Szabályos mozaikok vizsgálata

PhD tézisfüzet

Németh László

Témavezető: Dr. Vermes Imre†

Dr. Molnár Emil

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Matematika Intézet, Geometria Tanszék

Budapest

2007

Németh László
NyME EMK, Sopron
lnemeth@emk.nyme.hu

1. Előzmények

A 3-dimenziós tér szabályos mozaikjainak Schläfli szimbólumai $\{p, q, r\}$ alakúak, ahol $\{p, q\}$ jelenti a mozaik tartományát (celláját), $\{q, r\}$ pedig a csúcsalakzatot írja le (Coxeter [1]). A $\{p, q\}$ szabályos poliéder egy élét r számú poliéderrel rakhatjuk körbe, azaz a mozaiknak minden éle mentén r-ed rendű forgásszimmetriája van [15]. Coxeter ([1]) vizsgálta a magasabb-dimenziós szabályos mozaikokat is. Bebizonyította, hogy szabályos poliéderekkel a 3-dimenziós euklideszi térben csak egy szabályos mozaik, a jólismert kockamozaik létezik, melynek Schläfli szimbóluma $\{4, 3, 4\}$. A 3-dimenziós hiperbolikus térben már 15 szabályos mozaikot adott meg. Közülük 4 korlátos tartományú ($\{3, 5, 3\}$, $\{4, 3, 5\}$, $\{5, 3, 4\}$, $\{5, 3, 5\}$), a többi tartománya nem korlátos ($\{3, 4, 4\}$, $\{3, 3, 6\}$, $\{4, 3, 6\}$, $\{5, 3, 6\}$, $\{4, 4, 3\}$, $\{6, 3, 3\}$, $\{6, 3, 4\}$, $\{6, 3, 5\}$, $\{6, 3, 6\}$, $\{4, 4, 4\}$, $\{3, 6, 3\}$). Coxeter ([1]) megmutatta, hogy a 4-dimenziós euklideszi térben három, a $\{3, 3, 4, 3\}$, a $\{3, 4, 3, 3\}$ és a $\{4, 3, 3, 4\}$, magasabb dimenziós terekben csak a kockamozaiknak megfelelő $\{4, 3, ..., 3, 4\}$ szabályos mozaik létezik, melyek tartományai természetesen korlátosak. A hiperbolikus terekben csak a 4 és az 5-dimenziós térben léteznek szabályos mozaikok. A 4-dimenziós hiperbolikus térben összesen 7 szabályos mozaik létezik, melyek közül 5 korlátos tartományú mozaik ($\{3, 3, 3, 5\}$, $\{4, 3, 3, 5\}$, $\{5, 3, 3, 5\}$, $\{5, 3, 3, 4\}$, $\{5, 3, 3, 3\}$), míg a további 2 tartománya nem korlátos ($\{3, 4, 3, 4\}$, $\{4, 3, 4, 3\}$). Bizonyított, hogy az 5-dimenziós hiperbolikus térben 5 szabályos mozaik létezik, amelyek között nincs korlátos tartományú mozaik.

Fejes Tóth L. [2, 261. old.] koncentrikus körgyűrűtartományok területeit vizsgálta a következőképpen. Legyen $C(r)$ egy r sugarú kör területe. Ekkor $a > 0$ esetén $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{C(r+a)-C(r)}{C(r)}$ az euklideszi síkon 0, míg a hiperbolikus síkon $e^a - 1$. Ez a tény inspirált több matematikust, hogy a hiperbolikus tér szerkezetének vizsgálatával foglalkozzon.

A továbbiakban Fejes Tóth L. körökre vonatkozó határértékét általánosítjuk szabályos mozaikokra. Rögzítsünk egy P pontot, mint egy szabályos mozaik egy (véges) csúcspontját és hozzunk létre köré övezeteket. (Fejes Tóth L. vizsgálata esetén a koncentrikus körök középpontját tekinthetjük kiinduló pontnak.) Az

1. övezet álljon a P pontot tartalmazó tartományokból. (A 0. övezet legyen a P pont. Véges csúcsponttal nem rendelkező mozaikok esetén a 0. övezetnek a mozaik egy tartományát tekintjük és köré hozzuk létre az övezeteket.) A 2. övezet álljon a mozaik azon tartományaiból, melyeknek van közös (véges) pontja az 1. övezettel (nem feltétlen közös csúcspontja), de nincs a 0. övezettel. Az i. övezet ismerete esetén az $(i+1)$. övezet álljon a mozaik azon tartományaiból, melyeknek az i. övezet valamely tartományával van közös (véges) pontja, de nincs közös pontja egyetlen $(i-1)$. övezetbeli tartománnyal sem. A legfeljebb i-edik övezetek unióját jelöljük Π_i-vel. Π_0 legyen a P pont.

Jelölje V_i az i. övezet térfogatát, F_i^k ($i \geq 0$, $d \geq k > 0$, ahol d a mozaik dimenziója) a Π_i felületére illeszkedő k-dimenziós lapok térfogatösszegét. (Ha $k = d$, akkor $F_i^k = V_i$, valamint F_i^0 jelentse az i. övezet külső felületére illeszkedő véges csúcspontok számát.) Továbbá legyen $S_i = \sum_{j=0}^{i} V_j$, amely a Π_i térfogata.

Kárteszi [4] szabályos háromszög mozaikokat vizsgált a hiperbolikus síkon. A 0. övezetként egy háromszöget tekintett és köréje képezte az övezeteket. Kiszámolta, hogy $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{V_i}{S_i} = \frac{\sqrt{(m-4)^2-4}-(m-6)}{2}$, ahol m az egy csúcshoz tartozó háromszögek száma, Schläfli szimbólummal $\{3, m\}$ $(m > 6)$. Horváth [3] a szabályos p-szögekkel képezett $\{p, q\}$ mozaikokat vizsgálta és meghatározta, hogy $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{V_i}{S_i} = \frac{\sqrt{c^2-4}-(c-2)}{2}$, ahol $c > 2$ és $c = (p-2)(q-2)-2$. Vermes [11], [12], [14] a hiperbolikus sík aszimptotikus sokszögeivel képezett mozaikok esetére határozta meg a fenti határértéket. Zeitler [16] a 3-dimenziós hiperbolikus tér $\{4, 3, 5\}$ kockamozaikjára számolta ki, hogy $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{V_i}{S_i} = 4\sqrt{14} - 14 \approx 0.9666$ és $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{V_{i+1}}{V_i} = 15 + 4\sqrt{14} \approx 29.96$.

2. A dolgozat tematikája

A dolgozatban megadjuk a $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{V_i}{S_i}$ és $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{V_{i+1}}{V_i}$ $(i \geq 1)$ határértékeket csaknem az összes 3-dimenziós és 4-dimenziós szabályos mozaik esetén (1. táblázat), továbbá belátjuk, hogy $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{V_{i+1}}{V_i} = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{S_{i+1}}{S_i} = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{F_{i+1}^k}{F_i^k}$ $(i \geq 1)$, melyet *kristály növekedési hányados*nak is nevezhetünk. Elég nagy i esetén, megközelítőleg $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{V_{i+1}}{V_i}$ -szer több tartomány van a mozaik $(i+1)$. övezetében, mint az i.-ben.

A fenti határértékek meghatározásához a mozaik egyes övezetein levő csúcspontokat osztályozzuk, és számoljuk össze. Ezen csúcspontok segítségével határozzuk meg az egyes övezetek tartományainak számait. (Mivel a vizsgált mozaikok tartományai egybevágóak, ezért a térfogataikat tekinthetjük egységnek.) Az $(i+1)$. övezet csúcspontjainak számát az i. övezet csúcspontjainak típusaitól és számától függően rekurzív módon határozzuk meg. Az összeszámolás alapja az, hogy minden csúcspont környezetének, a mozaik csúcsalakzatának csúcsait, éleit, ..., k-dimenziós lapjait szintén osztályozzuk és az egyes osztályokba tartozó elemeket megadjuk. Ezen csúcsalakzatok mindig a jólismert szabályos poliéderek.

A dolgozat 2. fejezete a definíciókat tartalmazza, illetve az összeszámoláshoz szükséges rekurzív sorozatokkal kapcsolatban közöl néhány fontos tételt, amelyek a határértékek meghatározását egyszerűsítik le. A bizonyítás során néhány algebrai tételt használunk fel ([9], [10]). A fejezet legfontosabbak tételei a következők:

Adottak $n \geq 2,\ i \geq 1,\ j = 1, 2, \ldots, n$ esetén az $\mathbf{a}_1 \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ (oszlop-) vektorok és az $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reguláris mátrix. Képezzük a szokásos mátrixszorzással az $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^{\infty}$ vektorsorozatot rekurzív módon az

$$\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{M}\mathbf{a}_i, \tag{1}$$

formula segítségével, majd belőle az $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ valós számsorozatot az

$$r_i = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{a}_i, \tag{2}$$

összefüggéssel.

2.1.1. Tétel. *Az* (2)*-ben definiált* $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ *sorozat egy (legfeljebb)* n*-ed rendű lineáris rekurzív sorozat, azaz*

$$r_i = \beta_1 r_{i-1} + \beta_2 r_{i-2} + \cdots + \beta_n r_{i-n}, \tag{3}$$

ahol $\beta_j \in I\!R$, $\beta_n \neq 0$ és $i \geq n + 1$.

A (3) rekurzív sorozathoz tartozó karakterisztikus egyenlet (ami az $\mathbf{M}$ mátrix karakterisztikus egyenlete is) legyen a következő alakú ($\beta_n \neq 0$):

$$z^n = \beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} + \cdots + \beta_n z^0. \tag{4}$$

Továbbá legyen

$$z^n - \beta_1 z^{n-1} - \beta_2 z^{n-2} - \cdots - \beta_n z^0 = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_h)^{m_h}, \tag{5}$$

ahol $z_1, \ldots, z_h$ gyökök különbözőek ($m_1 + \cdots + m_h = n,\ 1 \leq h \leq n$) és a $\beta_n \neq 0$ feltétel miatt nullától is különböznek ($z_l \neq 0,\ l = 1, \ldots, h$).

A rekurzív sorozatok főtétele ([10, 33. old.]) szerint az $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ lineáris rekurzív sorozat bármely tagját explicit módon meghatározhatjuk a következőképp:

$$r_i = g_1(i) z_1^i + g_2(i) z_2^i + \cdots + g_h(i) z_h^i, \tag{6}$$

ahol $g_k(i)$ egy legfeljebb $(m_k - 1)$-ed fokú polinomja i-nek és függvénye az $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ sorozat $r_1, r_2, \ldots, r_n$ kezdőelemeinek, m_k-nak és z_k-nak ($k = 1, \ldots, h$).

A továbbiakban tegyük fel azt is, hogy a (4) karakterisztikus egyenlet minden gyöke valós, azaz $z_k \in \mathbb{R}$, $k = 1 \ldots h \leq n$ és az $r_i \neq 0$ ($i \geq 1$). A vizsgált euklideszi mozaikok esetén a (4) karakterisztikus egyenlet minden gyöke 1, azaz $z_1 = 1$, $h = 1$ és $m_1 = n$. Ekkor (6) alapján $r_i = g_1(i) 1^i = g_1(i) \neq 0$, tehát $g_1(i)$ nem a konstans 0 polinom. Minden vizsgált hiperbolikus mozaik esetén pedig a (4) karakterisztikus egyenletnek minden gyöke valós, legalább kettő különböző gyöke van és létezik egy z_1 egyszeres, domináns gyök, amelyre teljesül, hogy $|z_1| > |z_k|$ és $|z_1| = z_1 > 1$ ($k = 2, \ldots, h$). A továbbiakban ezeket az eseteket vizsgáljuk és ehhez feltesszük, hogy $g_1 \neq 0$.

2.2.2. Tétel. *A $h = 1,\ z_1 = 1$, illetve az $1 < h \leq n$, $|z_1| > |z_k| \neq 0$, $|z_1| = z_1 > 1$, $g_1 \neq 0$ ($k = 2, \ldots, h$), esetek mindegyikében a (2)-ben definiált r_i és az $s_i = \sum_{j=0}^{i} r_j$ ($i \geq 1$) sorozatokra $\lim\limits_{1 \leq i \to \infty} \frac{r_{i+1}}{r_i} = z_1$ és $\lim\limits_{1 \leq i \to \infty} \frac{r_i}{s_i} = \frac{z_1 - 1}{z_1}$.*

2.2.6. Tétel. *Egy szabályos mozaik kristály növekedési hányadosa a mozaik által meghatározott rekurzió $\mathbf{M}$ mátrixának a legnagyobb, abszolútértékben is a legnagyobb, valós sajátértéke.*

A további fejezetekben az egyes mozaikok esetén a rekurziós mátrixokat adjuk meg.

Először az 1. övezeteket vizsgáljuk meg részletesebben, majd teljes indukcióval az i. övezet ismeretét feltételezve következtetünk az $(i+1)$. övezetre. Rekurzív sorozatok segítségével előbb az övezetek külső felületén levő mozaikcsúcspontok számát, majd az egyes övezetek tartományainak, valamint 2-, 3- és 4-dimenziós lapjainak számát is kifejezzük. Az összeszámláláshoz azt a tényt használjuk fel, hogy szabályos mozaik lévén nemcsak a tartományai, hanem a csúcsok környezetei, a csúcsalakzatok is egybevágóak. Így elég ismernünk a mozaikok egy tetszőleges csúcspontjának a környezetét, e csúcsponthoz közeli csúcspontok elhelyezkedését, számát. Az összeszámolás tisztán geometriai módszerekkel elvégezhető a csúcsalakzatoknak csak a kombinatorikus topológikus tulajdonságait felhasználva.

A dolgozatban szereplő módszer jobb megismerése miatt a 3. fejezetet a $\{4,3,4\}$ euklideszi kockamozaik vizsgálatával kezdjük, annak ellenére, hogy ezen mozaik esetén sokkal egyszerűbben elvégezhetnénk az azon tartományok számának meghatározását, melyek az egyes övezeteket alkotják. Ezután a $\{4,3,5\}$ hiperbolikus kockamozaik megfelelő rekurzív sorozatainak felírásával folytatjuk a fejezetet (habár Zeitler [16] már részben, más módon a fenti határértékeket kiszámolta), majd ezután a megfelelő 4-dimenziós mozaikokat ($\{4,3,3,4\}$, $\{4,3,3,5\}$) és a duálisaikat ($\{5,3,4\}$, $\{5,3,3,4\}$) vizsgáljuk (Németh [5], [6]). Duális mozaikokra bebizonyítjuk a következő tételt.

3.6.1. Tétel. *A minden hiperbolikus kockamozaik és duálisa estén a* $\lim_{1\le i\to\infty}\frac{V_i}{S_i}$, $\lim_{1\le i\to\infty}\frac{V_{i+1}}{V_i}$, $\lim_{1\le i\to\infty}\frac{S_{i+1}}{S_i}$ *és* $\lim_{1\le i\to\infty}\frac{F^k_{i+1}}{F^k_i}$ *határértékek megegyeznek.*

A 4. fejezetben a 3-dimenziós $\{5,3,4\}$ és az $\{5,3,5\}$ hiperbolikus dodekaéder mozaikokat vizsgáljuk a bemutatott módszert használva.

Az 5. fejezetben a nem korlátos tartományú $\{4,4,3\}$, $\{6,3,3\}$, $\{6,3,4\}$ és $\{6,3,5\}$ végtelen szabályos poliéderekkel képezett mozaikokat és az ezek felosztásával (Vermes [13], [14]) kapott aszimptotikus gúlákkal képezett mozaikokat, valamint 4-dimenziós megfelelőjét ($\{4,3,4,3\}$) és duálisaikat ($\{3,4,4\}$, $\{3,3,6\}$, $\{4,3,6\}$, $\{5,3,6\}$ és $\{3,4,3,4\}$) vizsgáljuk meg (Németh [7]). Itt is az előző fejezetek összeszámolási módszerét alkalmazzuk.

A 3-dimenziós hiperbolikus térben szabályos hasábokkal is (VERMES I. [13], [14]) képezhetünk mozaikokat. A 6. fejezetben ezen mozaikokra használjuk a megfelelő összeszámolási módszert. A szabályos hasábokkal képezhető mozaikok Schläfli szimbólumai $\{p|q,r\}$ alakúak, ahol p a szabályos hasábok alapsokszögeinek számát jelöli, $\{q,r\}$ pedig a mozaik csúcsalakzatát írja le. Mivel a szabályos hasábokkal képezhető mozaikok száma végtelen és tárgyalásukat egységesen, paraméteres formában végezzük, a végső eredmény meghatározásához a számítógép is szükséges.

A dolgozatban sikerült egy másik módszerrel is megadni a fenti határértékeket korlátos tartományú mozaikok esetére a 3- és 4-dimenziójú euklideszi és hiperbolikus terekben. A módszer leírása a függelékben kapott helyet. Az egyes övezetek tartományai számának meghatározásához a mozaikot felosztjuk karakterisztikus szimplexekre. A karakterisztikus szimplexek csúcsainak, amelyek a k-dimenziós ($k \le d$) lapok középpontjai, számát vizsgáljuk algebrai módszerekkel. Itt is rekurzió segítségével térünk át az i. övezetről az $(i+1)$. övezetre, de a rekurzió mátrixát általánosan, a szabályos mozaikok Schläfli szimbólumainak paramétereivel tudjuk felírni. Többször a jólismert kombinatorikai szita módszert alkalmazzuk ([8, 41. old.]). Természetesen a dolgozatban bemutatott két módszerrel kapott eredmények megegyeznek és a $\{4,3,5\}$ mozaik esetén ZEITLER [16] eredményeivel is egybeesnek. Ha a 2-dimenziós euklideszi és hiperbolikus síkra alkalmazzuk az általános módszert, akkor a vizsgált határértékek más szerzők (KÁRTESZI [4], HORVÁTH [3]) eredményeit adják.

Definíció. Nevezzük *i-együttes*nek az 1., a 2., ..., $(i-1)$. és az i. mozaikövezet unióját. Jelöljük v_i^k-val az i-együttes k-dimenziós ($k \le d$) lapok középpontjainak számát. Legyen ez vektor alakban $\mathbf{v}_i = (v_i^0\ v_i^1\ v_i^2\ v_i^3)^T$

F.1.4. Tétel. *$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{M}\mathbf{v}_i$, $i \ge 0$, ahol $\mathbf{M} = \mathbf{G}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ és $U = \frac{4}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$, $V = \frac{4}{\frac{1}{r}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$ esetén*

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} V\left(\frac{U}{4q^2}+\frac{1}{r}-\frac{p}{4}\right)-1 & V\left(\frac{U}{8q}+\frac{1}{2r}-\frac{p}{4}\right) & V\left(\frac{U}{4pq}-\frac{1}{4}\right) & V\frac{1}{2q} \\ r\left(\frac{U}{2q}-p\right)+2 & r\left(\frac{U}{4}-p\right)+1 & r\left(\frac{U}{2p}-1\right) & r \\ \frac{U}{q}-p & \frac{U}{2}-p & \frac{U}{p}-1 & 2 \\ \frac{U}{2q} & \frac{U}{4} & \frac{U}{2p} & 1 \end{pmatrix}.$$

Reményteljesnek látszik, hogy e számolási módszer kiterjeszthető tetszőleges d-dimenziós korlátos és nem korlátos tartományú szabályos mozaikokra is, és a módszer általánosításával megadható a mozaikövezetek külső felületére illeszkedő csúcsok, lapok, élek, ..., $(d-1)$-dimenziós lapok száma is.

3. Eredmények összefoglalása

A következő táblázatok összefoglaló jelleggel a dolgozatban vizsgált mozaikokra pontosan meghatározott határérték közelítő értékeit tartalmazzák. Eddig az euklideszi mozaikoktól eltekintve a $\{4,3,5\}$ mozaik esetére (Zeitler [16]) voltak ismertek az eredmények. A $\{p,q,r\}$ végtelen érintőpoliéderekkel képezett mozaik aszimptotikus gúlákra történő felosztásával kapott mozaikot $\{p,q,r\}_g$ jelöli (5. fejezet). Az 1. táblázat a szabályos mozaikokra kapott határértékeket összegzi, míg a 2. és a 3. táblázat a 6. fejezetben leírt, Vermes I. [13], [14] által definiált, szabályos hasábmozaikokhoz tartozó határértékeket adja meg (csak $p \leq 10$ esetre).

mozaik	$\lim\limits_{i\to\infty} \frac{V_{i+1}}{V_i}$	$\lim\limits_{i\to\infty} \frac{V_i}{S_i}$
$\{4,3,4\}$	1	0
$\{4,3,5\}$, $\{5,3,4\}$	29.96663	0.96663
$\{5,3,5\}$	166.99401	0.99401
$\{3,5,3\}$	46.97871	0.97871
$\{4,4,3\}_g$, $\{4,4,3\}$, $\{3,4,4\}$	10	0.9
$\{6,3,3\}_g$, $\{6,3,3\}$, $\{3,3,6\}$	6	0.83333
$\{6,3,4\}_g$, $\{6,3,4\}$, $\{4,3,6\}$	21	0.95238
$\{6,3,5\}_g$, $\{6,3,5\}$, $\{5,3,6\}$	76	0.98684
$\{4,3,3,4\}$	1	0
$\{3,3,3,5\}$, $\{5,3,3,3\}$	84.03807	0.98810
$\{4,3,3,5\}$, $\{5,3,3,4\}$	2381.82771	0.99958
$\{5,3,3,5\}$	319483.2496	0.999997
$\{4,3,4,3\}_g$, $\{4,3,4,3\}$, $\{3,4,3,4\}$	141.728617	0.992971

1. táblázat. *A szabályos mozaikok összefoglaló táblázata.*

$\lim\limits_{i\to\infty} \frac{V_{i+1}}{V_i}$	$\{p\|3,3\}$	$\{p\|3,4\}$	$\{p\|3,5\}$	$\{p\|4,3\}$	$\{p\|5,3\}$
$p=3$	–	–	–	–	–
$p=4$	–	–	–	–	229.904
$p=5$	–	–	–	91.1299	306.746
$p=6$	–	–	–	116.403	384.746
$p=7$	35.2892	117.827	413.707	141.309	463.059
$p=8$	42.1757	138.482	484.300	166.994	541.449
$p=9$	48.8284	158.870	554.594	190.533	619.837
$p=10$	55.3460	179.081	624.665	215.970	698.198

2. táblázat. $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{V_{i+1}}{V_i}$ *értékei a szabályos hasábmozaikok esetén.*

$\lim\limits_{i\to\infty} \frac{V_i}{S_i}$	$\{p\|3,3\}$	$\{p\|3,4\}$	$\{p\|3,5\}$	$\{p\|4,3\}$	$\{p\|5,3\}$
$p=3$	–	–	–	–	–
$p=4$	–	–	–	–	0.995650
$p=5$	–	–	–	0.989027	0.996740
$p=6$	–	–	–	0.991409	0.997401
$p=7$	0.971663	0.991514	0.997583	0.992923	0.997840
$p=8$	0.976290	0.992779	0.997935	0.993976	0.998153
$p=9$	0.979520	0.993706	0.998197	0.994752	0.998387
$p=10$	0.981929	0.994416	0.998399	0.995348	0.998567

3. táblázat. $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{V_i}{S_i}$ *értékei a szabályos hasábmozaikok esetén.*

Hivatkozások

[1] Coxeter, H.S.M., *Regular honeycombs in hyperbolic space*, Proc. Int. Congress of Math. Amsterdam, Vol. III. (1954), 155-169.

[2] Fejes Tóth, L., *Regular Figures*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1964.

[3] Horváth, J., *Über die regulären Mosaiken der hyperbolishen Ebene*, Ann. Univ. Sci., Budapest. Eötvös Sect. Math. 7 (1964), 49-53.

[4] Kárteszi, F., *Eine Bemerkung über das Dreiecksnetz der hyperbolischen Ebene*, Publ. Math. Debrecen, 5 (1957), 142-146.

[5] Németh L., *Combinatorial examination of the mosaic with asymptotical square pyramids*, Proceedings of Symposium on Computational Geometry SCG'2002, Vol. 11., Bratislava (2002), 56-59.

[6] Németh L., *Combinatorial examination of mosaics with asymptotic pyramids and their reciprocals in 3-dimensional hyperbolic space*, Studia Sci. Math. Hungar. 43 (2), (2006), 247-264.

[7] Németh L., *On the 4-dimensional hyperbolic hypercube mosaic*, Publ. Math., Debrecen, (közlésre elfogadva).

[8] Prékopa, A., *Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal*, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1962.

[9] Rózsa, P., *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

[10] Shorey, T.N. – Tijdeman. R., *Exponential diophantine equation*, Cambridge University Press, 1986.

[11] Vermes, I., *A hiperbolikus sík lefedése aszimptotikus sokszögekkel*, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. 20 (1971) 341-347 .

[12] Vermes, I., *Über die Parkettierungsmöglichkeit der hyperbolischen Ebene durch nicht-total asymptotische Vielecke.* Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Universität Halle, 1 (1971), 9-13.

[13] Vermes, I., *Über die Parkettierungsmöglichkeit des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes durch kongruente Polyeder*, Studia Sci. Math. Hungar. 7 (1972), 267-287.

[14] Vermes, I., *Síkbeli és térbeli hiperbolikus mozaikok vizsgálata*, Kandidátusi értekezés, Budapest, 1971.

[15] Vinberg, E.B. – Shvartsman, O.V., *Discrete groups of motions of spaces of constant curvature*, in Geometry II. Encyclopaedia of Math. Sci., Springer-Verlag, 1991.

[16] Zeitler, H., *Über eine Parkettierung des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 12 (1969), 3-10.