Kiss Márton

A Sajátértékeloszlás és inverz feladatok című disszertáció

TÉZISEI

Témavezető:
Horváth Miklós
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet
Analízis Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet
2007

1. Bevezetés

Az inverz spektrálelmélet célja, hogy spektrális adatokból meghatározza egy differenciáloperátor együtthatóit. A természettudományok számos ágában felbukkannak inverz feladatok, gondoljunk az inverz szóráselméletre vagy akár a földrengések elõrejelzésére [22]. A kilencvenes években új lendületet kapott a sajátértékek eloszlására vonatkozó tételek keresése és bizonyítása is.

Egy A lineáris operátor *sajátértékének* nevezzük a λ számot, ha a $\lambda \mathrm{id} - A$ operátor magtere nem csak a 0-ból áll. Egy D differenciáloperátornál ez azt jelenti, hogy a D értelmezési tartományába eső, azaz a peremfeltételeket kielégítő függvények körében van olyan nem azonosan 0 f függvény, amire $Df = \lambda f$.

Meg kell jegyeznünk, hogy általában a differenciáloperátorok spektruma sem csak sajátértékekből áll, de az általunk vizsgált esetekben vagy a teljes spektrum, vagy annak egy jól meghatározható része, például a negatív féltengellyel való metszete, csak sajátértékeket tartalmaz.

A Sturm-Liouville típusú differenciáloperátorok körébe tartozik a legtöbbet vizsgált egydimenziós Schrödinger operátor. Ez a

$$y \mapsto -y'' + q(x)y$$

kifejezéssel definiált operátor, benne a fizikai okokból potenciálnak nevezett $q(x)$ mennyiséggel, akkor a legegyszerűbb alakú, amikor $q = 0$. Ha a $q(x)$ potenciált (bizonyos határok között) megváltoztatjuk, a spektrum jellege nem változik meg: ha például véges intervallumon tekintjük Dirichlet peremfeltételekkel, akkor a spektrum egyszeres sajátértékek diszkrét, növekvő, $+\infty$-hez tartó sorozatából áll, míg ha a $[0, \infty)$ félegyenesen tekintjük (pl. $q \in \in L^1$ mellett) a 0-ban Dirichlet peremfeltétellel, akkor a spektrum a $[0, \infty)$ félegyenesen folytonos, a $(-\infty, 0)$ félegyenesen diszkrét,

[26] M. M. Malamud, *Borg-type theorems for first-order systems on a finite interval*, Funct. Anal. Appl. **33** (1999), 64–68.

[27] ______, *Uniqueness questions in inverse problems for systems of ordinary differential equations on a finite interval*, Trans. Moscow Math. Soc. **60** (1999), 173–224.

[28] V. A. Marchenko, *Certain problems in the theory of second order differential operators (in Russian)*, Dekl. Akad. Nauk. SSSR **72** (1950), 457–460.

[29] L. Gy. Pál, *Ortogonális függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.

[30] C. Sturm, *Sur les équations différentielles linéaires du second ordre*, J. Math. Pures Appl. **1** (1836), 106–186.

[31] B. A. Watson, *Inverse spectral problems for weighted Dirac systems*, Inverse Problems **15(3)** (1999), 793–805.

[32] R. M. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series* , Academic Press, New York, 1980.

[33] V. A. Yurko, *Inverse Spectral Problems of Differential Operators and Their Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Germany, Japan, Russia, 2000.

[34] A. Zettl, *Sturm-Liouville Theory*, vol. 121, American Mathematical Society, 2005.

a potenciáltól függetlenül. Természetesen a potenciáltól függ az egyes sajátértékek pontos értéke, de magát az operátort tekinthetjük a potenciál nélküli legegyszerűbb eset perturbációjának.

A potenciáltól függően a sajátértékekre bizonyos egyenlőtlenségek teljesülhetnek – az ilyen állítások tehát a sajátértékek elhelyezkedésére, eloszlására vonatkoznak.

Fordítva, a sajátértékek elhelyezkedéséből is következtethetünk a potenciál bizonyos tulajdonságaira. Az inverz spektrálelmélet azzal foglalkozik, hogy adott spektrális információkból meghatározható-e a potenciál, vagy annak valamilyen tulajdonsága. Inverz sajátértékfeladatról beszélünk, ha a spektrum csak sajátértékekből áll. A Schrödinger operátor, sőt általában a differenciáloperátorok fizikai eredetűek. Fizikai értelemben az inverz feladat annak felel meg, hogy a mért értékekből következtetünk a fizikai tér ismeretlen tulajdonságaira.

Nem meglepő, hogy az inverz feladatok általában nehezebbek, megoldásuk, ha egyáltalán van, bonyolultabb apparátust igényel, mint a direkt problémák megoldása.

2. A dolgozat felépítése

Kezdetben tehát fizikai problémák megoldásához volt szükség a differenciáloperátorok vizsgálatára. Sokszor azonban különböző alkalmazásokhoz tartozó operátorokat hasonló matematikai módszerekkel lehet vizsgálni, míg más esetekben ugyanaz a gyakorlati probléma többféle matematikai megközelítést tehet szükségessé. Dolgozatomban az alkalmazott *matematikai* módszerek szerinti csoportosítást választottam.

Először egy bevezető részben összefoglalom a tételekben szereplő operátorok eddigi elméletét. Másodszor ismertetem a sajátértékek eloszlásával kapcsolatos régebbi és új tételeket. Harmadszor pedig bemutatom az inverz problémák vizsgálatában eddig elért eredményeimet. Ez a terület az utóbbi években robbanásszerű fejlődésnek indult, és analitikus módszereinkkel sikerült alapvető problémákat tisztázni.

Az első fejezet bevezetést ad a legegyszerűbb,

$$-y'' + qy = \lambda y$$

alakú Sturm-Liouville típusú differenciálegyenletek elméletébe. A Sturm-Liouville operátorok vizsgálatát elindító első cikk több, mint 150 éve jelent meg [30]. Egyes tételek és megközelítési módok nagyon régóta ismertek, ám a témakör jelenleg is fejlődik, elég, ha Zettl 2005-ben megjelent összefoglaló művére utalunk [34], ahol számtalan megoldatlan kérdés szerepel.

A később felmerülő problémák szempontjából alapvető, hogy, amint részben már említettük,

– a kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható.

– véges intervallumon a spektrum egyszeres sajátértékek megszámlálható, $+\infty$-hez tartó sorozatából áll.

– a $[0, \infty)$ félegyenesen L^1-beli potenciál mellett a spektrum két részből áll: folytonos spektrumból a $[0, \infty)$ félegyenesen és negatív (nempozitív) sajátértékekből.

Ezen túlmenően a fejezet definiálja a Sturm-Liouville operátorok vizsgálatában alapvető fogalmakat és bemutatja az eddig kifejlesztett legfontosabb eszközöket, úgymint: transzformációs operátor, oszcillációs tételek, rezolvens operátor, Green-függvény, Weyl-féle m-függvény, spektrálfüggvény, határpont (LP) és határkör (LC) eset.

[15] F. Gesztesy and B. Simon, *On the determination of the potential from three spectra*, Trans. Amer. Math. Soc. **189(2)** (1999), 85–92.

[16] ———, *A new approach to inverse spectral theory II. General real potentials and the connection to the spectral measure*, Ann. of Math. **152** (2000), no. 2, 593–643.

[17] ———, *Inverse spectral analysis with partial information on the potential, II. The case of discrete spectrum*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 2765–2787.

[18] ———, *On local Borg-Marchenko uniqueness results*, Commun. Math. Phys. **211** (2000), 273–287.

[19] M. Horváth, *Eigenfunction expansions for one-dimensional Dirac operators*, Acta Sci. Math. Szeged **61** (1995), 225–240.

[20] ———, *On the inverse spectral theory of Schrödinger and Dirac operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 10, 4155–4171.

[21] ———, *Inverse spectral problems and closed exponential systems*, Ann. of Math. **162** (2005), no. 2, 885–918.

[22] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1996.

[23] N. Levinson, *Gap and density theorems*, vol. XXVI, AMS Coll. Publ., New York, 1940.

[24] B. M. Levitan, *Inverse Sturm-Liouville problems*, V.N.U. Science Press, Utrecht, 1987.

[25] B. M. Levitan and I. S. Sargsjan, *Sturm-Liouville and Dirac operators (in Russian)*, Nauka, Moscow, 1988.

Egyéb publikációk:

[8] V. Ambarzumian, *Über eine Frage der Eigenwerttheorie*, Zeitschrift für Physik **53** (1929), 690–695.

[9] M. Ashbaugh and R. Benguria, *Optimal lower bound for the gap between the first two eigenvalues of one-dimensional Schrödinger operators with symmetric single-well potentials*, Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1987), 419–424.

[10] ———, *Optimal bounds for ratios of eigenvalues of one-dimensional Schrödinger operators with Dirichlet boundary conditions and positive potentials*, Commun. Math. Phys. **124** (1989), 403–415.

[11] S. A. Avdonin, *On the question of Riesz bases of exponential functions in L^2 (in Russian)*, Vestnik Leningrad. Univ. Ser. Mat. **13** (1974), 5–12.

[12] G. Borg, *Uniqueness theorems in the spectral theory of* $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$, Proc. 11th Scandinavian Congress of Mathematicians (Oslo), Johan Grundt Tanums Forlag, 1952, pp. 276–287.

[13] S. Clark and F. Gesztesy, *Weyl-Titchmarsh M-function asymptotic, local uniqueness results, trace formulas and Borg-type theorems for Dirac-operators*, Trans. Amer. Math. Soc **354** (2002), 3475–3534.

[14] F. Gesztesy, R. del Rio, and B. Simon, *Inverse spectral analysis with partial information on the potential, III. Updating boundary conditions*, Intl. Math. Research Notices **15** (1997), 751–758.

Néhány ponton az ismert eredmények finomítására vagy továbbfejlesztésére volt szükség (például a transzformációs operátorokkal kapcsolatban). Ilyenkor részletes bizonyításokat közöltem.

A dolgozatban Dirac operátorra vonatkozó tételeket is bizonyítok. A Dirac operátorra vonatkozó alapvető tudnivalókat a függelékben foglaltam össze.

A második, harmadik és negyedik fejezetben a sajátértékek eloszlására, elsősorban a sajátértékek hányadosaira vonatkozó becslések találhatók, amelyek új és nagyrészt saját eredmények, ezért ezeket a következő szakaszban részletesen ismertetem.

A dolgozat második felében inverz sajátértékproblémákat tárgyalok. Inverz feladaton általánosságban azt értjük, hogy spektrális adatokból határozzuk meg egy differenciáloperátor együtthatóit [33]. A Sturm-Liouville operátorok esetében spektrális adatok alatt korábban az m-függvényt és a spektrálfüggvényt értették. Klasszikus eredménynek számít, hogy ezek bármelyike – Dirac operátorok esetén is – meghatározza a potenciált [12, 28, 25, 31]. Meg kell jegyeznünk, hogy a spektrálfüggvény és az m-függvény is kölcsönösen meghatározzák egymást, lásd az 1.10.6. és az A.4.12. tételt.

Az inverz sajátértékproblémánál azonban csak sajátértékeket ismerünk, és természetesen azt, hogy az egyes sajátértékek milyen peremfeltételből származnak. Két klasszikus típusa van ennek a problémának: az egyik, amikor – általában valamilyen szerencsés szélsőértéktulajdonság miatt – egy adott peremfeltételből kapott sajátértékek meghatározzák a potenciált. Ilyen típusú állítást először Ambarzumian örmény csillagász bizonyított [8], ezért ezeket a kivételes eseteket Ambarzumian-típusú állításoknak nevezzük. A másik, amikor két teljes spektrumból származó, vagy ennek megfelelő mennyiségű sajátérték segítségével határozzuk meg a potenciált. Néhány jól ismert eredmény:

2.1. Tétel (Borg). *$\sigma(0,0)\cup\sigma(\alpha,0)$ meghatározza a potenciált, míg egy valódi részhalmaza már nem határozza meg.*

Itt $\sigma(\alpha,\beta)$ a

$$y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0,$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0$$

szeparált peremfeltételhez tartozó spektrumot jelenti, azaz $\sigma(0,0)$ a Dirichlet, $\sigma(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ pedig a Neumann peremfeltételhez tartozó spektrum.

Meg kell jegyeznünk, hogy az, hogy „sajátértékek egy halmaza meghatározza a potenciált", nem jelenti azt, hogy ezen sajátértékek ismeretében a potenciált valamilyen egyszerű módszerrel kiszámíthatjuk, hanem csak annyit, hogy nincs két különböző potenciál, amihez ugyanezek a sajátértékek tartoznak.

2.2. Tétel (Hochstadt-Lieberman). *Ha a potenciál $(0,\frac{\pi}{2})$-en ismert, akkor bármely $\sigma(\alpha,\beta)$ meghatározza $(\frac{\pi}{2},\pi)$-n is.*

Az utóbbi évekig számos cikkben [13, 14, 17, 15, 16, 18, 19, 20, 24, 27, 26] bizonyítottak különböző olyan feltételeket, amelyek biztosítják a potenciál egyértelműségét. Végül 2001-ben Horváth [21] bizonyított exponenciális rendszerek teljességével kapcsolatos szükséges és elégséges feltételt.

Teljesnek nevezünk egy $M\subset X^*\cap X$ halmazt X-ben, ha $x\in X$ és $m(x)=0$ $\forall m\in M$-re esetén $x=0$ [29].

2.3. Tétel (Horváth). *Legyen $q\in L^2$, $\lambda_n \nrightarrow -\infty$, $n\geq 1$ tetszőleges különböző valós számok. Legyen $\lambda_n\in\sigma(\alpha_n,0)$. Akkor a λ_n sajátértékek meghatározzák a potenciált $\Leftrightarrow$ tetszőleges $\mu\neq\pm\sqrt{\lambda}_n$-re $\{e^{\pm 2i\mu x}, e^{\pm 2i\lambda_n x}\}$ teljes $L^2[-\pi,\pi]$-ben.*

Hivatkozások

A szerző publikációi

Folyóiratcikkek:

[1] M. Kiss, *An n-dimensional Ambarzumian type theorem for Dirac operators*, Inverse Problems **20** (2004), 1593–1597.

[2] ______, *Eigenvalue ratios of vibrating strings*, Acta. Math. Hungar. **110** (2006), no. 3, 243–249.

[3] M. Horváth and M. Kiss, *A bound for ratios of eigenvalues of Schrödinger operators on the real line*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **suppl.** (2005), 403–409.

[4] ______, *A bound for ratios of eigenvalues of Schrödinger operators with single-well potentials*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 1425–1434.

[5] ______, *On the stability of inverse scattering*, manuscript (2007).

[6] ______, *Stability of an inverse eigenvalue problem for Schrödinger operators*, preprint (2007).

Magyarul:

[7] M. Kiss, *Ceva tételének néhány általánosítása*, Középiskolai Matematikai Lapok (2005 dec.), 43–49.

A tétel feltételei teljesülnek $r = s = 2$ esetén, ha a φ_n rendszer Riesz bázis. L^p-terek közötti interpolációval számos egyéb következményét is kimondjuk a 7.4. szakaszban.

A félegyenesen hasonló állítást mondhatunk ki (7.7.1. tétel), ám abban φ_n helyett más függvényrendszer szerepel, ezért más jellegű eredményekhez vezet. Úgy tűnik, hogy a stabilitást csak akkor lehet garantálni, ha a problémát áttranszformáljuk egy egydimenziós inverz szórásfeladatba. [5].

Kiderült, hogy exponenciális rendszerek tulajdonságaira vonatkozó tételek segítségével ([11, 23, 32]) az előbb említett eredmények nagy többsége levezethető ebből a feltételből (és $\sin\beta \neq 0$ esetén a $\sigma(\alpha, \beta)$-ra vonatkozó bonyolultabb, de hasonló jellegű feltételekből), lásd a [21] cikk 4. részét.

A hatodik fejezetben részletesen ismertetem ezt az eredményt, és a félegyenesre vonatkozó megfelelőjét. Ezek teszik lehetővé a stabilitás kérdésének vizsgálatát, amivel a hetedik fejezetben foglalkozunk.

3. Új tudományos eredmények

Új tudományos eredményeket tartalmaz a második, a harmadik, a negyedik, az ötödik és a hetedik fejezet.

A második fejezetben a sajátértékek hányadosairól szóló becslések bizonyítása a cél. Ashbaugh és Benguria [10] bizonyították, hogy ha a $q(x)$ potenciál nemnegatív, akkor

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \leq n^2.$$

Két tetszőleges sajátérték hányadosára módszerük a

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \leq \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil^2$$

korlátot adta, ahol $\lceil x \rceil$ x felső egészrészét jelöli. Megmutatták azt is, hogy vannak olyan potenciálok, amelyek esetén $\frac{\lambda_n}{\lambda_m}$ tetszőlegesen megközelíti $\frac{n}{m}$-et. Ezek a példák azonban úgynevezett „multiple-well” (sokvölgyes) potenciálok, amelyek a $[0, \pi]$ intervallumon belül néhány pont környezetében nagyon nagy értékeket vesznek föl, míg máshol közel 0-t. Ez alapján azt sejtették, hogy ha a potenciál nem pusztán nemnegatív, hanem konvex is, akkor az egészrészek elhagyhatók, azaz

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \leq \frac{n^2}{m^2} \quad n \geq m$$

is teljesül.

Témavezetőmmel közösen bizonyítottuk [4], hogy a sejtés erősebb formában is igaz; elegendő, ha a potenciálról csak azt tesszük fel, hogy egyvölgyes (single-well) [9], azaz létezik egy olyan $a \in \in [0, \pi]$, hogy q monoton csökken $[0, a]$-n és monoton nő $[a, \pi]$-n. Módszerünkkel számos további új eredmény bizonyítható, mint például a 2.2.2.-2.2.4. tételek.

A harmadik fejezetben hasonló tételeket fogalmazok meg a végtelen intervallum esetére (3.3.1., 3.3.8., 3.3.10. tételek), ezek szintén közös eredmények.

A rezgő húr egyenlete Liouville-transzformációval egydimenziós Schrödinger-egyenletté alakítható át. Ezen alapul a 4.2.1. tétel. Szintén saját eredményem a 4.3.2. tétel, amelyben bizonyítom, hogy ha a húr ϱ tömegsűrűsége

- **szimmetrikus egyvölgyes, akkor $\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \leq n^2$,**
- **szimmetrikus egygátas, akkor $\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \geq n^2$.**

Ha $\varrho \in C^1[0, \pi]$ és valamilyen $n > 1$-re egyenlőség van, akkor ϱ konstans. (A tömegsűrűség szimmetrikus, ha $\varrho(x) = \varrho(\frac{\pi}{2} - - x)$, míg egygátas (single-barrier), ha $-\varrho$ egyvölgyes.)

Az ötödik fejezetben Ambarzumian típusú tételeket bizonyítok. Saját eredményem az 5.2.2. és a Dirac operátorra vonatkozó 5.3.1. tétel. Utóbbi az 5.3.3 peremfeltétel esetén azt állítja, hogy ha a Dirac operátor spektruma

ugyanaz, mint a 0 potenciállal kapott spektrum, akkor az operátorban szereplő mátrix potenciál a 0.

A hatodik fejezetben tárgyalt, exponenciális rendszerek teljességére vonatkozó állítások vezettek az inverz sajátértékfeladat újfajta kitűzéséhez. A hetedik fejezetben ennek a stabilitását vizsgálom. A potenciált meghatározó sajátértékrendszer fogalma nélkül ugyanis eddig csak nagyon speciális stabilitásról szóló tételek létez(het)tek.

A 7.3.1. tétel a véges intervallum esetén lényegében tisztázza a stabilitás kérdését [6]. Tekintsük a

$$\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi_n = \cos 2\sqrt{\lambda_n} x : n \geq 1,$$

függvényrendszert és a

$$b \mapsto (\langle b, \varphi_n \rangle) \qquad (n \geq 1)$$

$L_0^r \to l^s$ leképezést, ahol $1 \leq r, s \leq \infty$ és $L_0^r = \{h \in L^r : \int_0^\pi h = 0\}$. Legyen $q, q^* \in L^1$, $\|q\|_1, \|q^*\|_1 \leq D$, és tegyük fel, hogy valamilyen adott α_n számokkal $\frac{1}{4} \leq \lambda_n \in \sigma(\alpha_n, 0, q)$, $\frac{1}{4} \leq \lambda_n^* \in \sigma(\alpha_n, 0, q^*)$ $(n \geq \geq 1)$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ and $\lim_{n\to\infty} |\lambda^*{}_n - \lambda_n| = 0$. Ha az előző leképezés inverze korlátos, és az inverz normája C, akkor

$$\|q^* - q\|_r \leq c(D)C \left(\sum_n |\lambda_n - \lambda_n^*|^s \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Ha az inverz nem korlátos, akkor minden q potenciálhoz és minden $U > 0$, $M > 0$ számhoz létezik olyan q^* potenciál, hogy $\|q - - q^*\|_r \leq U$ és

$$\|q - q^*\|_r > M \left(\sum_n |\lambda_n - \lambda_n^*|^s \right)^{\frac{1}{s}}.$$