alappontot a $\hat{V}_{i,2}$ pontba viszi szintén a $gív[i](0)$ ponthoz tartozó kísérő triéder koordináta-rendszerében.
- A V_4 kontrollpontot a $cív[i](t)$ görbe kezdőpontjába helyezzük, a ponthoz tartozó kísérő triéder koordináta-rendszerébe való transzformálással: $\hat{V}_{i,4}$ adódik, majd ugyanebben a koordináta-rendszerben $\hat{V}_{i,3}$ -t is kiszámítjuk.
- Így a görbeívek elején létrehozuk a $\hat{V}_{i,k}$ ($k = 1, \dots, 4$) pontokkal adott kontrollpoligont. (18. ábra)
- Ezt a ívek végén is elvégezzük, s a $\hat{V}_{i+1,k}$ ($k = 1, \dots, 4$) kontrollpontokat kapjuk.
- A görbeívek közbülső pontjaiban a kontrollpoligont a következőképpen definiáljuk [32]:

$$V_{i,1}(t) = gív[i](t)$$

$$V_{i,2}(t) = \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i,2} + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i+1,2} + gív[i](t)$$

$$V_{i,3}(t) = \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i,3} + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i+1,3} + cív[i](t)$$

$$V_{i,4}(t) = cív[i](t)$$

$$t \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

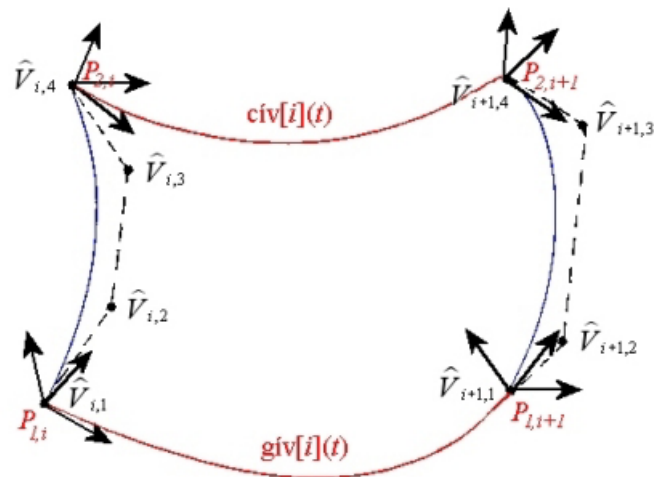
Ezzel az eljárással a $\hat{V}_{i,1}$ a $gív[i](t)$ görbén, a $\hat{V}_{i,4}$ pont a $cív[i](t)$ görbén „csúszik”.

A generált harmadfokú Bézier-görbék halmaza lesz a definiált felület egyik paraméter vonalserege, és a trigonometrikusan súlyozott spline-görbék alkotják a másik paraméter vonalsereget. Ezen szabadon formált eltolási felületfoltokat is az

$$\mathbf{R}_i(t, u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{i,1}(t) \\ V_{i,2}(t) \\ V_{i,3}(t) \\ V_{i,4}(t) \end{bmatrix}$$

$$i = 1, \dots, n-1, \quad (t, u) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

kétparaméteres vektorfüggvény írja le.



18. ábra: Kontrollpoligon szerkesztése két vezérgörbe között

4. 1. 1. tétel *A Bézier-görbék kontrollpontjainak pályagörbéi érintő-folytonosan csatlakozó görbeívekből állnak.*

Bizonyítás Mivel a $\hat{V}_{i,1}$ a $gív[i](t)$ görbén, a $\hat{V}_{i,4}$ pont pedig a $cív[i](t)$ görbén „csúszik”, ezen görbék pedig görbület-folytonosan csatlakozó ívekből állnak, ezért ezen két pont pályagörbéjének érintő-folytonosságát nem kell bizonyítani.

A $\hat{V}_{i,2}$ és $\hat{V}_{i,3}$ kontrollpontok pályagörbéinek vizsgálatához tekintsük mindkét pályagörbét leíró vektorfüggvényt ($i-1$)-edik és i -edik ívét:

$$\begin{aligned} V_{i-1,2}(t) &= \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i-1,2} + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i,2} + \text{gív}[i-1](t) \\ & \quad t \in [0, 1] \\ V_{i,2}(\tau) &= \cos^2\left(\tau \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i,2} + \sin^2\left(\tau \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i+1,2} + \text{gív}[i](\tau) \\ & \quad \tau \in [0, 1] \\ & \quad i = 2, \dots, n-1; \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} V_{i-1,3}(t) &= \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i-1,3} + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i,3} + \text{cív}[i-1](t) \\ & \quad t \in [0, 1] \\ V_{i,3}(\tau) &= \cos^2\left(\tau \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i,3} + \sin^2\left(\tau \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{V}_{i+1,3} + \text{cív}[i](\tau) \\ & \quad \tau \in [0, 1] \\ & \quad i = 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Ezek deriváltjai:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_{i-1,2}(t) &= -\sin\left(t \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \hat{V}_{i-1,2} + \sin\left(t \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \hat{V}_{i,2} + \frac{d}{dt} \text{gív}[i-1](t) \\ \frac{d}{d\tau} V_{i,2}(\tau) &= -\sin\left(\tau \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \hat{V}_{i,2} + \sin\left(\tau \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \hat{V}_{i+1,2} + \frac{d}{d\tau} \text{gív}[i](\tau) \\ & \quad t \in [0, 1], \quad \tau \in [0, 1]; \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_{i-1,3}(t) &= -\sin\left(t \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \hat{V}_{i-1,3} + \sin\left(t \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \hat{V}_{i,3} + \frac{d}{dt} \text{cív}[i-1](t) \\ \frac{d}{d\tau} V_{i,3}(\tau) &= -\sin\left(\tau \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \hat{V}_{i,3} + \sin\left(\tau \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \hat{V}_{i+1,3} + \frac{d}{d\tau} \text{cív}[i](\tau) \\ & \quad t \in [0, 1], \quad \tau \in [0, 1]. \end{aligned}$$

A szomszédos pályáívek csatlakozási pontjában:

$$\frac{d}{dt} V_{i-1,2}(1) = \frac{d}{dt} \text{gív}[i-1](1), \quad \frac{d}{d\tau} V_{i,2}(0) = \frac{d}{d\tau} \text{gív}[i](0),$$

valamint

$$\frac{d}{dt} V_{i-1,3}(1) = \frac{d}{dt} \text{cív}[i-1](1), \quad \frac{d}{d\tau} V_{i,3}(0) = \frac{d}{d\tau} \text{cív}[i](0).$$

Mindkét esetben az érintő vektorok párhuzamosak és egyirányúak, ahogy azt a 2.1.1. tételben bizonyítottuk. Tehát a Bézier-kontrollpontok pályagörbéi érintő-folytonosak. \square

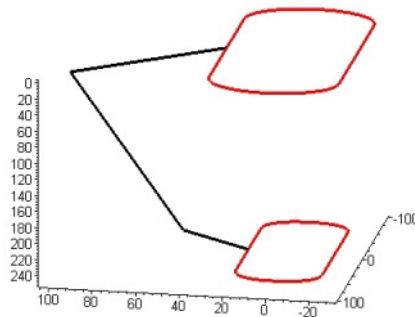
Így az $\mathbf{R}_i(t, u)$ ($i = 1, \dots, n-1$; $(t, u) \in [0, 1] \times [0, 1]$) felületfoltokból összetett felület t paramétervonalai is G^1 -folytonosak, tehát a felületfoltok normális folytonosan csatlakoznak egymáshoz. Ez azt jelenti, hogy a szomszédos felületfoltok felületi normálisai a csatlakozó görbe pontjaiban párhuzamosak és egyirányúak. Ilyenkor valamely felületi görbe mentén haladva az egyik felület darabról a másikra való átlépéskor az érintő sík folytonosan változik. Ekkor azt mondjuk, hogy a felület sima.

A 19. ábrán két olyan vezérgörbét láthatunk, amelyeket a periodikus peremfeltételt felhasználva állítottunk elő. A fekete színnel jelölt kontrollpoligont a görbék „kezdőpontjaiba” helyeztük. A 20. és 21. ábrákon az ezekhez tartozó felületet ábrázoltuk kétféle nézetben.

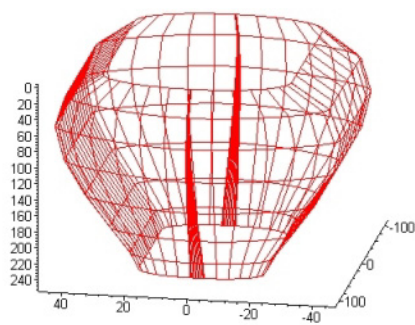
A 22. ábra két olyan vezérgörbét szemléltet, amelyeket két egymással párhuzamos síkban levő egy-egy csúcsnál lekerekített poligonból nyertünk. Ezeket a vezérgörbéket a természetes peremfeltételt felhasználva kaptuk. A 23. és 24. ábrákon az ezekhez tartozó felületek láthatók.

A 25. ábrán levő vezérgörbék szintén két egy-egy csúcánál lekerekített poligonból születtek, de nem párhuzamos síkban helyezkednek el. Az ezekhez tartozó szabadon formált eltolási felületet a 26. és 27. ábrák mutatják.

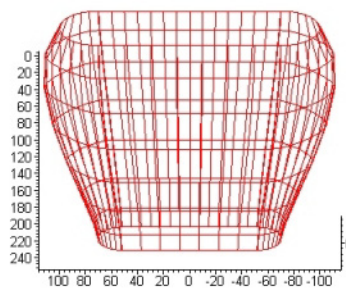
A 28. ábrán szereplő két vezérgörbe két egymásra merőleges síkban levő két-két csúcsnál lekerekített poligon felhasználásával adódott. A fekete kontrollpoligont a görbék kezdőpontjaiba helyeztük. Az ezekkel létrehozott eltolási felületet a 29. ábrán láthatjuk.



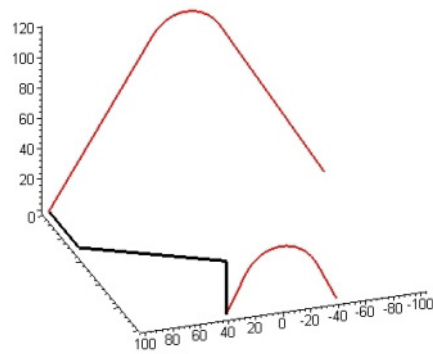
19. ábra: Két vezérgörbe és a generáló görbe kontrollpoligonja



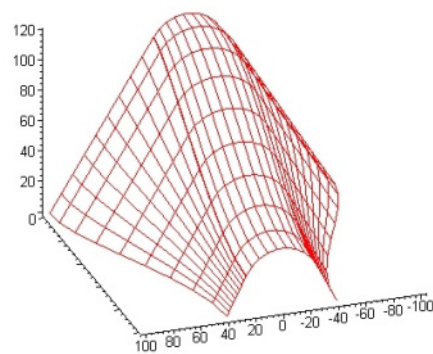
20. ábra: Szabadon formált eltolási felület



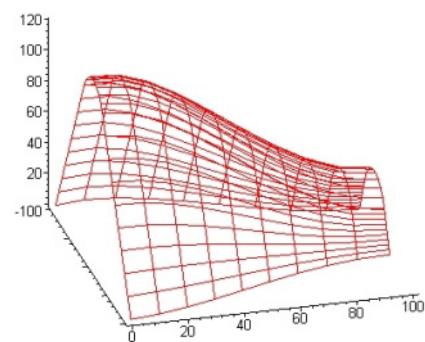
21. ábra: A felület más nézetben



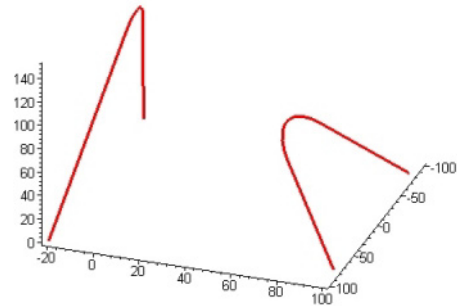
22. ábra: Két párhuzamos síkban levő vezérgörbe a kezdőpontokba helyezett kontrollpoligonnal



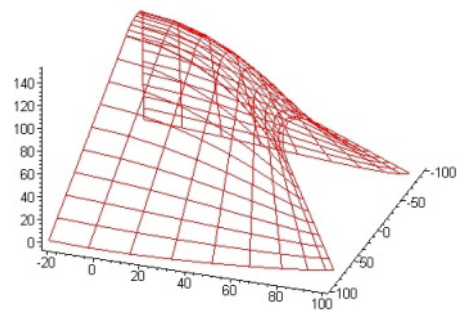
23. ábra: Szabadon formált eltolási felület a 22. ábra vezérgörbéivel



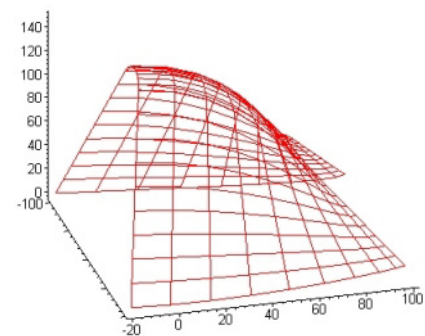
24. ábra: Ugyanaz a felület más nézetben



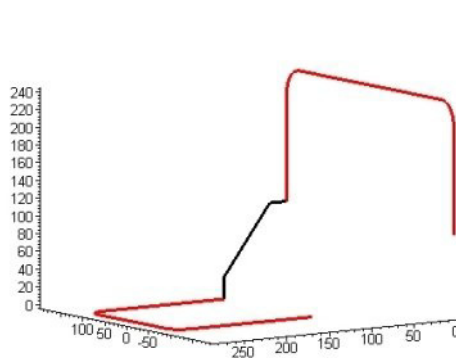
25. ábra: Két vezérgörbe egy-egy csúcsnál lekerekített poligonból



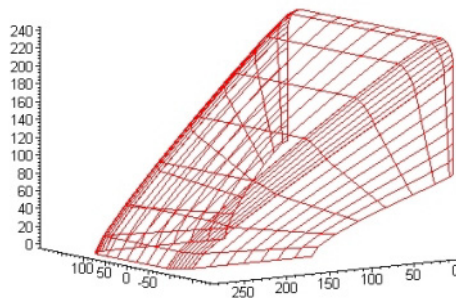
26. ábra: Általánosított eltolási felület



27. ábra: Más nézetben

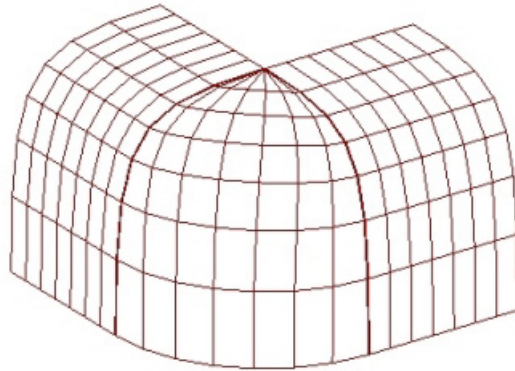


28. ábra: Két vezérgörbe két-két csúcsnál lekerekített poligonból

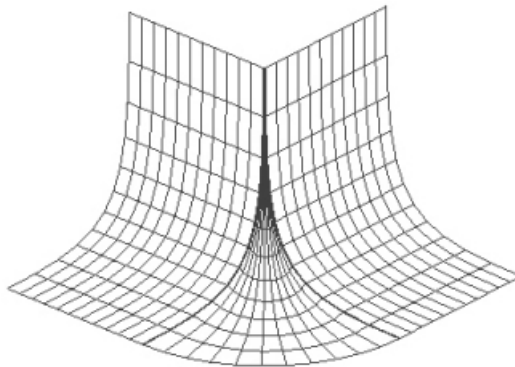


29. ábra: A 28. ábrához tartozó felület

Megjegyzés Az így szerkesztett felület jól alkalmazható az ún. „bőröndsarok lekerekítéseknél” is. A 30. ábrán látható felület egy derékszögű poliéder egyik csúcsának lekerekítését szemlélteti. A két vezérgörbét a poliéder szomszédos oldallapjain úgy vettük fel, hogy a lekerekítést a vizsgált sarok mentén végeztük el. A felső vezérgörbe lekerekítő sugara ε , az alsóé ρ . ε értéke olyan kicsi, amelyet a szerkesztés még megenged. A Bézier-görbét úgy adtuk meg, hogy a sarokban az érintők az oldallapokon legyenek, így a kapott eltolási felület a poliéder oldallapjaihoz érintőlegesen csatlakozik.



30. ábra: Lekerekített konvex sarok



31. ábra: Konkáv sarok lekerekítése

A 31. ábrán látható felület példa egy konkáv sarok lekerekítésére. Az eltolási felület vezérgörbéi a 30. ábrához hasonlóan készültek, a Bézier-görbét viszont úgy adtuk meg, hogy az érintőlegesen a poliéder belsejében haladjon.

4.2 Felületgenerálás alaktartó Bézier-görbével

Mivel a felület definiálásakor a Bézier-görbe kontrollpoligonjának térbeli helyzetét és oldalainak hosszát bizonyos mértékig szabadon választhatjuk meg, a definiált felület alakját nemcsak a meghatározó görbék megválasztásával, hanem további geometriai feltételek előírásával is befolyásolhatjuk. Pl. a Bézier-kontrollpoligonokra előírt „hasonlósági feltétellel”.

A két vezérgörbét és a generáló görbét a 4.1 fejezetben leírtak szerint adjuk meg.

Egy koordináta-rendszer transzformációval a V_1 kontrollpontot az első, a V_4 kontrollpontot a második vezérgörbe minden görbeívének kezdő- és végpontjához tartozó kísérő triéderének koordináta-rendszerébe helyezzük úgy, hogy a $\hat{V}_{i,1}$ az első, a $\hat{V}_{i,4}$ a második vezérgörbén „csússzon”, közben a kontrollpoligon oldalhosszainak aránya az eredetivel egyezzen meg. Ez párhuzamos vezérgörbék esetén a kontrollpoligonok hasonlóságát biztosítja. Ehhez minden görbeív ($i = 1, \dots, n-1$) elején ill. végén meghatározzuk a λ_1 ill. λ_2 konstans szorzókat ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$), amelyek a kontrollpoligon két végpontja közötti aktuális és eredeti távolságainak arányát adják meg.

Az i -edik ($i = 1, \dots, n-1$) görbeív közbülső pontjaiban a Bézier-görbe kontrollpoligonját a következőképpen definiáljuk [45]:

$$\begin{aligned} V_{i,1}(t) &= \text{gív}[i](t) \\ V_{i,2}(t) &= \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_1 \cdot \hat{V}_{i,2} + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_2 \cdot \hat{V}_{i+1,2} + \text{gív}[i](t) \\ V_{i,3}(t) &= \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_1 \cdot \hat{V}_{i,3} + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_2 \cdot \hat{V}_{i+1,3} + \text{cív}[i](t) \\ V_{i,4}(t) &= \text{cív}[i](t) \end{aligned}$$

$$t \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n-1.$$

4. 2. 1. tétel *A Bézier-görbék kontrollpontjainak pályagörbéi G^1 -folytonosak.*

Bizonyítás Mivel ebben az esetben is a $\hat{V}_{i,1}$ a $\text{gív}[i](t)$ görbén, a $\hat{V}_{i,4}$ pont pedig a $\text{cív}[i](t)$ görbén „csúszik”, ezen görbék pedig G^2 -folytonosan csatlakozó ívekből állnak, ezért ezek G^1 -folytonosságát nem kell bizonyítani.

A $\hat{V}_{i,2}$ és $\hat{V}_{i,3}$ kontrollpontok pályagörbéinek vizsgálatához itt is tekintsük mindkét vektorfüggvényt ($i-1$)-edik és i -edik ívét:

$$V_{i-1,2}(t) = \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_1 \cdot \hat{V}_{i-1,2} + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_2 \cdot \hat{V}_{i,2} + \text{gív}[i-1](t)$$

$$t \in [0, 1]$$

$$V_{i,2}(\tau) = \cos^2\left(\tau \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_1 \cdot \hat{V}_{i,2} + \sin^2\left(\tau \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_2 \cdot \hat{V}_{i+1,2} + \text{gív}[i](\tau)$$

$$\tau \in [0, 1]$$

$$i = 2, \dots, n-1;$$

valamint

$$V_{i-1,3}(t) = \cos^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_1 \cdot \hat{V}_{i-1,3} + \sin^2\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_2 \cdot \hat{V}_{i,3} + \text{cív}[i-1](t)$$

$$t \in [0, 1]$$

$$V_{i,3}(\tau) = \cos^2\left(\tau \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_1 \cdot \hat{V}_{i,3} + \sin^2\left(\tau \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \lambda_2 \cdot \hat{V}_{i+1,3} + \text{cív}[i](\tau)$$

$$\tau \in [0, 1]$$

$$i = 2, \dots, n-1.$$

Ezek deriváltjai:

$$\frac{d}{dt} V_{i-1,2}(t) = -\sin\left(t \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \lambda_1 \cdot \hat{V}_{i-1,2} + \sin\left(t \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \lambda_2 \cdot \hat{V}_{i,2} + \frac{d}{dt} \text{gív}[i-1](t)$$

$$\frac{d}{d\tau} V_{i,2}(\tau) = -\sin\left(\tau \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \lambda_1 \cdot \hat{V}_{i,2} + \sin\left(\tau \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \lambda_2 \cdot \hat{V}_{i+1,2} + \frac{d}{d\tau} \text{gív}[i](\tau)$$

$$t \in [0, 1], \quad \tau \in [0, 1];$$

valamint

$$\frac{d}{dt} V_{i-1,3}(t) = -\sin\left(t \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \lambda_1 \cdot \hat{V}_{i-1,3} + \sin\left(t \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \lambda_2 \cdot \hat{V}_{i,3} + \frac{d}{dt} \text{cív}[i-1](t)$$

$$\frac{d}{d\tau} V_{i,3}(\tau) = -\sin\left(\tau \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \lambda_1 \cdot \hat{V}_{i,3} + \sin\left(\tau \cdot \pi\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \lambda_2 \cdot \hat{V}_{i+1,3} + \frac{d}{d\tau} \text{cív}[i](\tau)$$

$$t \in [0, 1], \quad \tau \in [0, 1].$$

A szomszédos görbévek csatlakozási pontjában:

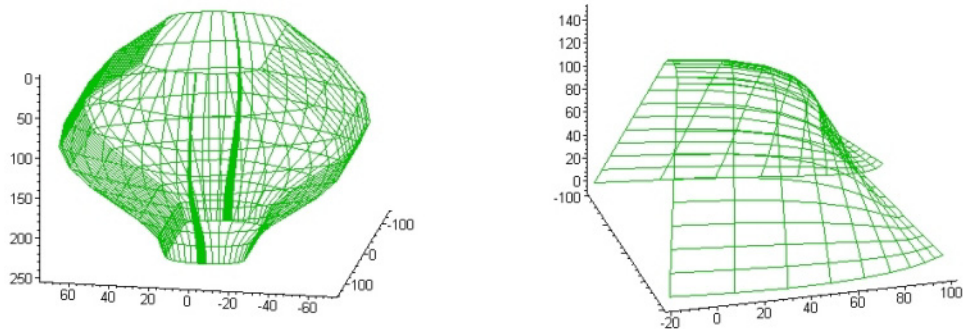
$$\frac{d}{dt} V_{i-1,2}(1) = \frac{d}{dt} \text{gív}[i-1](1), \quad \frac{d}{d\tau} V_{i,2}(0) = \frac{d}{d\tau} \text{gív}[i](0),$$

valamint

$$\frac{d}{dt} V_{i-1,3}(1) = \frac{d}{dt} \text{cív}[i-1](1), \quad \frac{d}{d\tau} V_{i,3}(0) = \frac{d}{d\tau} \text{cív}[i](0).$$

Ebben az esetben is az érintő vektorok párhuzamosak és egyirányúak. Tehát a Bézier-kontrollpontok pályagörbéi G^1 -folytonosak. \square

Ezt a felületet is a (3.2) egyenlettel adott $\mathbf{R}_i(t, u)$ kétparaméteres vektorfüggvény írja le. A 32. és 33. ábrákon a felületeket a 19. és 25. ábrákon látható adatokból generáltuk, de a kontrollpoligonok mozgatása során az oldalhosszak arányát megtartottuk.



32-33. ábra: Alaktartó transzformációval készült felületek

4.3 Alakparaméterek meghatározása simasági feltételből

A két vezérgörbével definiált szabadon formált felület létrehozásakor a generáló Bézier-görbe kontrollpoligonja általában torzul. A két görbén ugyanis a megfelelő görbévek végpontjainak távolsága, vagyis a $\hat{V}_{i,1}$ és $\hat{V}_{i,4}$ ($i = 1, \dots, n-1$) kontrollpontok távolsága változik. Másrészt ezekben a pontokban a két görbe kísérő triéderének élei általában nem párhuzamosak, következésképpen az adott $\hat{V}_{i,1} \hat{V}_{i,2} \hat{V}_{i,3} \hat{V}_{i,4}$ kontrollpoligon $\hat{V}_{i,1} \hat{V}_{i,2}$ és $\hat{V}_{i,3} \hat{V}_{i,4}$ éleinek a különböző kísérő triéderek koordináta-rendszereihez való rögzítése a kontrollpoligon torzulását okozza. A 4.2 pontban az oldalhosszak arányát megtartó szorzótényezők bevezetésével – amelyeket a felület alakparamétereinek nevezhetünk – mérsékeljük ezt a torzulást.

Az ‘elfogadható’ vagy ‘vizuálisan kellemes’ felület szerkesztése alapvetően fontos a geometriai modellezés több területén, különösen az ipari kivitelezés bizonyos ágaiban (lásd

repülőgép-, autó-, hajó-, cipőgyártás...). Míg az emberi szem könnyen felméri egy felület minőségét, addig ezen folyamatok átültetése a matematika nyelvére már nehéznek bizonyult. Számos szerző sok munkát fektetett e probléma megoldásába, és sok különböző megközelítési módját írták le annak, hogyan lehet egy felületet „szépíteni” (angolul fairing). Az ezekhez felhasznált függvényekkel kapcsolatban két fontos kérdésre kellett válaszolni:

- Kellemes formájú felületet eredményez?
- Elkészíthető-e a függvény belátható idő alatt?

Azért, hogy „szép alakú” felületeket kapjunk, olyan függvényeket vezetünk be, – nevezük ezeket energia-függvényeknek –, amelyek minimalizálásával simítani lehet.

Legyen $\mathbf{R} : \Omega \rightarrow \mathbf{E}^3$. A vékony membrán energiája az Ω felületdarabon:

$$\iint_{\Omega} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) d\Omega$$

ahol κ_1 és κ_2 az \mathbf{R} felület főgörbületeit jelentik.

A hajlítási energia fizikailag azt az energiát jelenti, amely a vékony membrán meghajlításához szükséges. A kifejezésben a felület alakját jellemző főgörbületek a felület paraméterezésétől függetlenek.

A tapasztalat szerint azok a simító függvények, amelyek felületi görbületeket tartalmaznak, jó minőségű felületeket eredményeznek, de ezen megoldások kiszámításához sok időre van szükség.

Mi majd alakparaméterek megválasztásához alkalmazunk simító feltételeket.

A felületek fizikai viselkedésére jellemző különböző energiamentiség minimalizálása az alakparaméterek megválasztására hatékony módszernek bizonyult. A legtöbb esetben az energia-függvények felületi integrálok, amelyek különböző rendű parciális deriváltakat tartalmaznak, és mindegyik a deformációs energiára skalár értéket ad.

Ha a paraméterezés izometrikus, tehát $\frac{\partial \mathbf{R}(t, u)}{\partial t}$ és $\frac{\partial \mathbf{R}(t, u)}{\partial u}$ ortonormáltak, továbbá a görbületi irányok megegyeznek a paramétervonalak irányával, akkor a vékony membrán energiáját az

$$F = \iint_A \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}(t,u)}{\partial t^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}(t,u)}{\partial t \partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}(t,u)}{\partial u^2} \right)^2 \right] dt du$$

$$A = [0, 1] \times [0, 1]$$

felületi integrál - mint simító függvény (fairing function) – adja. Ha olyan alakparamétereket választunk, amelyek a felület vektoregyenletében első hatványon szerepelnek, akkor ez a függvény az alakparaméterekben másodfokú, pozitív definit, ezért a minimum helye jól számítható [16]. Az alakparaméterekre tett feltételt, miszerint azok értékét úgy választjuk, hogy az F függvény értéke minimális legyen, simasági feltételnek (fairness condition) nevezzük.

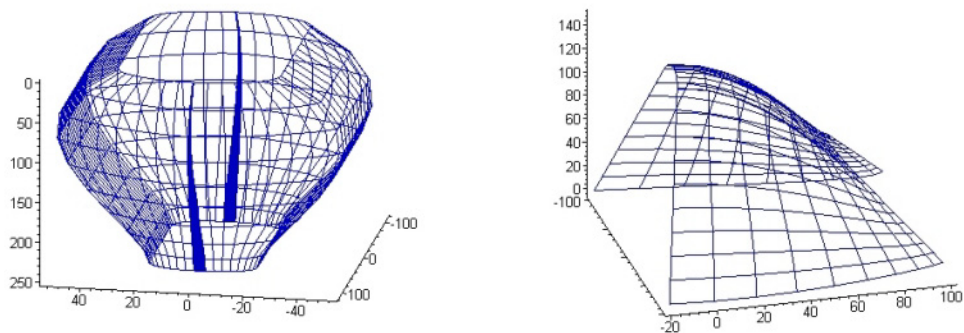
A két vezérgörbével és egy harmadfokú Bézier-görbével definiált szabadon formált felület alakparamétereit jelölje λ_i ($i = 1, \dots, n - 1$). A simító függvénynek az egész felületre vett integrálja

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} F$$

$n - 1$ változós másodfokú polinom. A szélsőérték meghatározása tehát az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldására vezet:

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

A 34. és 35. ábrákon látható felületek ugyanazokkal a vezérgörbékkel és Bézier-poligonokkal készültek, mint a 20. és 27. ábrákon látható felületek, de az alakparamétereket a simasági feltételből számítottuk. A felületfoltokra felírt integrálokat egyszerű közelítő módszerrel számítottuk ki.



34-35. ábra: Simasági feltétellel számolt felületek

Számos példán elvégzett vizsgálatok azt eredményezték, hogy az így generált felületek „feszesebb” alakot mutatnak, mint a 4.1 pontban leírt módszer, ami a $\lambda_i = 1$ ($i = 1, \dots, n - 1$) esetnek felel meg.

Ahogy a klasszikus mechanika könyvekben található, a tetszőleges alakú vékony membrán energiája kis elhajlás esetén:

$$\iint \left[(f_{xx} + f_{yy})^2 - 2(1-\nu)(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) \right] dx dy,$$

ahol ν az anyagtól függő konstans, a Poisson együttható.

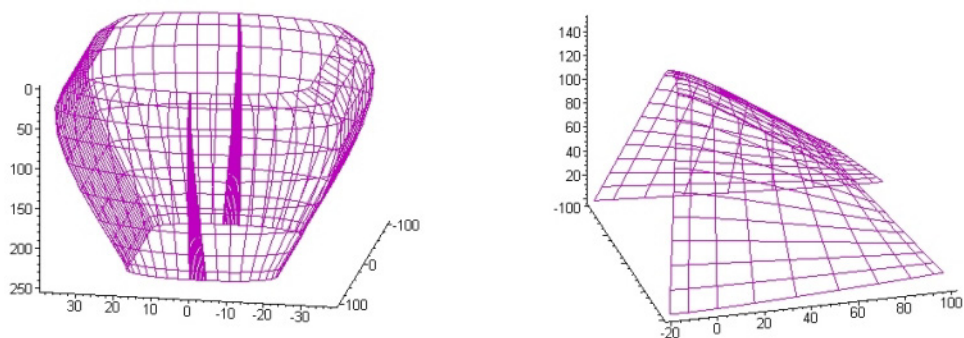
Ha $\nu = 0$, akkor a vékony membrán energiáját leíró, a görbületi deformációt minimalizáló F függvényt kapjuk.

Reálisabb eredményt nyújt a $\nu = 0,3$ alkalmazása, hisz ez közelítőleg az alumínium vagy acél Poisson együtthatóját jelenti.

Az

$$E_1 = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{R}(t, u)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{R}(t, u)}{\partial u} \right)^2 \right] dt du$$

ún. Dirichlet-energia a normál deformáció gradiensén alapul. Azt mutatja meg, hogy mennyi energia szükséges a normális irányában történő alakváltoztatáshoz.



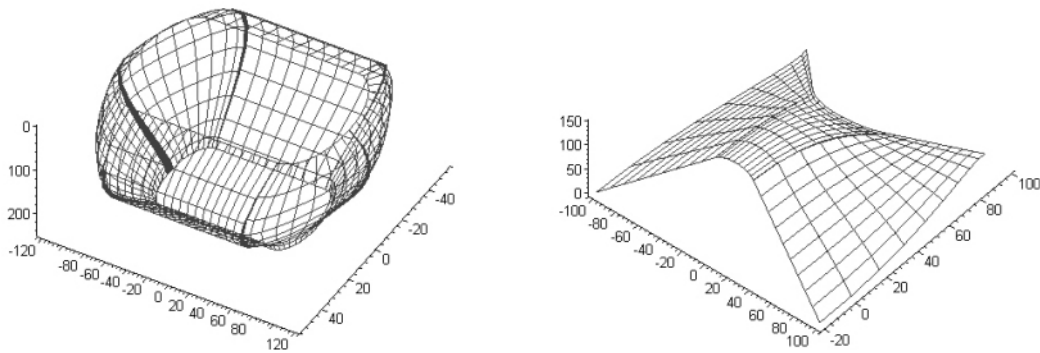
36-37. ábra: Dirichlet-energiával számolt felületek

A harmadrendű parciális deriváltakkal felírt

$$E_2 = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^3 \mathbf{R}(t,u)}{\partial t^3} \right)^2 + 3 \left\{ \left(\frac{\partial^3 \mathbf{R}(t,u)}{dt^2 du} \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 \mathbf{R}(t,u)}{dt du^2} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial^3 \mathbf{R}(t,u)}{du^3} \right)^2 \right] dt du$$

a lökési energia. A modell, amelyre ez az energiafüggvény jellemző, egy papírszerű anyaghoz hasonlít, szögletes, mint egy poliéder.

A 38. és 39. ábrákon olyan felületek láthatók, amelyeket a 19. és 25. ábrákon szereplő adatokat felhasználva az E_2 energiafüggvénnyel számoltunk. Ezekben a nézetekben jól látható, hogy a felületek alakja „horpadt”, szögletes.



38-39. ábra: Lökési energiával számolt felületek

A gyakorlatban sokszor a háromféle energia lineáris kombinációjával számolnak:

$$E_{\delta} = \alpha \cdot E_1 + \beta \cdot F + \gamma \cdot E_2$$

Az együtthatók megválasztásával lehet befolyásolni, hogy melyik alakváltoztatás domináljon.

5 Rések és lyukak kitöltése felületek konvex kombinációjaként

A 2. fejezetben láthattuk, hogyan lehet egyenes szakaszok és körívek trigonometrikus konvex kombinációjaként görbület-folytonos görbét készíteni. Ebben a fejezetben ennek az eljárásnak felületekre történő kiterjesztésével foglalkozunk.

Először megnézzük, hogyan lehet két felület közötti rést úgy kitölteni, hogy a felületek határvonalai alkotják a folt két határát, a másik két határvonalat pedig szabadon adjuk meg. Majd három felület által alkotott lyuk kitöltését mutatjuk be felületek konvex kombinációjaként.

A felület definiáló módszerünk a Coons-féle eljárás lényeges általánosításának tekinthető, ezért először felírjuk a Coons-felület definícióját.

A módszert az autótervezés területén dolgozók – S. A. Coons (Ford) és W. Gordon (Generál Motors) – fejlesztették ki.

Egy Coons-folt négy tetszőleges határgörbével az $\mathbf{a}_1(t)$, $\mathbf{a}_2(t)$, $t \in [0, 1]$ és a $\mathbf{b}_1(u)$, $\mathbf{b}_2(u)$, $u \in [0, 1]$ egymást páronként metsző görbepárral definiálható. Kiválasztunk két függvénypárt, az $f_1(t)$, $f_2(t)$ és $g_1(u)$, $g_2(u)$ súlyfüggvényeket, amelyekre $f_1(0) = g_1(0) = 1$ és $f_1(1) = g_1(1) = 0$ valamint $f_1(t) + f_2(t) \equiv 1$ és $g_1(u) + g_2(u) \equiv 1$ teljesül. Ekkor a Coons-folt megszokott alakja:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t, u) = & [f_1(t) \quad f_2(t)] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}(0, u) \\ \mathbf{R}(1, u) \end{bmatrix} + [\mathbf{R}(t, 0) \quad \mathbf{R}(t, 1)] \cdot \begin{bmatrix} g_1(u) \\ g_2(u) \end{bmatrix} - \\ & - [f_1(t) \quad f_2(t)] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}(0, 0) & \mathbf{R}(0, 1) \\ \mathbf{R}(1, 0) & \mathbf{R}(1, 1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1(u) \\ g_2(u) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$t \in [0, 1], \quad u \in [0, 1].$$

Az egyenletben az utolsó tagot korrekciós függvénynek nevezzük, amely a sarokpontok egy bilineáris kombinációja.

Ez a felületfolt interpolál az adott határgörbék között:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t, 0) &= \mathbf{a}_1(t), & \mathbf{R}(t, 1) &= \mathbf{a}_2(t) \\ \mathbf{R}(0, u) &= \mathbf{b}_1(u), & \mathbf{R}(1, u) &= \mathbf{b}_2(u) \end{aligned}$$

Egymáshoz kapcsolódó Coons-foltok esetén gondolni kell a folytonossági feltételekre is. Ezekhez azonban a határoló görbék mellett még meg kell adni a határoló görbék mentén a keresztirányú deriváltakat is, amelyeket az „érintőszalagok” megadásával biztosíthatunk. Coons – az eredeti cikkében – a felületegyenletet magasabb dimenzióban is megadta. n dimenzióban a határoló görbékét $n - 1$ dimenziós hiperfelületekkel helyettesítette.

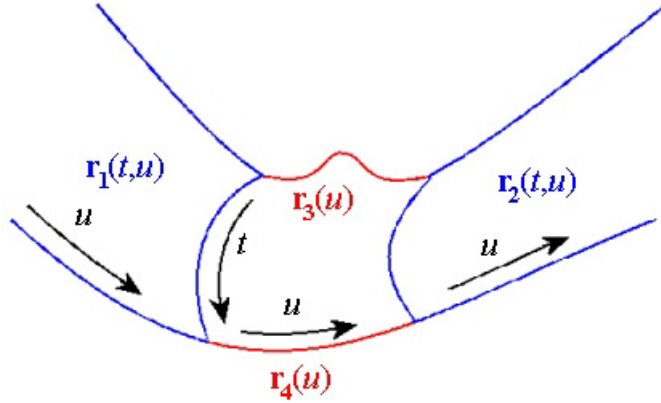
Az általunk vázolt felületek csak formálisan követik Coons módszerét, hisz a két szemközti határvonal helyett két felület darabot használunk, amelyek a határvonalaik mentén az eredményül kapott felületfolttal normális-folytonosan kapcsolódnak. Ez a Coons-féle felületdefiniálás kiterjesztésének tekinthető, ahol a két kiindulási adat dimenziószáma megegyezik a kapott felület dimenziószámával.

5.1 Eljárás rés kitöltésére adott peremgörbékkel

Ebben az algoritmusban két felületet adunk meg az $\mathbf{r}_1(t, u)$ és $\mathbf{r}_2(t, u)$ kétparaméteres vektorfüggvényekkel, valamint két térgörbét az $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ egyparaméteres vektorfüggvényekkel, amelyek a keresett felületfolt határgörbéi lesznek, és a két adott felület határgörbéihez csatlakoznak. A réskitöltő felület a két adott felületet köti össze. A rés az $\mathbf{r}_1(t, u)$ és $\mathbf{r}_2(t, u)$ felületeknek az $u \in [-a, 0]$, illetve $u \in [1, b]$ ($a > 0, b > 1$) darabjai között van, és az eljárásban ezen felületeknek az $u \in [0, 1]$ tartományra kiterjesztett darabjaival számolunk. (Az ábrán ezeket az átfedő felületdarabokat nem rajzoltuk meg.)

Ezt az $\mathbf{R}(t, u)$ felületet a $(t, u) \in [0, 1] \times [0, 1]$ paramétertartományban úgy definiáljuk, hogy a határoló görbék $u = 0$ és $u = 1$ esetén egyezzenek meg a rés határaival: az $\mathbf{r}_1(t, 0)$ és az $\mathbf{r}_2(t, 1)$ görbékkel, továbbá $t = 0$ esetén az $\mathbf{r}_3(u)$, $t = 1$ esetén az $\mathbf{r}_4(u)$, $u \in [0, 1]$, görbékkel essenek egybe. (40. ábra)

Az $\mathbf{R}(t, u)$ réskitöltő felületet a szemközti felületek és görbék trigonometrikus konvex kombinációjával és egy alkalmas korrekciós függvénnyel állítjuk elő.



40. ábra: Két felület és két görbe által határolt rés

Adott két felületdarab a $[0, 1] \times [0, 1]$ paramétertartományon értelmezett $\mathbf{r}_1(t, u)$ és $\mathbf{r}_2(t, u)$ differenciálható vektorfüggvényekkel, és két görbe az $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ differenciálható vektorfüggvényekkel, $u \in [0, 1]$. A rés sarokpontjaira megköveteljük, hogy:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(0, 0) &= \mathbf{r}_3(0), & \mathbf{r}_1(1, 0) &= \mathbf{r}_4(0) \\ \mathbf{r}_2(0, 1) &= \mathbf{r}_3(1), & \mathbf{r}_2(1, 1) &= \mathbf{r}_4(1) \end{aligned}$$

teljesüljön.

Keresünk olyan $\mathbf{R}(t, u)$ felületfoltot, amelynek a határoló görbéi az $\mathbf{r}_1(t, 0)$, $\mathbf{r}_2(t, 1)$, $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ görbék.

$$\begin{aligned} \mathbf{5. 1. 1. \text{ tétel}} \quad \text{Az } \mathbf{R}(t, u) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(t, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(t, u) + \\ &+ \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_3(u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_4(u) - \\ &- \left\{ \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(0, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(0, u) \right] \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) + \right. \\ &\left. + \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(1, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(1, u) \right] \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right\} \end{aligned}$$

(5.1.1)

vektoregyenlettel definiált felület a kívánt feltételeket kielégíti [37, 42].

Bizonyítás

- Tekintsük az $\mathbf{R}(t, u)$ vektor-skalár függvényt $u = 0$ esetén:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t, 0) &= 1 \cdot \mathbf{r}_1(t, 0) + 0 \cdot \mathbf{r}_2(t, 0) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_3(0) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_4(0) - \\ &- \left\{ [1 \cdot \mathbf{r}_1(0, 0) + 0 \cdot \mathbf{r}_2(0, 0)] \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) + [1 \cdot \mathbf{r}_1(1, 0) + 0 \cdot \mathbf{r}_2(1, 0)] \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right\} = \\ &= \mathbf{r}_1(t, 0) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_3(0) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_4(0) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_1(0, 0) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_1(1, 0) = \\ &= \mathbf{r}_1(t, 0) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot [\mathbf{r}_3(0) - \mathbf{r}_1(0, 0)] + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot [\mathbf{r}_4(0) - \mathbf{r}_1(1, 0)] = \mathbf{r}_1(t, 0), \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

mert a sarokpontokban a két érték megegyezik.

- Ha $u = 1$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t, 1) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_1(t, 1) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_2(t, 1) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_3(1) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_4(1) - \\ &- \left\{ \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_1(0, 1) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_2(0, 1) \right] \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) + \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_1(1, 1) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_2(1, 1) \right] \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right\} = \\ &= \mathbf{r}_2(t, 1) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_3(1) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_4(1) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_2(0, 1) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_2(1, 1) = \\ &= \mathbf{r}_2(t, 1) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot [\mathbf{r}_3(1) - \mathbf{r}_2(0, 1)] + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot [\mathbf{r}_4(1) - \mathbf{r}_2(1, 1)] = \mathbf{r}_2(t, 1), \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

a sarokpontokban vett értékeket figyelembe véve.

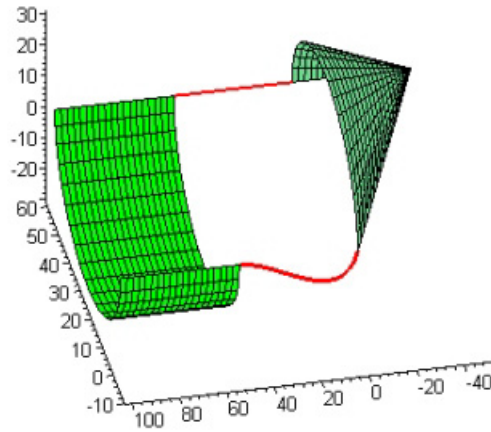
- Ha $t = 0$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(0, u) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(0, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(0, u) + 1 \cdot \mathbf{r}_3(u) + 0 \cdot \mathbf{r}_4(u) - \\ &- \left\{ \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(0, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(0, u) \right] \cdot 1 + \right. \\ &+ \left. \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(1, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(1, u) \right] \cdot 0 \right\} = \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(0, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(0, u) + \mathbf{r}_3(u) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(0, u) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(0, u) = \\ &= \mathbf{r}_3(u), \quad u \in [0, 1]. \end{aligned}$$

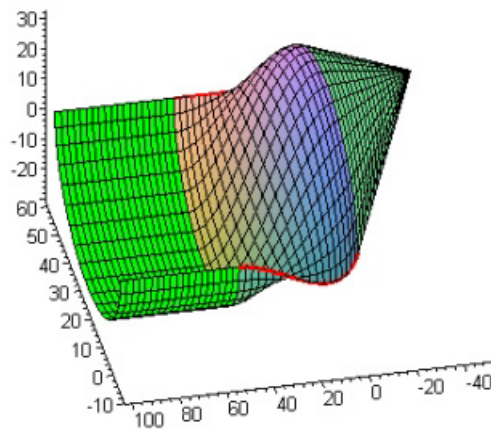
- Ha $t = 1$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(1, u) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(1, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(1, u) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_3(u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_4(u) - \\ &- \left\{ \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(0, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(0, u) \right] \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) + \right. \\ &+ \left. \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(1, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(1, u) \right] \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \right\} = \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(1, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(1, u) + \mathbf{r}_4(u) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(1, u) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(1, u) = \\ &= \mathbf{r}_4(u), \quad u \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Valóban, a réskitöltő felület határoló görbéi a két adott felület határgörbéi és az adott térgörbék lesznek. \square



41. ábra: A felületek és görbék által határolt rés



42. ábra: A 41. ábrán látható rés kitöltése

A 41. ábrán a két adott felület a következőképpen van paraméterezve: az $\mathbf{r}_1(t, u)$ hengernél $t \in [0, 1]$, $u \in [-1, 0]$; az $\mathbf{r}_2(t, u)$ kúpnál $t \in [0, 1]$, $u \in [1, 2]$.

A 42. ábrán látható réskitöltő felületet az 5.1.1. tételben szereplő vektorfüggvénnyel állítottuk elő.

Megjegyzés Az $\mathbf{R}(t, u)$ felületet felírhatjuk mátrixos alakban is:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t, u) = & \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) & \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_3(u) \\ \mathbf{r}_4(u) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(t, u) & \mathbf{r}_2(t, u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \end{bmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) & \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(0, u) & \mathbf{r}_2(0, u) \\ \mathbf{r}_1(1, u) & \mathbf{r}_2(1, u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ahol a súlyfüggvények:

$$f_1(t) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right), \quad f_1(0) = 1, \quad f_1(1) = 0$$

$$f_2(t) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right), \quad f_2(0) = 0, \quad f_2(1) = 1$$

$$f_1(t) + f_2(t) \equiv 1$$

valamint

$$g_1(u) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right), \quad g_1(0) = 1, \quad g_1(1) = 0$$

$$g_2(u) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right), \quad g_2(0) = 0, \quad g_2(1) = 1$$

$$g_1(u) + g_2(u) \equiv 1.$$

A képlet utolsó tagja a korrekciós függvény, amely az (5.1.1) vektoregyenletben a kapcsos zárójelben szereplő kifejezés.

5. 1. 2. tétel *Ha az $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ térgörbék C^1 -folytonosan kapcsolódnak az $\mathbf{r}_1(t, u)$ felület $t = 0$ és $t = 1$ határvonalához, akkor az (5.1.1) vektoregyenlettel definiált $\mathbf{R}(t, u)$ felület az $\mathbf{r}_1(t, u)$ felülethez C^1 -folytonosan kapcsolódik az $\mathbf{r}_1(t, 0)$, $t \in [0, 1]$, határgörbe mentén.*

Bizonyítás Legyen $\mathbf{r}_{1,u}(t, u) = \frac{\partial \mathbf{r}_1(t, u)}{\partial u}$ és $\dot{\mathbf{r}}_3(u) = \frac{d\mathbf{r}_3(u)}{du}$.

Ha $t = 0$, akkor az u -szerinti parciális derivált $\mathbf{r}_{1,u}(0, u)$. Mivel az $\mathbf{r}_1(0, u)$ és az $\mathbf{r}_3(u)$ görbék a sarokpontban elsőrendben folytonosan kapcsolódnak egymáshoz, így

$$\mathbf{r}_{1,u}(0, u) = \dot{\mathbf{r}}_3(u).$$

- Ha $t = 1$, akkor hasonlóképpen az $\mathbf{r}_1(1, u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ görbék a sarokpontban C^1 -folytonosan kapcsolódnak, így

$$\mathbf{r}_{1,u}(1, 0) = \dot{\mathbf{r}}_4(0).$$

- Vizsgáljuk az $\mathbf{R}(t, u)$ felület u paraméter irányú érintővektorát is. Ehhez képezzük az u -szerinti parciális deriváltat. Legyen $\mathbf{R}_u(t, u) = \frac{\partial \mathbf{R}(t, u)}{\partial u}$, így

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u(t, u) = & -\sin(\pi \cdot u) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_1(t, u) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_{1,u}(t, u) + \\ & + \sin(\pi \cdot u) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_2(t, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_{2,u}(t, u) + \\ & + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_3(u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_4(u) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin(\pi \cdot u) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_1(0, u) - \\ & - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_{1,u}(0, u) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin(\pi \cdot u) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_2(0, u) - \\ & - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_{2,u}(0, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin(\pi \cdot u) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_1(1, u) - \\ & - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_{1,u}(1, u) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin(\pi \cdot u) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_2(1, u) - \\ & - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_{2,u}(1, u) \end{aligned}$$

- $u = 0$ és $t \in [0, 1]$ esetén:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u(t, 0) = & \mathbf{r}_{1,u}(t, 0) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_3(0) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_4(0) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_{1,u}(0, 0) - \\ & - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_{1,u}(1, 0) = \\ = & \mathbf{r}_{1,u}(t, 0) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot [\dot{\mathbf{r}}_3(0) - \mathbf{r}_{1,u}(0, 0)] + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot [\dot{\mathbf{r}}_4(0) - \mathbf{r}_{1,u}(1, 0)] \end{aligned}$$

A feltétel szerint a második és a harmadik tag nullvektor a C^l -folytonos kapcsolódás miatt, így

$$\mathbf{R}_u(t, 0) = \mathbf{r}_{1,u}(t, 0)$$

a határgörbe mentén.

- Az 5.1.1.tétel értelmében az $u = 0, t \in [0, 1]$ esetén $\mathbf{R}(t, 0) = \mathbf{r}_1(t, 0)$, ezért ezek t -szerinti parciális deriváltjai is egyenlők:

$$\mathbf{R}_t(t, 0) = \mathbf{r}_{1,t}(t, 0).$$

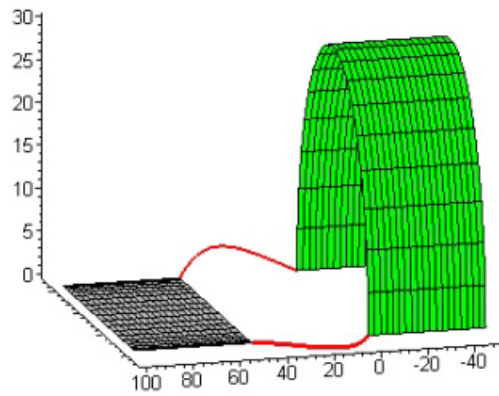
Ez pedig C^l -folytonosságot jelent az $\mathbf{R}(t, u)$ réskitöltő felület és az adott $\mathbf{r}_1(t, u)$ felület között az $u = 0$ pontokban. Ezért az érintősíkok a határvonal mentén azonosak. \square

5. 1. 3. tétel *Ha az $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ térgörbék C^l -folytonosan kapcsolódnak az $\mathbf{r}_2(t, u)$ felület $t = 0$ és $t = 1$ határvonalához, akkor az (5.1.1) vektoregyenlettel definiált $\mathbf{R}(t, u)$ felület az $\mathbf{r}_2(t, u)$ felülethez C^l -folytonosan kapcsolódik az $\mathbf{r}_2(t, 1)$, $t \in [0, 1]$, határgörbe mentén.*

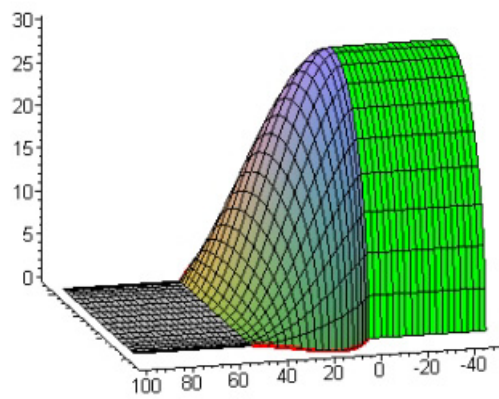
Bizonyítás Az 5.1.2.tétel bizonyításával analóg. \square

A 43. ábrán egy sík- és egy hengeres felületfolt látható a határvonalakat összekötő, hozzájuk kapcsolódó görbékkel. A hengeres felület paraméterezése: $(t, u) \in [0, 1] \times [-1, 0]$, a síké $(t, u) \in [0, 1] \times [1, 2]$, a két görbe paraméterezése pedig: $u \in [0, 1]$. A réskitöltő felület nem ezekből a felületdarabokból készül, hanem ezeknek a $[0, 1] \times [0, 1]$ tartomány feletti részeiből. A 45. ábrán viszont az eljárás bemenő adatait rajzoltuk meg.

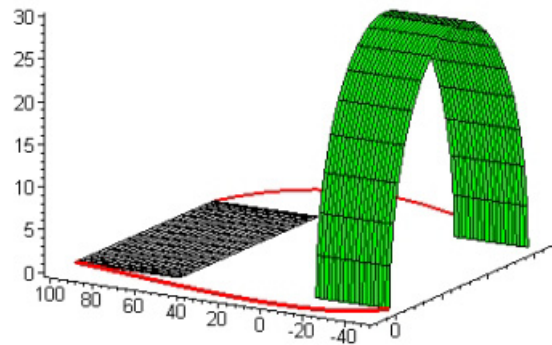
A 44. és 46. ábrákon az előző bemenő adatokból készített rések folytonos kitöltései láthatók. Ez a példa egyben jól mutatja a kiindulási felületek alakra gyakorolt hatását. Ez a hatás illusztrálja a különbséget a mi szerkesztésünk és Coons foltjai között, amelyet csak a határoló görbék befolyásolnak.



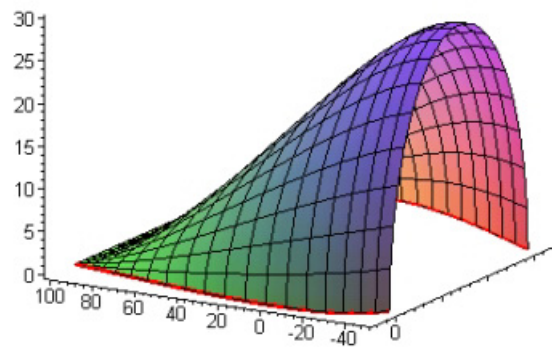
43. ábra: Sík- és hengeres felületfolythoz kapcsolódó görbék



44. ábra: A rés folytonos kitöltése



45. ábra: A sík és a hengeres felület más kapcsolódó görbékkel



46. ábra: A réskitöltő felület a 45. ábra bemenő adataival

A modellezés során gyakran jelentkeznek olyan problémák (pl. csatornák tervezésénél), amikor hengeres és toroidos felületi elemeket kell összekapcsolni. Ennek megvalósítására is lehetőség van ezzel a módszerrel, gyengébb feltételek mellett.

5. 1. 4. tétel *Ha az $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ térgörbék G^l -folytonosan kapcsolódnak az $\mathbf{r}_1(t, u)$ felület $t = 0$ és $t = 1$ határoló görbéjéhez, akkor az (5.1.1) vektoregyenlettel definiált $\mathbf{R}(t, u)$ felület az $\mathbf{r}_1(t, u)$ felülethez G^l -folytonosan kapcsolódik az $\mathbf{r}_1(t, 0)$, $t \in [0, 1]$, határgörbe mentén.*

Bizonyítás

- Ha $t = 0$, akkor az u -szerinti parciális derivált $\mathbf{r}_{1,u}(0, u)$. Mivel az $\mathbf{r}_1(0, u)$ és az $\mathbf{r}_3(u)$ görbék a csatlakozási pontban G^l -folytonosan kapcsolódnak egymáshoz, így

$$\mathbf{r}_{1,u}(0, 0) \parallel \dot{\mathbf{r}}_3(0) \Rightarrow \mathbf{r}_{1,u}(0, 0) = \lambda \cdot \dot{\mathbf{r}}_3(0).$$

- Ha $t = 1$, akkor hasonlóképpen az $\mathbf{r}_1(1, u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ görbék a sarokpontban G^l -folytonosan kapcsolódnak, így

$$\mathbf{r}_{1,u}(1, 0) \parallel \dot{\mathbf{r}}_4(0) \Rightarrow \mathbf{r}_{1,u}(1, 0) = \lambda_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_4(0)$$

- Ha az $\mathbf{r}_1(t, u)$ $(t, u) \in [0, 1] \times [0, 1]$ hengeres felület u -szerinti parciális deriváltjai mind párhuzamosak (47. ábra), akkor

$$\mathbf{R}_u(t, 0) \parallel \mathbf{r}_{1,u}(t, 0).$$

- Az 5.1.1.tétel értelmében az $u = 0$, $t \in [0, 1]$ esetén $\mathbf{R}(t, 0) = \mathbf{r}_1(t, 0)$, ezért ezek t -szerinti parciális deriváltjai is egyenlők:

$$\mathbf{R}_t(t, 0) = \mathbf{r}_{1,t}(t, 0).$$

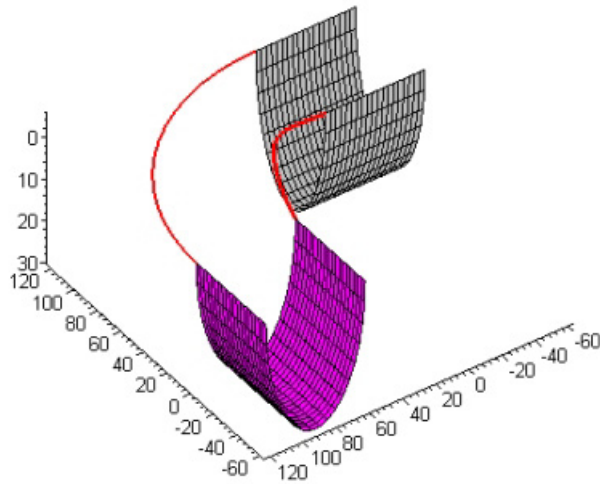
Ez már biztosítja a párhuzamosságot az

$$\mathbf{R}_t(t, 0) \times \mathbf{R}_u(t, 0) \quad \text{és} \quad \mathbf{r}_{1,t}(t, 0) \times \mathbf{r}_{1,u}(t, 0)$$

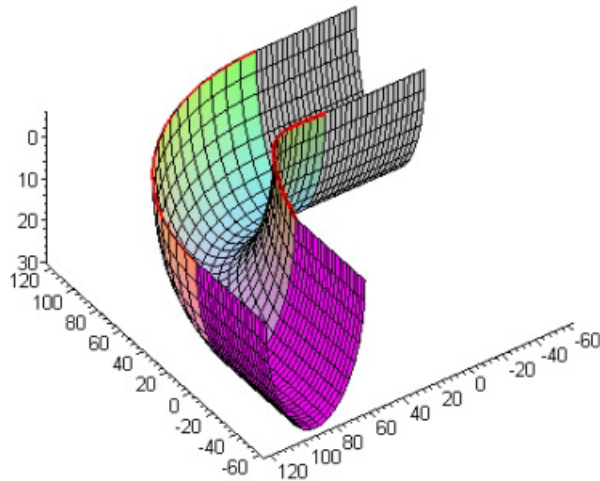
normálisok között, tehát az érintő sík folytonosan változik, ami éppen a G^l -folytonosságot jelenti. \square

5. 1. 5. tétel *Ha az $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ térgörbék G^1 -folytonosan kapcsolódnak az $\mathbf{r}_2(t,u)$ felület $t = 0$ és $t = 1$ határoló egyeneséhez, akkor az (5.1.1) vektoregyenlettel definiált $\mathbf{R}(t,u)$ felület az $\mathbf{r}_2(t,u)$ felülethez G^1 -folytonosan kapcsolódik az $\mathbf{r}_2(t,1)$, $t \in [0, 1]$, határgörbe mentén.*

Bizonyítás: Az 5.1.4.tétel bizonyításával analóg. \square



47. ábra: A két hengeres felülethez G^1 -folytonosan kapcsolódó görbék



48. ábra: A 47. ábra adatai által határolt rés G^1 -folytonos kitöltése

A 47. ábrán a két hengeres felület, a 48. ábrán a közöttük levő rés G^I -folytonos kitöltése látható.

Bizonyos szerkesztéseknél a feladat megköveteli, hogy olyan réskitöltő felületet illesztünk a két adott – $\mathbf{r}_1(t, u)$ és $\mathbf{r}_2(t, u)$ – felület közé, amely C^2 -folytonosan kapcsolódik az adott felületekhez. Ennek az előzőekben alkalmazott trigonometrikus súlyfüggvények nem fe-

lelnek meg, mert $\left. \frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} \right|_{t=0} \neq 0$ és $\left. \frac{d^2 g_2(u)}{du^2} \right|_{u=0} \neq 0$.

Legyen $\frac{df_2(t)}{dt} = f_2'(t)$, $\frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} = f_2''(t)$ és $\frac{dg_2(u)}{du} = g_2'(u)$, $\frac{d^2 g_2(u)}{du^2} = g_2''(u)$.

Olyan súlyfüggvényt kell alkalmazni, amelyekre (az előző jelöléseket használva):

$$\begin{aligned} f_2(0) = 0, \quad f_2(1) = 1 \quad f_1(t) + f_2(t) &\equiv 1 \\ f_2'(0) = f_2'(1) &= 0 \\ f_2''(0) = f_2''(1) &= 0 \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} g_2(0) = 0, \quad g_2(1) = 1 \quad g_1(u) + g_2(u) &\equiv 1 \\ g_2'(0) = g_2'(1) &= 0 \\ g_2''(0) = g_2''(1) &= 0 \end{aligned}$$

(5.1.2)

Ahhoz, hogy az $\mathbf{R}(t, u)$ és $\mathbf{r}_1(t, u)$ $\{\mathbf{r}_2(t, u)\}$ felületek az $u = 0$ $\{u = 1\}$ paramétervonalak mentén másodrendben folytonosan kapcsolódjanak, az $\mathbf{R}_{uu}(t, 0) = \mathbf{r}_{1,uu}(t, 0)$ $\{\mathbf{R}_{uu}(t, 1) = \mathbf{r}_{2,uu}(t, 1)\}$ egyenlőségnek kell teljesülnie.

Adott – a $[0, 1] \times [0, 1]$ tartományon értelmezett, kétszer parciálisan deriválható $\mathbf{r}_1(t, u)$ és $\mathbf{r}_2(t, u)$ kétparaméteres vektor-skalár függvényekkel – két felületdarab, valamint – a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett, kétszer differenciálható $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ vektor-skalár függvényekkel – két görbe.

Keresünk olyan $\mathbf{R}(t, u)$ felületet, amelynek határoló görbéi: $\mathbf{r}_1(t, 0)$, $\mathbf{r}_2(t, 1)$, $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$.

A felületfoltot a következő egyenlettel definiáljuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t, u) = & [f_1(t) \quad f_2(t)] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_3(u) \\ \mathbf{r}_4(u) \end{bmatrix} + [\mathbf{r}_1(t, u) \quad \mathbf{r}_2(t, u)] \cdot \begin{bmatrix} g_1(u) \\ g_2(u) \end{bmatrix} - \\ & - [f_1(t) \quad f_2(t)] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(0, u) & \mathbf{r}_2(0, u) \\ \mathbf{r}_1(1, u) & \mathbf{r}_2(1, u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1(u) \\ g_2(u) \end{bmatrix} \\ & t, u \in [0, 1] \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

5. 1. 6. tétel *Ha az $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ térgörbék C^2 -folytonosan kapcsolódnak az $\mathbf{r}_1(t, u)$ felület $t = 0$ és $t = 1$ határvonalához, akkor az (5.1.3) vektoregyenlettel definiált $\mathbf{R}(t, u)$ felület az $\mathbf{r}_1(t, u)$ felülethez C^2 -folytonosan kapcsolódik az $\mathbf{r}_1(t, 0)$, $t \in [0, 1]$, határgörbe mentén, ahol a súlyfüggvények eleget tesznek az (5.1.2) feltételeknek [38].*

Bizonyítás Képezzük az $\mathbf{R}(t, u)$ függvény tiszta másodrendű u -szerinti parciális deriváltját:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{uu}(t, u) = & g_1''(u) \cdot \mathbf{r}_1(t, u) + 2g_1'(u) \cdot \mathbf{r}_{1,u}(t, u) + g_1(u) \cdot \mathbf{r}_{1,uu}(t, u) + \\ & + g_2''(u) \cdot \mathbf{r}_2(t, u) + 2g_2'(u) \cdot \mathbf{r}_{2,u}(t, u) + g_2(u) \cdot \mathbf{r}_{2,uu}(t, u) + \\ & + f_1(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_3(u) + f_2(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_4(u) - \\ & - f_1(t) \cdot [g_1(u) \cdot \mathbf{r}_{1,uu}(0, u) + 2g_1'(u) \cdot \mathbf{r}_{1,u}(0, u) + g_1''(u) \cdot \mathbf{r}_1(0, u)] - \\ & - f_1(t) \cdot [g_2(u) \cdot \mathbf{r}_{2,uu}(0, u) + 2g_2'(u) \cdot \mathbf{r}_{2,u}(0, u) + g_2''(u) \cdot \mathbf{r}_2(0, u)] - \\ & - f_2(t) \cdot [g_1(u) \cdot \mathbf{r}_{1,uu}(1, u) + 2g_1'(u) \cdot \mathbf{r}_{1,u}(1, u) + g_1''(u) \cdot \mathbf{r}_1(1, u)] - \\ & - f_2(t) \cdot [g_2(u) \cdot \mathbf{r}_{2,uu}(1, u) + 2g_2'(u) \cdot \mathbf{r}_{2,u}(1, u) + g_2''(u) \cdot \mathbf{r}_2(1, u)] \end{aligned}$$

- Ha $u = 0$ és a súlyfüggvényekre vonatkozó (5.1.2) feltételeket figyelembe vesszük, akkor:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{uu}(t, 0) = & \mathbf{r}_{1,uu}(t, 0) + f_1(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_3(0) + f_2(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_4(0) - f_1(t) \cdot \mathbf{r}_{1,uu}(0, 0) - f_2(t) \cdot \mathbf{r}_{1,uu}(1, 0) = \\ = & \mathbf{r}_{1,uu}(t, 0) + [f_1(t) \quad f_2(t)] \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_3(0) \\ \ddot{\mathbf{r}}_4(0) \end{bmatrix} - [f_1(t) \quad f_2(t)] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1,uu}(0, 0) \\ \mathbf{r}_{1,uu}(1, 0) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mivel az $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ térgörbék C^2 -folytonosan kapcsolódnak az $\mathbf{r}_1(t, u)$ felület $t = 0$ és $t = 1$ határvonalához, ezért $\ddot{\mathbf{r}}_3(0) = \mathbf{r}_{1,uu}(0, 0)$ és $\ddot{\mathbf{r}}_4(0) = \mathbf{r}_{1,uu}(1, 0)$.

Így $\mathbf{R}_{uu}(t, 0) = \mathbf{r}_{1,uu}(t, 0)$, ami azt igazolja, hogy az $\mathbf{R}(t, u)$ réskitöltő felület másodrendben folytonosan kapcsolódik az $\mathbf{r}_1(t, u)$ felülethez az $u = 0$ paramétervonal mentén. \square

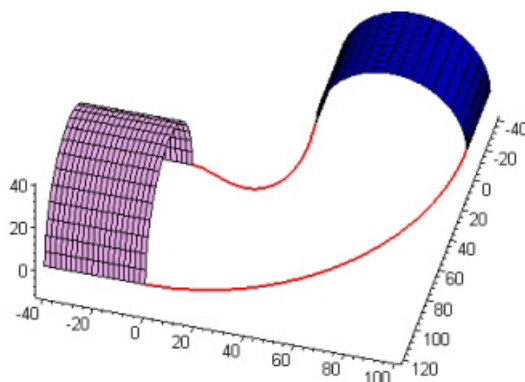
5. 1. 7. tétel *Ha az $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ térgörbék C^2 -folytonosan kapcsolódnak az $\mathbf{r}_2(t, u)$ felület $t = 0$ és $t = 1$ határvonalához, akkor az (5.1.3) vektoregyenlettel definiált $\mathbf{R}(t, u)$ felület az $\mathbf{r}_2(t, u)$ felülethez C^2 -folytonosan kapcsolódik az $\mathbf{r}_2(t, 1)$, $t \in [0, 1]$, határgörbe mentén, ahol a súlyfüggvények kielégítik az (5.1.2) egyenleteket.*

Bizonyítás Az 5.1.6.tétel bizonyításával analóg. \square

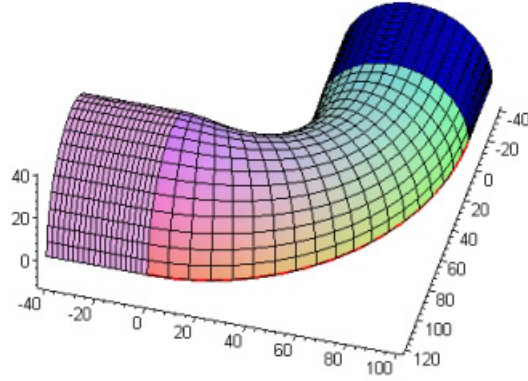
A 49. ábrán a két felületfolt és a hozzájuk C^2 -folytonosan kapcsolódó két görbe látható. Az 50. ábra a rés C^2 -folytonos kitöltését szemlélteti.

Példáinkban az (5.1.3) egyenlettel megadott felületek elkészítésekor ötödfokú Hermite polinomokat használtunk súlyfüggvényekként:

$$\begin{aligned} f_2(t) &= 6t^5 - 15t^4 + 10t^3, & f_1(t) &= 1 - f_2(t) \\ g_2(u) &= 6u^5 - 15u^4 + 10u^3, & g_1(u) &= 1 - g_2(u) \end{aligned}$$



49. ábra: A két felülethez C^2 -folytonosan kapcsolódó görbék



50. ábra: A rés C^2 -folytonos kitöltése

Felmerül a kérdés: vajon csak polinomiális súlyfüggvények esetén hozható létre C^2 -folytonos illeszkedés?

Igazolható, hogy ha az (5.1.1) vektorfüggvényhez egy újabb tagot veszünk, azaz a korrekciós függvényt kibővítjük, akkor trigonometrikus súlyfüggvényekkel is létrehozható a C^2 -folytonos kapcsolódás megfelelő bemenő adatok esetén.

Ekkor a felületfoltot a következő vektorfüggvénnyel adhatjuk meg:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(t, u) = & \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_3(u) \\ \mathbf{r}_4(u) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(t, u) & \mathbf{r}_2(t, u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \end{bmatrix} - \\
 & - \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(0, u) & \mathbf{r}_2(0, u) \\ \mathbf{r}_1(1, u) & \mathbf{r}_2(1, u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \end{bmatrix} + \\
 & + s(u) \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot \left\{ \mathbf{r}_1(t, u) - \mathbf{r}_2(t, u) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot [\mathbf{r}_1(0, u) - \mathbf{r}_2(0, u)] - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot [\mathbf{r}_1(1, u) - \mathbf{r}_2(1, u)] \right\}
 \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

$$\text{ahol } s(u) := \frac{1}{8\pi^2} \cdot (-2u + 1)^3 \cdot \sin^2(\pi(2u + 1)).$$

5. 1. 8. tétel Ha az $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ térgörbék C^2 -folytonosan kapcsolódnak az $\mathbf{r}_1(t, u)$ felület $t = 0$ és $t = 1$ határvonalához, akkor az (5.1.4) vektoregyenlettel definiált $\mathbf{R}(t, u)$ felület az $\mathbf{r}_1(t, u)$ felülethez C^2 -folytonosan kapcsolódik az $\mathbf{r}_1(t, 0)$, $t \in [0, 1]$, határgörbe mentén [37].

Bizonyítás

- Tekintsük az $s(u)$ függvény $u = 0$ és $u = 1$ helyekhez tartozó értékeit.

$$s(0) = \frac{1}{8\pi^2} \cdot 1^3 \cdot \sin^2 \pi = 0$$

$$s(1) = \frac{1}{8\pi^2} \cdot (-1)^3 \cdot \sin^2 3\pi = 0$$

Ezért az (5.1.4) vektoregyenlettel adott $\mathbf{R}(t, u)$ felület határgörbái – az 5.1.1. tétel bizonyítása alapján – az $\mathbf{r}_1(t, 0)$, $\mathbf{r}_2(t, 1)$, $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ görbék.

- Vizsgáljuk az $s(u)$ függvény deriváltját is az $u = 0$ és $u = 1$ helyeken:

$$\frac{ds(u)}{du} = s'(u) = -\frac{3}{4\pi^2} \cdot (-2u+1)^2 \cdot \sin^2(\pi(2u+1)) + \frac{1}{4\pi} \cdot (-2u+1)^3 \cdot \sin(2\pi(2u+1))$$

$$s'(0) = -\frac{3}{4\pi^2} \cdot 1^2 \cdot \sin^2 \pi + \frac{1}{4\pi} \cdot 1^3 \cdot \sin 2\pi = 0$$

$$s'(1) = -\frac{3}{4\pi^2} \cdot (-1)^2 \cdot \sin^2 3\pi + \frac{1}{4\pi} \cdot (-1)^3 \cdot \sin 6\pi = 0$$

Ezért az (5.1.4) vektorfüggvény az 5.1.2. tétel bizonyítása alapján C^1 -folytonosan kapcsolódik a két adott felület határgörbéjéhez.

- Vizsgáljuk $s(u)$ másodrendű deriváltját:

$$\begin{aligned} \frac{d^2s(u)}{du^2} = s''(u) &= \frac{3}{\pi^2} \cdot (-2u+1) \cdot \sin^2(\pi(2u+1)) - \frac{3}{2\pi} \cdot (-2u+1)^2 \cdot \sin(2\pi(2u+1)) - \\ &\quad - \frac{3}{2\pi} \cdot (-2u+1)^2 \cdot \sin(2\pi(2u+1)) + (-2u+1)^3 \cdot \cos(2\pi(2u+1)) \end{aligned}$$

$$s''(0) = \frac{3}{\pi^2} \cdot 1 \cdot \sin \pi - \frac{6}{2\pi} \cdot 1^2 \cdot \sin 2\pi + 1^3 \cdot \cos 2\pi = 1$$

$$s''(1) = \frac{3}{\pi^2} \cdot (-1) \cdot \sin 3\pi - \frac{6}{2\pi} \cdot (-1)^2 \cdot \sin 6\pi + (-1)^3 \cdot \cos 6\pi = -1$$

- Ezek után vizsgáljuk az (5.1.4) vektoregyenlettel adott $\mathbf{R}(t, u)$ függvény tiszta másodrendű u -szerinti parciális deriváltjának $u = 0$ helyen vett értékét:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{uu}(t, 0) &= -\frac{\pi^2}{2} \cdot \mathbf{r}_1(t, 0) + \mathbf{r}_{1,uu}(t, 0) + \frac{\pi^2}{2} \cdot \mathbf{r}_2(t, 0) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_3(0) + \\
&\quad + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_4(0) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \left[\mathbf{r}_{1,uu}(0, 0) - \frac{\pi^2}{2} \cdot \mathbf{r}_1(0, 0) \right] - \\
&\quad - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_2(0, 0) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \left[\mathbf{r}_{1,uu}(1, 0) - \frac{\pi^2}{2} \cdot \mathbf{r}_1(1, 0) \right] - \\
&\quad - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot \mathbf{r}_2(1, 0) + \\
&\quad + \frac{\pi^2}{2} \cdot \left\{ \mathbf{r}_1(t, 0) - \mathbf{r}_2(t, 0) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot [\mathbf{r}_1(0, 0) - \mathbf{r}_2(0, 0)] - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot [\mathbf{r}_1(1, 0) - \mathbf{r}_2(1, 0)] \right\} = \\
&= \mathbf{r}_{1,uu}(t, 0) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_3(0) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_4(0) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_{1,uu}(0, 0) - \\
&\quad - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_{1,uu}(1, 0) = \mathbf{r}_{1,uu}(t, 0) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot [\ddot{\mathbf{r}}_3(0) - \mathbf{r}_{1,uu}(0, 0)] + \\
&\quad + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot [\ddot{\mathbf{r}}_4(0) - \mathbf{r}_{1,uu}(1, 0)] = \mathbf{r}_{1,uu}(t, 0)
\end{aligned}$$

mivel az $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ görbék C^2 -folytonosan kapcsolódnak az $\mathbf{r}_1(t, u)$ felület $t = 0$ és $t = 1$ határvonalához.

Ez pedig azt igazolja, hogy az (5.1.4) egyenlettel adott $\mathbf{R}(t, u)$ réskitöltő felület is C^2 -folytonosan kapcsolódik az $\mathbf{r}_1(t, u)$ felülethez az $u = 0$ paramétervonal mentén. \square

Megjegyzés Az $s(u)$ függvényt az előírt peremfeltételek nem határozzák meg egyértelműen, tulajdonképpen végtelen sok megfelelő $s(u)$ függvény van.

5.1.9. tétel Ha az $\mathbf{r}_3(u)$ és $\mathbf{r}_4(u)$ térgörbék C^2 -folytonosan kapcsolódnak az $\mathbf{r}_2(t, u)$ felület $t = 0$ és $t = 1$ határvonalához, akkor az (5.1.4) vektoregyenlettel definiált $\mathbf{R}(t, u)$ felület az $\mathbf{r}_2(t, u)$ felülethez C^2 -folytonosan kapcsolódik az $\mathbf{r}_2(t, 1)$, $t \in [0, 1]$, határgörbe mentén.

Bizonyítás Az 5.1.8.tétel bizonyításával analóg. \square

Megjegyzés A rést kitöltő felület elkészítéséhez bemenő adatként a rés két oldalán fekvő felületdaraboknak a $[0, 1] \times [0, 1]$ paramétertartomány feletti kiterjesztésével számoltunk. Ezek a komponensek helyettesíthetők az adott felületekhez megfelelő folytonossággal csatlakozó más felületdarabokkal is. Az egy közös határoló görbe menti felületillesztésre számtalan eljárás ismeretes. Ha pl. az egyik felületdarab nem terjeszthető ki a rés fölé, vagy pl. az eredményt adott típusú (polinom) függvényvel akarjuk leírni, akkor valamely ismert eljárással készítünk egy egy oldalról megfelelően csatlakozó felületdarabot az adott felület mellé annak kiterjesztése helyett.

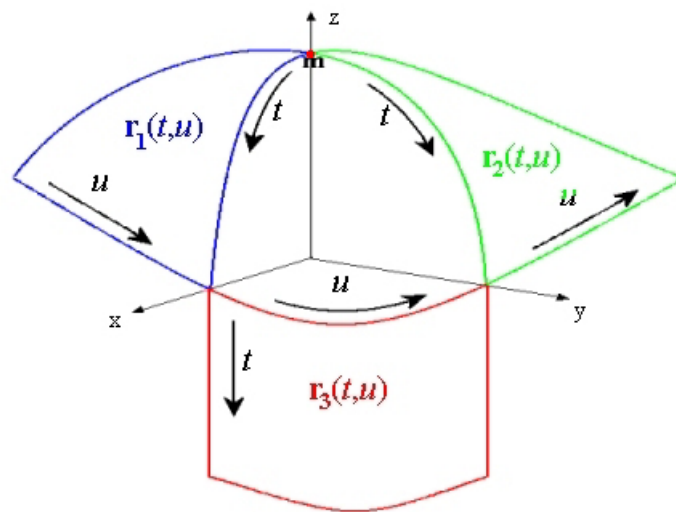
5.2 Háromoldalú lyuk kitöltése

Az úgynevezett bőröndsarok probléma már régóta foglalkoztatja a tervezőket. Egyfajta speciális megoldást mi is alkalmaztunk a 4.1 fejezetben. Azonban az, ha olyan háromoldalú lyukat kell kitölteni, amely folytonosan kapcsolódik a lyukat körülvevő felületekhez, másfajta megközelítést igényel.

Az itt bemutatásra kerülő módszer megoldást ad erre a problémára [37]. A lyukkitöltő felületet a három adott felület konvex kombinációjaként állítjuk elő úgy, hogy az kapcsolódik az adott felületekhez a határgörbéik mentén.

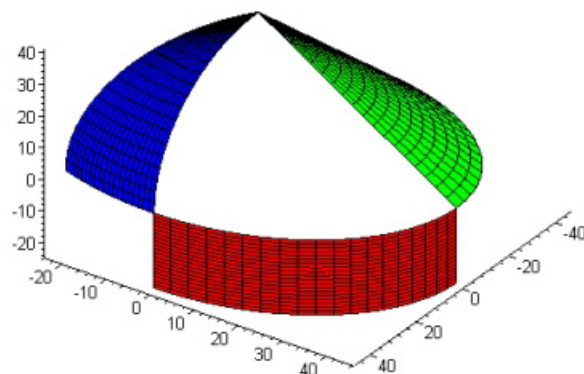
Feltesszük, hogy az adott felületek a parciálisan differenciálható $\mathbf{r}_i(t, u)$ $i = 1, 2, 3$ vektor-skalár függvényekkel adottak, ahol $(t, u) \in [t_1, t_2] \times [u_1, u_2]$, és ez a tartomány tartalmazza a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzetet. A megkötés az algoritmusban az, hogy az adott felületek közül két felület háromoldalú degenerált felület legyen, amelyek egyetlen sarokpontjukkal találkoznak a lyuk sarkában. (51.ábra) Ezek például részei két különböző forgásfelületnek, amelyek degenerált derékszögű foltként jelennek meg (a CAD rendszerekben általában ez az eset fordul elő), vagy háromszög alakú foltok, amelyek külön-külön G^1 -folytonosan kapcsolódnak a lyukat határoló harmadik felülethez. (Ehhez egy paramétertranszformációval áttérünk baricentrikus koordinátákra: a háromszög tartomány egy (t, u) koordinátájú pontját egy (p, q, r) , $0 \leq p, q, r \leq 1$ és $p + q + r = 1$ számhármassal reprezentáljuk.)

Esetünkben az adott 3 felületfolt konvex kombinációja az alapnégyzeten értelmezett, a korrekciós függvény pedig a határoló görbékből készült trigonometrikus szorzótényezőkkel adott. Az eredményül kapott lyukkitöltő felület egy degenerált derékszögű folt, ahol a határoló $t = 0$ vonal csak egy pont, a háromoldalú lyuk egy sarokpontja.

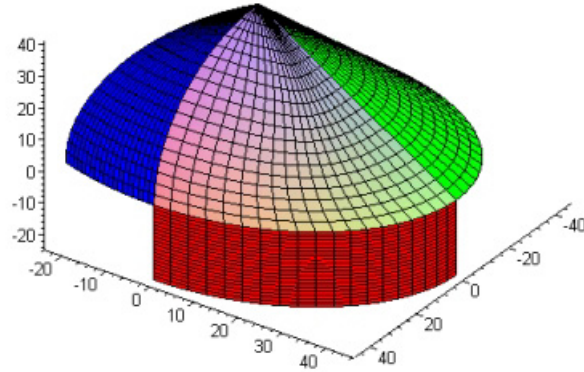


51. ábra: Három felület által határolt lyuk

Az 52. ábrán egy olyan lyuk látható, amelyet balról egy ellipszoid, jobbról egy kúp, alulról pedig egy henger határol. Az 53. ábra jól mutatja, hogyan „simul” az egyes felületdarabokhoz a lyukat kitöltő folt.



52. ábra: Ellipszoid, kúp és henger által határolt háromszöglyuk



53. ábra: A lyukat kitöltő felületfolt a határoló felületdarabokkal

Adott három felület az $\mathbf{r}_1(t, u)$, $\mathbf{r}_2(t, u)$, $\mathbf{r}_3(t, u)$ parciálisan differenciálható vektorfüggvényekkel, amelyek paramétertartománya a $[0, 1] \times [0, 1]$ alpnégyszetet tartalmazza, és a sarokpontokra:

$$\mathbf{r}_1(0, u) = \mathbf{r}_2(0, u) = \mathbf{m}, \quad \mathbf{r}_1(1, 0) = \mathbf{r}_3(1, 0) \quad \text{és} \quad \mathbf{r}_2(1, 1) = \mathbf{r}_3(1, 1).$$

Keresünk olyan $\mathbf{R}(t, u)$ felületfoltot, amelynek határoló görbéi az $\mathbf{r}_1(t, 0)$, $\mathbf{r}_2(t, 1)$ és $\mathbf{r}_3(1, u)$ görbék.

5. 2. 1. tétel Az $\mathbf{R}(t, u) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(t, u) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(t, u) +$
 $+ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_3(t, u) -$
 $- \left\{ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot [\mathbf{r}_3(t, 0) - \mathbf{r}_1(t, 0)] + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot [\mathbf{r}_3(t, 1) - \mathbf{r}_2(t, 1)] \right\}$
 $(t, u) \in [0, 1] \times [0, 1]$ (5.2.1)

vektoregyenlettel definiált felület a kívánt feltételeket kielégíti.

Bizonyítás Az $\mathbf{R}(t, u)$ vektorfüggvény határvonalait kell kiszámolnunk a megfelelő paraméterek behelyettesítésével.

- Ha $t = 0$, $u \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(0,u) &= 1 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(0,u) + 1 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(0,u) + 0 \cdot \mathbf{r}_3(0,u) - \\ &\quad - \left\{ 0 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot [\mathbf{r}_3(0,0) - \mathbf{r}_1(0,0)] + 0 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot [\mathbf{r}_3(0,1) - \mathbf{r}_2(0,1)] \right\}. \end{aligned}$$

A sarokpontokban:

$$\text{ha } u = 0, \quad \mathbf{R}(0,0) = \mathbf{r}_1(0,0)$$

$$\text{ha } u = 1, \quad \mathbf{R}(0,1) = \mathbf{r}_1(0,1).$$

- A $t = 0$ paramétervonal csak akkor ad egyetlen pontot, ha az $\mathbf{r}_1(0,u)$ és $\mathbf{r}_2(0,u)$ $u \in [0, 1]$, egy közös \mathbf{m} ponttá fajulnak el. A kombináció két alkotórészére ezt a megközelítést kell tennünk.

A másik három határoló görbe a következő:

- Ha $t = 1$, $u \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(1,u) &= \cos^2\frac{\pi}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(1,u) + \cos^2\frac{\pi}{2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(1,u) + \sin^2\frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_3(1,u) - \\ &\quad - \left\{ \sin^2\frac{\pi}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot [\mathbf{r}_3(1,0) - \mathbf{r}_1(1,0)] + \sin^2\frac{\pi}{2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot [\mathbf{r}_3(1,1) - \mathbf{r}_2(1,1)] \right\} = \mathbf{r}_3(1,u) \end{aligned}$$

a sarokpontokat figyelembe véve.

- Ha $u = 0$, $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t,0) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot 1 \cdot \mathbf{r}_1(t,0) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot 0 \cdot \mathbf{r}_2(t,0) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_3(t,0) - \\ &\quad - \left\{ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot 1 \cdot [\mathbf{r}_3(t,0) - \mathbf{r}_1(t,0)] + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot 0 \cdot [\mathbf{r}_3(t,1) - \mathbf{r}_2(t,1)] \right\} = \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_1(t,0) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_3(t,0) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_3(t,0) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_1(t,0) = \\ &= \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right] \cdot \mathbf{r}_1(t,0) = \mathbf{r}_1(t,0) \end{aligned}$$

- Ha $u = 1$, $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t,1) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos^2\frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_1(t,1) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin^2\frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_2(t,1) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_3(t,1) - \\ &\quad - \left\{ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos^2\frac{\pi}{2} \cdot [\mathbf{r}_3(t,0) - \mathbf{r}_1(t,0)] + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin^2\frac{\pi}{2} \cdot [\mathbf{r}_3(t,1) - \mathbf{r}_2(t,1)] \right\} = \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_2(t,1) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_3(t,1) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_3(t,1) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_2(t,1) = \\ &= \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right] \cdot \mathbf{r}_2(t,1) = \mathbf{r}_2(t,1). \quad \square \end{aligned}$$

Az 54. ábrán látható lyukat egy kúp, egy síkháromszög és egy henger határolja. Ezek a felüldarabok a következőképpen vannak paraméterezve:

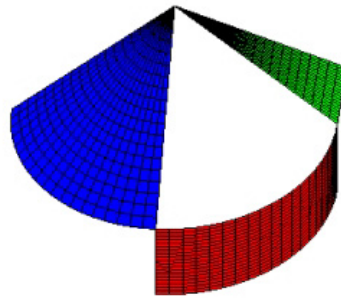
Az $\mathbf{r}_1(t, u)$ kúp: $(t, u) \in [0, 1] \times [-1, 0]$,

az $\mathbf{r}_2(t, u)$ sík: $(t, u) \in [0, 1] \times [1, 2]$,

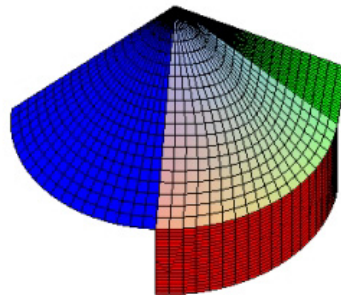
az $\mathbf{r}_3(t, u)$ henger: $(t, u) \in [1, 2] \times [0, 1]$.

Az 55. ábra a lyuk folytonos kitöltését mutatja.

Megjegyzés Ha a háromszöglyukat körülvevő felületek ugyanazon gömb részei – ugyanazon paraméterezés esetén –, akkor a (5.2.1) vektoregyenlettel definiált felület is ugyanazon gömb része.



54. ábra: Kúp, síkháromszög és henger határolta lyuk



55. ábra: A három felület és a hozzájuk csatlakozó folt

5. 2. 2. tétel *Ha a háromszöglyukat kitöltő (5.2.1) $\mathbf{R}(t,u)$ felületre az*

$$\mathbf{r}_{1,u}(t,0) \parallel \mathbf{r}_{3,u}(t,0) \quad \text{és} \quad \mathbf{r}_{2,u}(t,1) \parallel \mathbf{r}_{3,u}(t,1)$$

párhuzamossági feltételek, valamint az

$$\mathbf{r}_{1,t}(1,0) = \mathbf{r}_{3,t}(1,0) \quad \text{és} \quad \mathbf{r}_{2,t}(1,1) = \mathbf{r}_{3,t}(1,1)$$

egyenlőségek állnak fenn, akkor az $\mathbf{R}(t,u)$ lyukkitöltő felület a lyukat G^1 -folytonosan tölti ki.

Bizonyítás Vizsgáljuk meg a háromszöglyuk mindhárom csatlakozó görbéje mentén a felületi normálisokat!

- Először az $\mathbf{r}_1(t,u)$ felület $u = 0$ határvonala mentén. Mivel az 5.2.1. tétel értelmében

$$\mathbf{R}(t,0) = \mathbf{r}_1(t,0), \quad \text{ezért} \quad \mathbf{R}_t(t,0) = \mathbf{r}_{1,t}(t,0) \quad \text{is teljesül.}$$

Tekintsük az u -szerinti parciális deriváltat:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u(t,u) = & -\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin(\pi \cdot u) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_1(t,u) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_{1,u}(t,u) + \\ & + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin(\pi \cdot u) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_2(t,u) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_{2,u}(t,u) + \\ & + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_{3,u}(t,u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin(\pi \cdot u) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot [\mathbf{r}_3(t,0) - \mathbf{r}_1(t,0)] - \\ & - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin(\pi \cdot u) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot [\mathbf{r}_3(t,1) - \mathbf{r}_2(t,1)] \end{aligned}$$

- Ha $u = 0$, $t \in]0, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u(t,0) = & -\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot 0 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_1(t,0) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot 1 \cdot \mathbf{r}_{1,u}(t,0) + \\ & + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot 0 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_2(t,0) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot 0 \cdot \mathbf{r}_{2,u}(t,0) + \\ & + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_{3,u}(t,0) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot 0 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot [\mathbf{r}_3(t,0) - \mathbf{r}_1(t,0)] - \\ & - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot 0 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot [\mathbf{r}_3(t,1) - \mathbf{r}_2(t,1)] = \\ = & \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_{1,u}(t,0) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_{3,u}(t,0) \end{aligned}$$

Mivel a feltétel miatt $\mathbf{r}_{1,u}(t,0) \parallel \mathbf{r}_{3,u}(t,0)$, ezért $\mathbf{R}_u(t,0) \parallel \mathbf{r}_{1,u}(t,0)$ szintén teljesül.

Tehát az $\mathbf{R}(t,u)$ és $\mathbf{r}_1(t,u)$ felületek felületi normálisai az $u = 0$, $0 < t \leq 1$ kapcsolóvonal mentén szintén párhuzamosak, így az érintősík folytonosan változik, ami éppen a G^1 -folytonosságot jelenti.

- Vizsgáljuk $u = 1$ esetén az $\mathbf{r}_2(t, u)$ felület határgörbéje mentén a folytonosságot!
Az 5.2.1. tétel értelmében $\mathbf{R}(t, 1) = \mathbf{r}_2(t, 1)$, ezért $\mathbf{R}_t(t, 1) = \mathbf{r}_{2,t}(t, 1)$ is teljesül.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u(t, 1) &= -\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin \pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_1(t, 1) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_{1,u}(t, 1) + \\ &\quad + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin \pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_2(t, 1) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_{2,u}(t, 1) + \\ &\quad + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_{3,u}(t, 1) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin \pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot [\mathbf{r}_3(t, 0) - \mathbf{r}_1(t, 0)] - \\ &\quad - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin \pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot [\mathbf{r}_3(t, 1) - \mathbf{r}_2(t, 1)] = \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_{2,u}(t, 1) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_{3,u}(t, 1). \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{r}_{2,u}(t, 1) \parallel \mathbf{r}_{3,u}(t, 1)$ a feltétel miatt teljesül, így $\mathbf{R}_u(t, 1) \parallel \mathbf{r}_{2,u}(t, 1)$, azaz a felületi normálisok az $u = 1$, $0 < t \leq 1$ kapcsológörbe mentén párhuzamosak. Ez pedig G^1 -folytonosságot jelent $\mathbf{r}_2(t, u)$ és $\mathbf{R}(t, u)$ között az $u = 1$, $t \in]0, 1]$ határgörbe mentén.

- Az 5.2.1. tételben igazoltuk, hogy $\mathbf{R}(1, u) = \mathbf{r}_3(1, u)$ ha $u \in [0, 1]$,
ezért $\mathbf{R}_u(1, u) = \mathbf{r}_{3,u}(1, u)$ is teljesül.

Tekintsük a t -szerinti parciális deriváltat:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t(t, u) &= -\sin(\pi \cdot t) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(t, u) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_{1,t}(t, u) - \\ &\quad - \sin(\pi \cdot t) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(t, u) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_{2,t}(t, u) + \\ &\quad + \sin(\pi \cdot t) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_3(t, u) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \mathbf{r}_{3,t}(t, u) - \\ &\quad - \sin(\pi \cdot t) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot [\mathbf{r}_3(t, 0) - \mathbf{r}_1(t, 0)] - \\ &\quad - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot [\mathbf{r}_{3,t}(t, 0) - \mathbf{r}_{1,t}(t, 0)] + \\ &\quad + \sin(\pi \cdot t) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot [\mathbf{r}_3(t, 1) - \mathbf{r}_2(t, 1)] - \\ &\quad - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot [\mathbf{r}_{3,t}(t, 1) - \mathbf{r}_{2,t}(t, 1)] \end{aligned}$$

- Ha $t = 1$, $u \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t(1, u) &= -\sin \pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_1(1, u) + \cos^2 \frac{\pi}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_{1,t}(1, u) - \\ &\quad - \sin \pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_2(1, u) + \cos^2 \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u\right) \cdot \mathbf{r}_{2,t}(1, u) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin \pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_3(1, u) + \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{r}_{3,t}(1, u) - \\
& - \sin \pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cdot u \right) \cdot [\mathbf{r}_3(1, 0) - \mathbf{r}_1(1, 0)] - \\
& - \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cdot u \right) \cdot [\mathbf{r}_{3,t}(1, 0) - \mathbf{r}_{1,t}(1, 0)] + \\
& + \sin \pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \cdot u \right) \cdot [\mathbf{r}_3(1, 1) - \mathbf{r}_2(1, 1)] - \\
& - \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \cdot u \right) \cdot [\mathbf{r}_{3,t}(1, 1) - \mathbf{r}_{2,t}(1, 1)] = \\
& = \mathbf{r}_{3,t}(1, u) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cdot u \right) \cdot [\mathbf{r}_{3,t}(1, 0) - \mathbf{r}_{1,t}(1, 0)] - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \cdot u \right) \cdot [\mathbf{r}_{3,t}(1, 1) - \mathbf{r}_{2,t}(1, 1)] = \\
& = \mathbf{r}_{3,t}(1, u),
\end{aligned}$$

ha figyelembe vesszük a feltételben szereplő egyenlőségeket. Így a $t = 1$ határgörbe mentén a felületi normálisok is megegyeznek, ami C^1 -folytonosságot jelent az $\mathbf{R}(t, u)$ és $\mathbf{r}_3(t, u)$ felületek között.

- A háromoldalú lyuk azon sarokpontjában, amelyet a $t = 0$ vonal mint egyetlen pont ad, két eset lehetséges:
 - Ha az $\mathbf{r}_1(t, u)$ és $\mathbf{r}_2(t, u)$ felületek valamelyikének nincs érintő síkja, vagy az érintő síkjaik különbözőek az adott $t = 0$ pontban, akkor az eredményül kapott lyukkitöltő felületnek sincs érintő síkja ugyanabban a pontban.
 - Ha a $t = 0$ pontban az $\mathbf{r}_1(t, u)$ és $\mathbf{r}_2(t, u)$ felületeknek mint ponthalmazoknak van érintő síkja, csak a leíró vektorfüggvény egyik parciális deriváltja zérusvektor, akkor ebben a pontban a felületi merőleges egységvektorokat a következőképpen definiálhatjuk:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\mathbf{r}_{1,t}(t, u_0) \times \mathbf{r}_{1,u}(t, u_0))^0$$

és

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\mathbf{r}_{2,t}(t, u_0) \times \mathbf{r}_{2,u}(t, u_0))^0,$$

ahol $u_0 \in [0, 1]$ és a 0 a kitevőben a vektorok normalizációját jelenti.

A feltétel szerint a két felületnek van közös érintő síkja a háromszöglyuk ezen pontjában, következésképpen ez a két vektor egyenlő a közös felületi merőlegessel, melyet \mathbf{n} jelöl. Megmutatjuk, hogy az $\mathbf{R}(t, u)$ lyukkitöltő felületnek ugyanaz az érintő síkja ebben a pontban. Ehhez meghatározzuk a $t = 0$ pontban mindkét paraméterirányban az érintővektorokat:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{R}_t(t, u_0) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u_0\right) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}_{1,t}(t, u_0) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u_0\right) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}_{2,t}(t, u_0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{R}_u(t, u_0) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u_0\right) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}_{1,u}(t, u_0) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot u_0\right) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}_{2,u}(t, u_0),$$

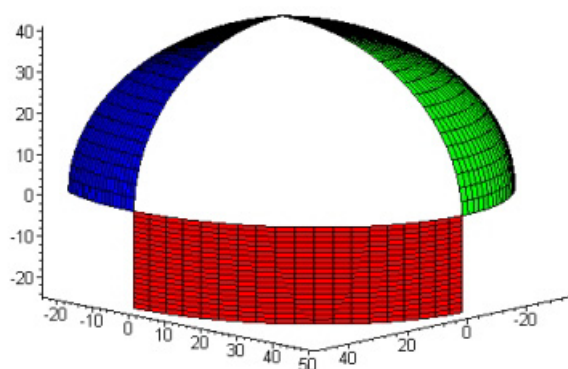
ahol $u_0 \in [0, 1]$ és felhasználtuk a határértékképzés műveleti tulajdonságai mellett a sarokpontra tett megállapítást is.

A felületi normális:

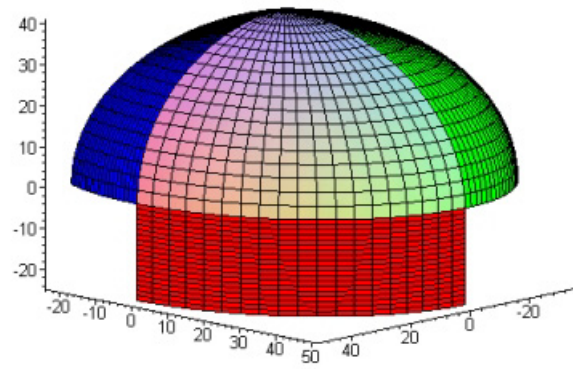
$$\lim_{t \rightarrow 0} (\mathbf{R}_t(t, u_0) \times \mathbf{R}_u(t, u_0))^0.$$

Az $u = u_0$ paramétervonal mentén a $t = 0$ pont felé haladva a felületi normális határértéke párhuzamos az \mathbf{n} vektorral, mert a vektoriális szorzatban a vektor mindkét komponense merőleges \mathbf{n} -re. Következésképpen az $\mathbf{R}(t, u)$ lyukkitöltő felületnek ugyanaz az érintősíkja a $(t, u) = (0, 0)$ pontban, mint az $\mathbf{r}_1(t, u)$ és $\mathbf{r}_2(t, u)$ felületeknek. \square

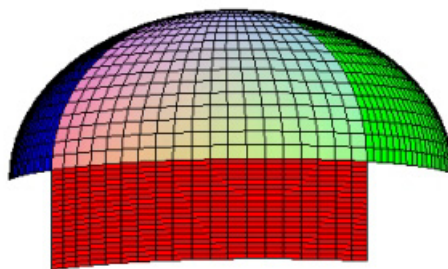
Az 56. ábrán látható háromoldalú felületek ellipszoidok, a négyoldalú felület pedig henger. Az ábrán a baloldali ellipszoid paramétertartománya: $[0, 1] \times [-1, 0]$, a jobboldalié: $[0, 1] \times [1, 2]$, a hengeré: $[1, 3] \times [0, 1]$. Az (5.2.1) vektoregyenlettel létrehozott felületfolt G^1 -folytonosan kapcsolódik a határoló felületekhez. Ez látható az 57. és 58. ábrákon.



56. ábra: Két ellipszoid és egy henger által körülvett lyuk



57. ábra: G^1 -folytonosan kapcsolódó folt



58. ábra: Ugyanaz, más nézetben

6 A kidolgozott algoritmusok vizsgálata

6.1 Az algoritmusok elemzése

A számítógépi geometriát többek között a matematikában, a korszerű mérnöki tudományokban, a számítógéppel támogatott tervezésben, a számítógépi grafikában, a robotikában és a statisztikában használják fel.

Módszereinek **bemenete** jellemzően egy geometriai objektumhalmaz leírása, mint például egy ponthalmazé.

A **kimenet** lehet egy új objektum, mint például a pontokat interpoláló görbe, de lehet válasz egy, az objektumokra irányuló kérdésre, mint például, hogy három pont egy egyenesen van-e, vagy egy körre illeszkedik.

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy milyen kiindulási pontrendszer esetén alkalmazható a 2. fejezetben leírt algoritmus, mikor állítható elő a kívánt görbe, valamint egy poligon csúcsainak lekerekítésekor milyen feltételek mellett használható a trigonometrikusan súlyozott spline előállítására kidolgozott algoritmus?

1.

Adott a $\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\} \subset \mathbf{E}^3$ interpolációs pontok halmaza.

Keresünk egy trigonometrikus ívekből álló görbület-folytonos görbét.

Az elkészített algoritmus 3–3 egymás utáni pontra illeszkedő kör vagy egyenes konvex kombinációjaként állítja elő a kívánt görbét, trigonometrikus súlyfüggvényeket felhasználva.

Mivel a kör előállításához a kör középpontjára valamint a kapott körívhez tartozó középponti szögre van szükség, felmerül a kérdés, hogy hogyan kell eljárni, ha a 3 pont majdnem kollineáris.

A $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ ponthármas P_i pontnál lévő szöge majdnem 180° vagy majdnem 0° .

Az algoritmus a $\overline{P_iP_{i-1}}$ és a $\overline{P_iP_{i+1}}$ vektorok párhuzamosságát vizsgálja. A Maple V számítógépi szimbolikus algebrai program-rendszert használtuk a számítások elvégzésére (lásd 2. fejezet), amely ilyen kicsi eltérés esetén is kiszámolta a három pont által meghatározott háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontjaként a három pont köré írható kör középpontját. (lásd Függelék 1, Függelék 2). Bár a középpont igen messze került, az $\alpha_i := \angle(P_i, C, P_{i+1})$

szöveget pedig előjelesen értelmeztük, – a program-rendszer *linalg* csomagját felhasználva – az algoritmus a kívánt görbeívet elkészítette.

2.

Az algoritmus kiszámíthatóságának nemcsak elvi matematikai, hanem gyakorlati határai is vannak. Így például nem lehet a műveleti sebességet korlátlanul növelni, vagy a felhasznált objektumok számát a végtelenségig bővíteni. Egy algoritmus csak véges, jól definiált objektumokkal operál.

Az adott $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ interpolációs pontokra trigonometrikus ívekből álló görbület-folytonos görbét illesztünk.

Az algoritmus elindításához 4 adott pontra van szükség. Ekkor a P_2 és P_3 pontok közötti ív csak az adott 4 ponttól függ. A ponthalmaz bővítésével előállíthatjuk a kívánt görbét.

Az elkészített algoritmus működik-e horribilis mennyiségű pont esetén?

Ehhez vizsgáljuk meg, hogy n darab bemenő adatból hány görbeív készül!

a) 4 adott pont: P_1, P_2, P_3, P_4 esetén az algoritmus 7 ívet készít el:

– a P_0, P_1, P_2 pontokon átmenő ív[1]^{bal} majd a P_1, P_2, P_3 pontokon átmenő ív[1]^{jobb} íveket készítjük el. Ezek konvex kombinációja adja a $gív[1](t)$, $t \in [0, 1]$, görbeívet. Ez együtt 3 görbe.

– a P_1, P_2, P_3 ív már kész, most ez lesz az ív[2]^{bal}, a P_2, P_3, P_4 pontokon átmenő ív[2]^{jobb} ívvel a $gív[2](t)$, $t \in [0, 1]$, görbeívet adják. Ez újabb 2 görbeív.

– a P_2, P_3, P_4 pontokon átmenő ív[3]^{bal} már elkészült, a P_3, P_4, P_5 pontokon az ív[3]^{jobb} görbe halad át. Ezek konvex kombinációja a $gív[3](t)$, $t \in [0, 1]$, görbeívet adja, ami újabb 2 görbeívet eredményez.

Azaz 4 bemenő pont esetén 7 kimenő görbeív keletkezik.

b) Egy újabb pont felvételével a görbeívek száma kettővel növekszik, azaz 5 pont esetén 9 görbeívet kell elkészíteni.

c) Ebből már látható, hogy egy n elemű bemenő adathalmazhoz $2n - 1$ elemű kimenő adathalmaz tartozik. Ez az algoritmus időigényére is jó becslést ad.

3.

Az alkalmazási lehetőségeket a számítógéppel segített interaktív tervezés tette teljessé.

Ez kétirányú kommunikációt jelent a számítógép és a felhasználó között: a tervező a géppel megtervez egy alakzatot (sík- vagy térgörbét, esetleg valamilyen felületet), s ha nem találja el-

fogadhatónak a kapott eredményt, lehetősége van rá, hogy a géppel „társalogva” kijavítsa tervét. Azaz a beviteli eszközről érkező jelek vétele után a számítógép a kívánt módon meg tudja változtatni a megjelenített képet. A felhasználónak úgy tűnhet, hogy parancsainak hatására a kép azonnal megváltozik.

A 2.4 fejezetben egy példát mutattunk trigonometrikusan súlyozott interpolációs spline **gyakorlati alkalmazására**. A poligon csúcsainak lekerekítése során a kapott görbe egy érintőlegesen csatlakozó körív és egyenes szakasz párost négy görbeívvel helyettesít. Két olyan görbület-folytonosan csatlakozó átmeneti görbeívet iktat a körív és az egyenes szakasz közé, amely mindkettőt adott ε távolsággal megrövidíti. Ezért a tervezőnek több dologra kell figyelnie. (lásd 12. ábra)

a) Mivel a lekerekítési körök sugarait meg kell adni (ami a szöggel együtt meghatározza a csúcsponttól az érintési pontig terjedő szakasz hosszát), ügyelni kell arra, hogy két egymás utáni csúcstól az érintési pontig terjedő szakasz összegének kisebbnek kell lennie, mint az aktuális két pont távolsága.

b) ε megadásánál is figyelni kell arra, hogy a törött vonal mentén felvett azon interpolációs pontok, amelyek a lekerekítő köríveknek a poligon oldalain lévő érintési pontjai, 2ε -nál távolabb legyenek egymástól. (Ezzel biztosítjuk, hogy a görbe ne tartalmazzon egymást fedő két ívet.)

c) Fent láttuk, hogy a felhasznált Maple V rendszer segítségével az algoritmus „majdnem” egy egyenesre eső pontok esetén is érzékeli az eltérést. Az alkalmazásnál ez nem egészen így működik. Itt nem lehet „nagyon távol” a kör középpontja, hisz a lekerekítés sugarát megadjuk. A lekerekített görbe mint paraméteres függvény és a pontok kapcsolata nem tetszőleges. Úgy kell megváltoztatni, hogy a tervező előre láthassa, adott pont-helyzetváltoztatással milyen görbe-alakváltozást idéz elő.

- Közel 180° -os szög esetén az érintési pontok olyan közel kerülhetnek a csúcsponthoz, hogy a gép a két pont távolságát már nem érzékeli. A lekerekítési körív egy ponttá zsugorodik, ami az algoritmust megzavarja. Ekkor a következőt tehetjük: a Q_i pontot úgy tekintjük, mintha a $\overline{Q_{i-1}Q_{i+1}}$ szakasz pontja lenne. Ekkor a poligon oldalainak száma eggyel csökken, a poligon csúcsait $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{i-1}$ -ig változatlanul hagyjuk, a Q_i pontot kivesszük a halmazból, és egy $i + 1 \rightarrow i$ index transzformációt végrehajtva a pontok számát eggyel csökkentjük. Az így fennmaradó csúcsokra elvégezzük a lekerekítést.

- Közel 0° -os szögnél (a Q_{i+1} pont a Q_{i-1} és Q_i pontok „közé” esik) két esetet kell megkülönböztetnünk. Itt a tervezőnek jobban kell „figyelnie”.
- Ha a Q_i csúcsonál fekvő szög $\geq 0,006^\circ$.
Ekkor a Maple segítségével a lekerekítés már elvégezhető. A lekerekítési kör sugarát megadva a kör középpontja olyan távol eshet a csúcsponttól, hogy az érintési pont már nem esne a poligon oldalára. Itt a lekerekítési kör sugarát addig csökkentjük (pl. felezjük), amíg a keresett érintési pont már a poligon oldalán lesz. Ekkor még az adott ε is elronthatja a lekerekítést. Ezért ennek értékét is addig csökkentjük, míg a b) bekezdésnél leírtak nem teljesülnek.
- Ha $0^\circ < a$ Q_i csúcsonál fekvő szög $< 0,006^\circ$.
Ekkor egy közelítést kell végeznünk. Tekintsük a Q_{i-1} , Q_i , Q_{i+1} pontok Π síkját. A Q_i pontot cseréljük ki egy olyan $Q_{i,2}$ pontra, amelyre a következők teljesülnek:
 $Q_{i,2}$ illeszkedik a $\overline{Q_{i-1}Q_i}$ szakaszra; így $Q_{i,2}$ illeszkedik a Π síkra is;
 $\angle(Q_{i-1}Q_{i,2}, Q_{i+1}) = 0,006^\circ$.
Ez a csere nagy eltérést nem eredményez, (csak a $Q_{i,2}$ és a Q_{i+1} csúcsonál történő lekerekítésnél ad kis eltérést) a lekerekítés viszont az előző pontban leírtak szerint elvégezhető.

6.2 Az algoritmusok és számítási eljárások hatékonyságának vizsgálata

Az algoritmus a bemeneti halmaz elemeiből a kimeneti halmaz elemeit hozza létre. Az, hogy egy adott alkalmazáshoz milyen algoritmus a legjobb, függ az elemek számától, a rendelkezésünkre álló felhasználandó technológiától, valamint attól is, milyen tárolási eszközt akarunk használni. Nemcsak arról van szó, hogy egyes gépek gyorsabbak, hanem arról is, hogy az egyes lépéseket nem arányos idő alatt képesek a gépek megtenni. Van olyan lépés, amely (a hardware-től függően) az egyik gépnél közvetlenül, a másikonál több közbülső lépésen keresztül valósítható meg. A rendszer összteljesítménye ugyanannyira függ a hatékony algoritmus, mint a gyors hardware kiválasztásától.

Számítógép és számítógép óriási mértékben különbözhet egymástól. Ahogy különbözhetnek egymástól az egyes segítségül hívható számítógép-algebrai rendszerek is. A számítógépi algebrai rendszereknek nevezett interaktív programok felhasználói a számokon kívül szimbólumokkal, formulákkal, egyenletekkel stb. is dolgoznak. Sok matematikai fel-

adat, így például a differenciálás, mátrixok invertálása, egyenletrendszerek megoldása különösebb emberi erőfeszítés nélkül gyorsan, nagy pontossággal megoldható.

A számítógép-algebrai rendszerek hathatós segédeszközei mindenkinek, aki matematikai számításokat végez, nagy segítséget nyújtanak a modern elméleti és alkalmazott tudományos kutatásokban, valamint az oktatásban. Hosszú távú célja a matematikai problémák megoldási folyamatának minél nagyobb arányú automatizálása.

Az elmondottak azonban azt a benyomást kelthetik, hogy ezek a rendszerek korlátlan lehetőséget kínálnak, és univerzális eszközként használhatók matematikai problémák megoldására. Ez sajnos téves elképzelés. A számítógépi algebrai rendszerek gyakran komolyan megterhelik az őket futtató számítógépet, mivel rengeteg memóriát és számítási időt igényelnek. A pontos aritmetika ára a kifejezések méretének növekedése és óriási nagy számok megjelenése. Mivel a hardver által kínált aritmetika helyett szoftveres lebegőpontos aritmetikát használnak, az így végrehajtott numerikus számítások 100–1000-szer lassúbbak például a FORTRAN programozási nyelven megírtaknál.

Munkánk során a **Maple** általános célú számítógépi algebrai rendszert használtuk.

Ez egy nyitott architektúrájú számítógép-algebrai rendszer, amely számítógépek széles skáláján futtatható. Programozási nyelvként is alkalmazható új matematikai algoritmusok implementálására.

A Maple nyelve jól strukturált, áttekinthető, magas szintű programozási nyelv, az Algol-ra emlékeztet.

A Maple matematikai tudásának többségét a Maple programozási nyelven kódolták, és függvények formájában a külső könyvtárban helyezték el. Amikor a felhasználónak szüksége van egy könyvtári függvényre, a Maple az esetek többségében van olyan okos, hogy magától betölti a rutint a memóriába. A Maple-t arról is tájékoztatnunk kell, ha valamelyik különálló csomagot kívánjuk elérni (ilyenek a lineáris algebra, grafika stb.) Mindez a Maple-t kompakt, könnyen felhasználható rendszerré teszi. Ami még fontosabb, a Maple csak lényeges dolgokat tárol a memóriában, semmi olyat nem, amire a felhasználó nem kíváncsi.

A Maple rajzoló rutinjai, például a *plot3d* is általában a hardver lebegőpontos aritmetikáját használja. A háromdimenziós ábrák elkészítése két lépésben történik: az első fázisban a mintapontokat számítja ki a rendszer, s egy PLOT3D objektumban helyezi el ezeket. A második fázisban ezt az objektumot jeleníti meg a képernyőn.

A *linalg* csomagban elérhető a legtöbb ismert mátrixművelet: mátrixok szorzása, összeadása, sor- és oszlopműveletek, inverz, stb.

Számos helyen a Maple maga dönt a követendő útról. Például a véges intervallumon végzett határozott integrál kiszámítására is több numerikus eljárása van. A Maple felhasználójaként nem kell törődnünk ezekkel a részletekkel, maga a rendszer megtalálja a helyes utat. Ez a

szemlélet teszi a Maple-t a számítógépen végzett matematikai számítások könnyen megtanulható és könnyen kezelhető eszközévé.

A Maple a számítások közben üzenetet küld a felhasznált memóriáról és a számítási időről. Ezek az üzenetek arról tájékoztatnak bennünket, hogy a Maple szekció kezdete óta mennyi a felhasznált memória byte-okban, valamint mennyi a számítási idő másodpercekben kifejezve.

Egy feladatra adott algoritmus esetén alapvető kérdés, mennyi ideig tart a számolás vagy mekkora ennek memóriaigénye. Bár általában nehéz ezt megbecsülni, mindent meg kell tennünk annak érdekében, hogy számításainkat alkalmas matematikai modellek használatával és hatékony programozással optimalizáljuk.

Általában egy algoritmus által felhasznált idő a bemenet méretével nő, így a program futási idejét bemenete méretének függvényével írjuk le.

A bemenet mérete a bemenő elemek (pontok) n száma.

Egy algoritmus futási ideje egy bizonyos bemenetre a végrehajtott alapl műveletek száma.

Általában a legrosszabb futási időt keressük, azt a leghosszabb időt, amely n bemenő adat esetén az algoritmus lefutásához kell. Ezt azért célszerű választani, mert egy algoritmus legrosszabb futási ideje bármilyen bemenetre a futási idő felső korlátja. Ez biztosítékot ad arra, hogy az algoritmus soha nem fog tovább tartani.

Az adott $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ interpolációs pontokra illeszkedő trigonometrikus ívekből álló görbület-folytonos görbe előállításához $2n - 1$ ívet kell elkészítenünk. Mivel minden görbeív elkészítése ugyanannyi (konstans) számítást igényel, a futási idő n lineáris függvénye, azaz $O(n)$.

Vegyes típusú felületfoltokból álló eltolási felület előállításához először a trigonometrikusan súlyozott spline vezérgörbét készítjük el. Az előzőekben láttuk, hogy ennek futási ideje $O(n)$. A görbe n interpolációs pontjába transzformáljuk a Bézier-görbe kontrollpoligonját, a közbülső pontokban pedig ezek konvex kombinációjaként állítjuk elő. Az ezek segítségével létrehozott $n - 1$ darab vegyes típusú felületfolt elkészítéséhez 4×4 -es mátrixszal való szorzást végzünk, ami konstans időt vesz igénybe. Így összességében a futási idő $O(n)$.

Két vezérgörbével definiált általános eltolási felület elkészítéséhez két trigonometrikusan súlyozott spline vezérgörbét állítunk elő $O(n)$ idő alatt, majd $n - 1$ felületfoltot szintén $O(n)$ idő alatt. Így a felület létrehozásának futási ideje $O(n)$.

A felületek előállítása simasági feltételek felhasználásával már több vizsgálatot igényel. A szabadon formált felület λ_i ($i = 1, \dots, n - 1$) alakparaméterei meghatározására $n - 1$ egyenletből álló lineáris egyenletrendszerrel kapunk. Ezt viszont az energiafüggvényből kaptuk, amelyet nem integrálással, hanem az integrál numerikus közelítésével állítottunk elő. Itt a pontok számának és helyének megválasztása befolyásolja az eredményt.

A lineáris egyenletrendszer átírható mátrixegyenletté, ahol a mátrix, illetve a vektor elemei az \mathbf{R} valós számtesthez tartoznak. Az $M \cdot \lambda = b$, (M nonszinguláris mátrix) $n - 1$ lineáris egyenletet és $n - 1$ ismeretlent tartalmazó rendszer megoldásaként $\lambda = M^{-1} \cdot b$ adódik. E módszer hátránya a numerikus instabilitás: ha „ideális valós számok” helyett azok lebegőpontos gépi reprezentációját használjuk, a kerekítési hibák túlságosan felhalmozódnak. Szerencsére létezik egy numerikusan stabil megoldás, az LUP felbontás is, amelynek másik előnye, hogy az előzőnél háromszor gyorsabb. Amikor a P permutációs mátrix nincs jelen, akkor az $M = LU$ szorzat tényezőit kell meghatározni. Azt az eljárást, amely ezt az LU felbontást meghatározza, Gauss eliminációnak nevezzük. Ez számunkra azért fontos, mert a Maple számítógép-algebrai rendszerben két algoritmust implementáltak a megoldás előállítására. Az első a ritka mátrixok kezelésével kiegészített Gauss-elimináció, a második egy „primitív” törtmentes algoritmus, amely többek között egészekből, gyökkifejezésekből vagy polinomokból álló együtthatómátrixok esetében alkalmazható.

Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy egyenletrendszerünk megoldásának futási ideje az LUP felbontás futási idejével megegyezik, tehát $O(n^3)$. Ha a numerikus integrálásnál felvett pontok száma n -nél nem nagyobb, akkor a felület előállításának futási ideje szintén $O(n^3)$.

Az eredményeket a Maple V Release 5 és 7 Windows 95 illetve XP alatt futó változataival nyertük. Ezeken készült az összes grafikai munka is. A végső futtatáshoz használt gép paraméterei: 1,2 Ghz-es Intel Pentium III processzor, 256 Mbyte memória, 744 Mbyte swap. (Az első programok Intel Pentium I 100 Mhz-es 40 Mbyte RAM-os gépen készültek.) A gyengébb gépen több volt az elhasznált gépidő.

7 Irodalomjegyzék

- [1] Achs Ágnes, Sík és térgörbék approximációja, Jegyzet, PMMF, 1988.
- [2] Alfeld, P. – Barnhill, R. E., A transfinite C^2 interpolant over triangles, *Rocky Mountain of Mathematics* 14. (1984) 17–39.
- [3] Bahvalov, N. Sz., A gépi matematika numerikus módszerei, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977.
- [4] Bär, G., Parametrische Interpolation empirischer Raumkurven, *Zamm* 57 (1977) 305–314.
- [5] BME Geometria Tanszék, Vermes Miklós, Sima görbék és felületek előállítás spline-függvényekkel, Oktatási segédlet, 1989.
- [6] Boehm, W., Visual continuity, *Computer-aided Design* 20 (1988) 307–311.
- [7] Cormen, Thomas H. – Leiserson, Charles E. – Riverst, Ronald L., Algoritmusok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1997.
- [8] Encarnação, J. – Schlechtendahl, E. G., CAD, számítógéppel segített tervezés, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
- [9] Farin, Gerald, Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, A Practical Guide, Academic Press, INC. 1993.
- [10] Fasshauser, G. E. – Schumaker, L. L., Minimal energy surfaces using parametric splines, *Computer Aided Geometric Design* 13 (1996) 45–79.
- [11] Filip, D. J., Blending Parametric Surfaces, *ACM Transaction on Graphics* 8 (1989) 164–173.
- [12] Gács Péter – Lovász László, Algoritmusok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
- [13] Glaeser, Georg – Stachel, Hellmuth, Open Geometry, Wien
- [14] Gregory, J. A., Interpolation to boundary data on the simplex, *Computer Aided Geometric Design* 2 (1985) 43–52.

- [15] Greiner, G., Curvature approximation with application to surface modeling, *Computer Aided Geometric Design*
- [16] Greiner, G., Variational design and fairing of spline surfaces, *Computer Graphics Forum* 13 (1994) No 3. 143–154.
- [17] Hajós György, *Differenciálgeometria I. II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.
- [18] Hartmann, E., Parametric G^n blending of curves and surfaces, *Visual Computer*, 17, 1–13.
- [19] Heck, André, *Bevezetés a Maple használatába*, JGYF Kiadó, Szeged, 1999.
- [20] Henrici, Peter, *Numerikus analízis*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [21] Hilbert, David – Cohn–Vossen, Stefan, *Szemléletes geometria*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1982.
- [22] Hoschek, J. – Lasser, D., *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*, 2. Aufl. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [23] Juhász Imre, *Számítógépi geometria és grafika*, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1995.
- [24] Kósa András, *Variációszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
- [25] Lavrentyev, M. A. – Ljusztyernyik, L. A., *Variációszámítás*, Akadémia Kiadó, Budapest, 1953.
- [26] Lempio, Frank, *Numerische Mathematik II. Methoden der Analysis*, Bayreuther Mathematische Schriften Heft 55. 1998.
- [27] Little, F. F., *Convex Combination Surfaces* In: R. F. Barnhill and W. Boehm eds. (1983) *Surfaces in CAGD.*, Nord-Holland Publishing Company, pp. 99–107.
- [28] Molnár Emil, *A minimál-felületek Monge-Enneper-Weierstrass-féle elmélete (V. és K. Kommerell 3 könyve (1903–1921) alapján)*, BME, Budapest
- [29] Nagyné Szilvási Márta, *CAD iskola*, TypoTEX Kft Elektronikus Kiadó, 1991.
- [30] Nagyné Szilvási Márta, *CADKEY Gyakorlókönyv*, Műegyetem Kiadó, 1997.

- [31] Newman, W. M. – Sproull, P. F., Interaktív számítógépes grafika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [32] Pethőné Vendel Teréz, Felületek előállítására trigonometrikusan súlyozott spline-függvények felhasználásával, *Alkalmazott matematikai lapok* 20 (2000) 75–89.
- [33] Pottmann, H. – Opitz, K., Curvature analysis and visualization for functions defined on Euclidean spaces or surfaces, *Aided Geometric Design* 11 (1994) 655–674.
- [34] Reif, U., An unified approach to subdivision algorithms near extraordinary vertices, *Computer Aided Geometric Design* 12 (1995) 153–174.
- [35] Rogers D. F. – Adams, J. A., Mathematical Elements for Computer Graphics, McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1990.
- [36] Schichtel, M., G^2 Blend Surfaces and Filling of N-Sided Holes, *IEEE computer Graphics & Applications* 13 (1993) 68–73.
- [37] Szilvási-Nagy, Márta – Vendel, Teréz P. – Stachel, Hellmuth, C^2 Filling of Gaps by Convex Combination of Surfaces under Boundary Constraints, *KOG-6* (2002) 41–48.
- [38] Szilvási-Nagy, Márta – Vendel, Teréz P., A Coons-type construction with surfaces, I. Magyar Számítógépes Grafika és Geometriai Konferencia, 2002. május 28–29. Budapest
- [39] Szilvási-Nagy, Márta – Vendel, Teréz P., Generating curves and swept surfaces by blended circles, *Computer Aided Geometric Design* 17 (2000) 197–206.
- [40] Szilvási-Nagy, Márta, Almost Curvature Continuous Fitting of B-Spline Surfaces, *Journal for Geometry and Graphics* 2 (1998) No.1, 33–43.
- [41] Szilvási-Nagy, Márta, Closing Pipes by Extension of B-Spline Surfaces, *KOG-3* (1998) 13–19.
- [42] Szilvási-Nagy, Márta, Konstruktion von Verbindungsflächen mittels trigonometrischer Binfunktionen, 25. Süddeutsches Differentialgeometrie-Kolloquium den 2.6.2000, Institut für Geometrie Technische Universität Wien
- [43] Szőkefalvi-Nagy Gyula - Gehér Iászló – Nagy Péter, Differenciálgeometria, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

- [44] Trahtenbrot, B. A., Algoritmusok és absztrakt automaták, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [45] Vendel, Teréz P., Über eine neuartige Bewegungsfläche, TOPICS in algebra, analysis and geometry, BPR Kiadó, Leoben, 1999, 317–328.
- [46] Volpin, O. – Bercovier, M. – Matskewich, T., A comparison of invariant energies for free-form surface construction, *The Visual Computer* (1999)15. 199–210.
- [47] Wenz H.-J., Interpolation of curve data by blended generalized circles, *Computer-Aided Design* 13 (1996), 673–680.

8 Konferencia előadások, hivatkozások

A témakörben konferenciákon tartott előadásaim és egyéb cikkek:

- Sima görbe generálása körívekből, Matematika-, fizika- és informatikaoktatók XXII. Országos Konferenciája, 1998, Budapest
- Flächenkonstruktion mit trigonometrischen Spline-Funktionen, Konstruktive Geometrie Tagung 14.9.–18.9. 1998, Balatonföldvár
- Speciális felületek előállítása spline függvényekkel, Főiskolai Matematika-, Fizika- és Informatikaoktatók XXIII. Országos Konferenciája, 1999, Dunaújváros
- Über eine neuartige Translationsfläche, Internationale Tagung über Geometrie, Algebra und Analysis, 1.5.–5.5. 1999, Balatonfüred
- Általános eltolási felületek előállítása spline-függvényekkel, Főiskolák Matematika-, Fizika- és Számítástechnika Oktatóinak XXIV. Országos Konferenciája, 2000, Kaposvár
- Térgörbék és felületek előállítása trigonometrikusan súlyozott spline-függvényekkel, Matematikus doktoranduszok 2. találkozója, Budapest, 2000. október 20-22. BMGE
- Térgörbék és felületek előállítása trigonometrikusan súlyozott spline-függvényekkel, PTE PMMFK Jubileumi Tudományos Ülésszak 2000, Pécs, Kiadvány 141-145.
- Térgörbék és felületek előállítása trigonometrikusan súlyozott spline-függvényekkel, GÉP, A Gépipari Tudományos Egyesület Műszaki Folyóirata (2001/1-2) 52-54.

Hivatkozások a [39] *CAGD* cikkekre

- Cédric Gérot – Dominique Attali – Annick Montanvert: D'une surface triangulée à une surface représentée par cartes, RCFAO – 16/2001. 9-24.
- Carlo Séquin – Kiha Lee – Jane Yen, Circle Splines on the Sphere and in 3-Space, SIAM 2001, Sacramento, CA
- Carlo Séquien – Jane Yen, Fair and Robust Curve Interpolation on the Sphere, SIGGRAPH 2001, Los Angeles

9 Melléklet

- 9.1 Függelék 1 : Három pont köré írható kör középpontjának meghatározása**
- 9.2 Függelék 2 : Három pont köré írható kör középpontjának meghatározása**
- 9.3 Függelék 3 : Paraméterezés vizsgálata**

Függelék 1 : Három pont köré írható kör középpontjának meghatározása
(ha a három pont által meghatározott háromszög második pontjánál levő szöge $\sim 180^\circ$)

```
> restart:
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected

> Digits=15:
> #pontok száma
n:=3;

                                n := 3

> beta:=vector(n):
  alfa:=vector(n):
> #a felvett pontok
P:=matrix(n,3,[100,0,0,0,0,0,-10,0.0001,0]):
> for i from 1 to n do
  p(i):=row(P,i);
od;

                                p(1) := [100, 0, 0]
                                p(2) := [0, 0, 0]
                                p(3) := [-10, .0001, 0]

> #szögek: a három pont "majdnem" egy egyenesre esik
for i from 2 to n-1 do
  a(i):=evalm(p(i-1)-p(i));
  b(i):=evalm(p(i+1)-p(i));
  beta[i]:=evalf(angle(a(i),b(i)));
  Omega[i]:=evalf(Pi-beta[i]);
  beta[i]:=evalf(convert(beta[i],degrees));
od;

                                a(2) := [100, 0, 0]
                                b(2) := [-10, .0001, 0]
                                 $\beta_2 := 3.141592654$ 
                                 $\Omega_2 := 0.$ 
                                 $\beta_2 := 180.0000000 \text{ degrees}$ 

> #felezőpontok a felező merőleges egyenesekhez
for i from 2 to n-1 do
  P0:=evalm(0.5*(p(i)+p(i-1)));
  Q0:=evalm(0.5*(p(i)+p(i+1)));
od;

                                P0 := [50.0, 0., 0.]
                                Q0 := [-5.0, .00005, 0.]

> #a felező merőlegesek irányvektorai
for i from 2 to n-1 do
  v(i):=crossprod(crossprod(a(i),b(i)),a(i));
```

```
w(i):=crossprod(b(i),crossprod(a(i),b(i)));  
od;
```

```
v(2):=[0.,1.0000,0.]
```

```
w(2):=[.100 10-5,.1000,0.]
```

```
> #felező merőleges egyenesek
```

```
for i from 2 to n-1 do  
egyenlet1(i):=P0+v(i)*t1(i);  
egyenlet2(i):=Q0+w(i)*t2(i);  
od;
```

```
egyenlet1(2):=P0+[0.,1.0000,0.]t1(2)
```

```
egyenlet2(2):=Q0+[.100 10-5,.1000,0.]t2(2)
```

```
> for i from 2 to n-1 do  
vektoregyenlet1(i):=evalm(egyenlet1(i));  
vektoregyenlet2(i):=evalm(egyenlet2(i));  
od:
```

```
> #az egyenesek egyenletrendszerének paraméterei
```

```
for i from 2 to n-1 do  
mo(i):=solve({vektoregyenlet1(i)[1]=vektoregyenlet2(i)[1],vektor  
egyenlet1(i)[2]=vektoregyenlet2(i)[2],vektoregyenlet1(i)[3]=vekt  
oregyenlet2(i)[3]},{t1(i),t2(i)});  
od:
```

```
> for i from 2 to n-1 do  
t1(i):=subs(mo(i),t1(i));  
t2(i):=subs(mo(i),t2(i));  
od;
```

```
t1(2):=.5500000000 107
```

```
t2(2):=.55000000 108
```

```
> #metszéspont(a két pont egybeesik)
```

```
for i from 2 to n-1 do  
C1(i):=evalm(t1(i)*v(i)+P0);  
C2(i):=evalm(t2(i)*w(i)+Q0);  
od;
```

```
C1(2):=[50.0,.5500000000 107,0.]
```

```
C2(2):=[50.00000000,.5500000000 107,0.]
```

Függelék 2 : Három pont köré írható kör középpontjának meghatározása
(ha a három pont által meghatározott háromszög második pontjánál levő szöge $\sim 0^\circ$)

```
> restart:
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected

> Digits=15:
> #pontok száma
n:=3;

                                n := 3

> beta:=vector(n):
  alfa:=vector(n):
> #a felvett pontok
P:=matrix(n,3,[100,0,0,0,0,0,10,0.0001,0]):
> for i from 1 to n do
  p(i):=row(P,i);
od;

                                p(1) := [100, 0, 0]
                                p(2) := [0, 0, 0]
                                p(3) := [10, .0001, 0]

> #szögek: a második pont "majdnem" az első és harmadik által
meghatározott szakaszon van
for i from 2 to n-1 do
  a(i):=evalm(p(i-1)-p(i));
  b(i):=evalm(p(i+1)-p(i));
  beta[i]:=evalf(angle(a(i),b(i)));
  beta[i]:=evalf(convert(beta[i],degrees));
od;

                                a(2) := [100, 0, 0]
                                b(2) := [10, .0001, 0]
                                 $\beta_2 := 0.$ 
                                 $\beta_2 := 0.$ 

> #felezőpontok a felező merőleges egyenesekhez
for i from 2 to n-1 do
  P0:=evalm(0.5*(p(i)+p(i-1)));
  Q0:=evalm(0.5*(p(i)+p(i+1)));
od;

                                P0 := [50.0, 0., 0.]
                                Q0 := [5.0, .00005, 0.]

> #a felező merőlegesek irányvektorai
for i from 2 to n-1 do
  v(i):=crossprod(crossprod(a(i),b(i)),a(i));
  w(i):=crossprod(b(i),crossprod(a(i),b(i)));
```



```
od;
```

```
v(2) := [0., 1.0000, 0.]
```

```
w(2) := [.100 10-5, -.1000, 0.]
```

```
> #a felező merőleges egyenesek
```

```
for i from 2 to n-1 do
```

```
egyenlet1(i) := P0 + v(i) * t1(i);
```

```
egyenlet2(i) := Q0 + w(i) * t2(i);
```

```
od;
```

```
egyenlet1(2) := P0 + [0., 1.0000, 0.] t1(2)
```

```
egyenlet2(2) := Q0 + [.100 10-5, -.1000, 0.] t2(2)
```

```
> for i from 2 to n-1 do
```

```
vektoregyenlet1(i) := evalm(egyenlet1(i));
```

```
vektoregyenlet2(i) := evalm(egyenlet2(i));
```

```
od;
```

```
> #az egyenesek egyenletrendszerének paraméterei
```

```
for i from 2 to n-1 do
```

```
mo(i) := solve({vektoregyenlet1(i)[1]=vektoregyenlet2(i)[1],vektor  
egyenlet1(i)[2]=vektoregyenlet2(i)[2],vektoregyenlet1(i)[3]=vekt  
oregyenlet2(i)[3]}, {t1(i), t2(i)});
```

```
od;
```

```
> for i from 2 to n-1 do
```

```
t1(i) := subs(mo(i), t1(i));
```

```
t2(i) := subs(mo(i), t2(i));
```

```
od;
```

```
t1(2) := -.4500000000 107
```

```
t2(2) := .45000000 108
```

```
> #a metszéspont (a két pont egybeesik)
```

```
for i from 2 to n-1 do
```

```
C1(i) := evalm(t1(i) * v(i) + P0);
```

```
C2(i) := evalm(t2(i) * w(i) + Q0);
```

```
od;
```

```
C1(2) := [50.0, -.4500000000 107, 0.]
```

```
C2(2) := [50.00000000, -.4500000000 107, 0.]
```

Függelék 3 : Paraméterezés vizsgálata

> **restart:**

Az első síknegyedbe eső egységsugarú negyedkör 6 pontjának meghatározása a t paraméter egyenlőközű növelésével

> **p1 := [cos(t*Pi/2), sin(t*Pi/2)]:**

p2:=[(1-t*t)/(1+t*t), 2*t/(1+t*t)]:

> **p01 := [cos(t[i*5]*Pi/2), sin(t[i*5]*Pi/2)]:**

p02 := [(1-t[i*5]^2)/(1+t[i*5]^2), 2*t[i*5]/(1+t[i*5]^2)]:

> **for i from 0 to 1 by 0.2 do**

t[i*5]:=i:

p1 = evalf(subs(t[i*5]=i,p01));

p2 = evalf(subs(t[i*5]=i,p02));

od;

$$t_0 := 0$$

$$\left[\cos\left(\frac{1}{2}t\pi\right), \sin\left(\frac{1}{2}t\pi\right) \right] = [1., 0.]$$

$$\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}, 2\frac{t}{1+t^2} \right] = [1., 0.]$$

$$t_{1.0} := .2$$

$$\left[\cos\left(\frac{1}{2}t\pi\right), \sin\left(\frac{1}{2}t\pi\right) \right] = [.9510565163, .3090169944]$$

$$\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}, 2\frac{t}{1+t^2} \right] = [.9230769231, .3846153846]$$

$$t_{2.0} := .4$$

$$\left[\cos\left(\frac{1}{2}t\pi\right), \sin\left(\frac{1}{2}t\pi\right) \right] = [.8090169943, .5877852524]$$

$$\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}, 2\frac{t}{1+t^2} \right] = [.7241379310, .6896551724]$$

$$t_{3.0} := .6$$

$$\left[\cos\left(\frac{1}{2}t\pi\right), \sin\left(\frac{1}{2}t\pi\right) \right] = [.5877852522, .8090169944]$$

$$\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}, 2\frac{t}{1+t^2} \right] = [.4705882353, .8823529412]$$

$$t_{4.0} := .8$$

$$\left[\cos\left(\frac{1}{2}t\pi\right), \sin\left(\frac{1}{2}t\pi\right) \right] = [.3090169938, .9510565165]$$

$$\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}, 2\frac{t}{1+t^2} \right] = [.2195121951, .9756097560]$$

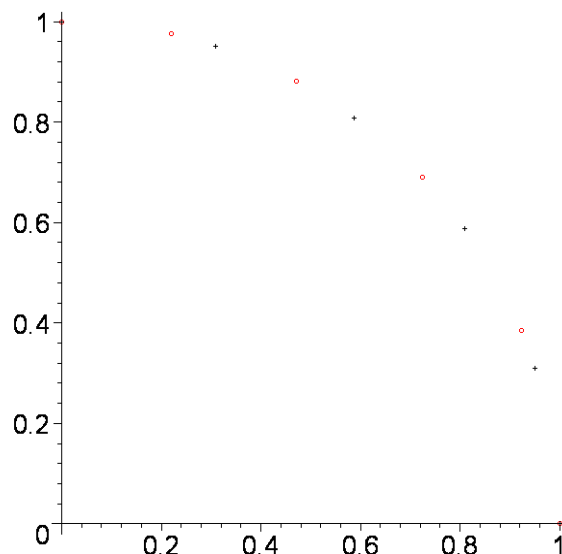
$$t_{5,0} := 1.0$$

$$\left[\cos\left(\frac{1}{2} t \pi\right), \sin\left(\frac{1}{2} t \pi\right) \right] = [0., 1.]$$

$$\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}, 2 \frac{t}{1+t^2} \right] = [0., 1.000000000]$$

Látható, hogy az azonos paraméterértékekhez tartozó pontok (az első és utolsó pont kivételével) nem egyeznek meg.

```
> plot([cos(t*Pi/2), sin(t*Pi/2), t=0..1], [(1-t^2)/(1+t^2), 2*t/(1+t^2), t=0..1], style=point, symbol=[cross, circle], symbolsize=15, adaptive=false, sample=[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1], scaling=constrained, color=[black, red], resolution=600);
```



A fekete pontok a trigonometrikus, a piros pontok a racionális koordinátákhoz tartoznak.

„Alulírott Pethőné Vendel Terézia kijelentem, hogy ezt a doktori értekezést magam készítettem és abban csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, amelyet szó szerint, vagy azonos tartalomban, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.”

Pethőné Vendel Terézia