Kiss Márton

# Sajátértékeloszlás és inverz feladatok

*Schrödinger és Dirac operátorok spektrális tulajdonságai egy dimenzióban*

Disszertáció

Témavezető:
Horváth Miklós
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet
Analízis Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet
2007

# Köszönetnyilvánítás

A dolgozat elején szeretnék köszönetet mondani Horváth Miklósnak, aki bevezetett a témába és mindvégig értékes gondolatokkal és megjegyzésekkel segítette munkámat. Szintén köszönet illeti a Budapesti Műszaki Egyetem Analízis Tanszékét és Petz Dénest, a tanszék vezetőjét, amiért a dolgozat megírásához szükséges körülményeket biztosította számomra.

# Nyilatkozat

Kijelentem, hogy ezt a doktori disszertációt magam készítettem, és abban csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, amelyet szó szerint, vagy azonos tartalommal, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

A dolgozat bírálatai és a védésről készült jegyzőkönyv a későbbiekben a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Természettudományi Karának Dékáni Hivatalában elérhetők.

# Bevezetés

## Schrödinger operátorok

A Schrödinger operátor szokásos alakja:

$$Hf(x) := -\Delta f(x) + V(x)f(x),$$

ahol a valós értékű $V(x)$ függvényt potenciálnak nevezzük. A Schrödinger operátorok vizsgálatának szükségessége a kvantummechanikából ered. Az $f \in L^2(\mathrm{R}^n)$, $||f||_2 = 1$ függvény neve hullámcsomag vagy állapot, és többnyire egy elektronokból, atomokból és molekulákból álló rendszer pillanatnyi együttes állapotát írja le. A $H$ operátort történeti okokból hívják Hamilton operátornak is. A rendszer időfejlődését a Schrödinger-egyenlet írja le:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -iHf,$$

amelynek a megoldása (időfüggetlen $H$ operátor esetén)

$$f(x,t) = e^{-iHt} f(x,0).$$

A rendszer kinetikus energiája $< -\Delta f, f >$, potenciális energiája $< Vf, f >$, összegük a teljes energia, $< Hf, f >$. $H$ legkisebb sajátértéke adja meg, amennyiben létezik, a legalacsonyabb energiaszintet, míg ahozzá tartozó sajátfüggvény a rendszer legkisebb energiájú állapotát írja le. A többi sajátérték a gerjesztett állapotoknak felel meg. Ebben az egyszerűsített modellben minden részecskéről feltételeztük, hogy 0 spinű, $\frac{1}{2}$ tömegű, ám ez is jelzi a differenciáloperátorok spektrálelméletének fontosságát a kvantummechanikában, a XX. sz. egyik legfontosabb tudományos elméletében. A fizikai háttér részletesebb elemzése és példák (hidrogén- és héliumatom, sokrészecske-rendszerek, stb.) tekintetében utalunk az irodalomra [16, 27, 57].

## Schrödinger operátorok egy dimenzióban

Egy dimenzióban:

$$Ly(x) := -y''(x) + q(x)y(x), \quad x \in (a,b), \tag{1}$$

ahol $-\infty \le a < b \le \infty$. A továbbiakban főleg az $a=0, b=\pi$ és az $a=0, b=\infty$ esetet vizsgáljuk, $q \in L^1$ mellett. Az ismert alaptételek ennél általánosabb felépítése található [66]-ban.

## Az egydimenziós eset alkalmazásai

Számos egyéb alkalmazás mellett részletesebben is vizsgáljuk a következőt:

Tekintsünk egy két végén rögzített, $l$ hosszúságú, inhomogén tömegeloszlású rezgő húrt! Az $u = u(x,t)$ kitérés és a $\varrho(x) > 0$ tömegsűrűség kielégíti a

$$\varrho(x)u_{tt} = u_{xx}$$

hullámegyenletet és az

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0$$

peremfeltételeket. Egy $\omega$ frekvenciájú,

$$u(x,t) = y(x)(a\cos\omega t + b\sin\omega t)$$

alakú periodikus rezgés akkor elégíti ki a hullámegyenletet, ha

$$y'' + \omega^2\varrho(x)y = 0 \tag{2}$$

és

$$y(0) = 0, \qquad y(0) = 0.$$

Megkérdezhetjük, hogy hányféle (és milyen) tömegeloszlás mellett kapjuk ugyanazokat a sajátfrekvenciákat. Liouville vette először észre, hogy ha $\varrho$ kétszer folytonosan differenciálható, akkor (2) az (1) alakra transzformálható, míg a Dirichlet peremfeltétel változatlan marad. Így az inverz Dirichlet probléma egy természetes kérdés a rezgő húrok vizsgálatakor.

## A dolgozat felépítése

A Schrödinger operátor, sőt általában a differenciáloperátorok fizikai eredetűek. Sokszor azonban különböző alkalmazásokhoz tartozó operátorokat hasonló matematikai módszerekkel lehet vizsgálni, míg más esetekben ugyanaz a gyakorlati probléma többféle matematikai megközelítést tehet szükségessé. Dolgozatomban az alkalmazott *matematikai* módszerek szerinti csoportosítást választottam.

Az első fejezetben korszerű bevezetést adok a legegyszerűbb,

$$-y'' + qy = \lambda y$$

alakú Sturm-Liouville típusú differenciálegyenletek elméletébe. Igyekeztem minden állításhoz egy lehetőleg egyszerű bizonyítás vázlatát megadni. Részletes bizonyításokat csak ott közöltem, ahol a jól ismert eredmények finomítására vagy továbbfejlesztésére volt szükség. A második fejezetben a sajátértékek hányadosairól szóló becslések bizonyítása a cél. Az első szakasz a kérdést felvető korábbi eredményeket, a második a témavezetőmmel közös eredményeinket tartalmazza (2.2.2.-2.2.4. tételek). A harmadik részben hasonló tételeket fogalmazok meg a végtelen intervallum esetére (3.3.1., 3.3.8., 3.3.10. tételek), ezek szintén közös eredmények. A negyedik fejezet összefoglalja a rezgő húr sajátértékeiről szóló eddigi állításokat. A 4.2.1. tételt először én mondtam ki, noha a bizonyítás technikája ismert volt korábban is; a 4.3.2. tétel teljesen a saját eredményem.

A dolgozat második felében rátérünk az inverz feladatok megoldására. Az ötödik fejezetben Ambarzumian típusú tételeket bizonyítunk. Az ilyen tételek közös vonása, hogy egy speciális peremfeltétellel adott spektrumból származó összes sajátérték ismeretében meghatározható a $q$ potenciál – rendszerint valamilyen szélsőérték-tulajdonság segítségével. Itt saját eredményem az 5.2.2. és a Dirac operátorra vonatkozó 5.3.1. tétel. A függelékben röviden összefoglaltam a Dirac operátorokra vonatkozó alapvető tudnivalókat. A hatodik fejezetben általában vizsgálom, hogy (nem feltétlenül azonos peremfeltételből származó) sajátértékek egy halmaza mikor határozza meg a potenciált. A szükséges és elégséges feltétel egy, a sajátértékekből adódó exponenciális rendszer teljessége. A fejezet összes eredménye Horváth Miklóstól származik. A hetedik fejezetben az inverz sajátértékprobléma stabilitását vizsgálom. A stabilitás vizsgálatához szükségesek a hatodik fejezet eredményei; mivel ezek csak 2005-ben és 2006-ban jelentek meg, eddig csak nagyon speciális, stabilitásról szóló tételek léteztek. A 7.3.1. tétel a véges intervallum, míg a 7.7.1. tétel a félegyenes esetében nemcsak pótolja ezt a hiányt, hanem lényegében tisztázza, hogy milyen típusú eredmények várhatóak a területen. Ezek a tételek témavezetőmmel közös munkánk eredményei, eddig nem jelentek meg nyomtatásban.

# Tartalomjegyzék

# 1. fejezet

# Sturm-Liouville operátorok

## 1.1. Kezdetiérték-feladat egydimenziós Schrödinger egyenletekre

Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet:

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x), \tag{1.1.1}$$

ahol $0\le x\le\pi$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $q\in L^1[0,\pi]$. Később általában azt is feltesszük, hogy $q$ valós értékű, de erre egyelőre nincs szükségünk. Tekintsük az egyenlet két lineárisan független megoldását az

$$y_1(0,\lambda,q)=1, \quad y_1'(0,\lambda,q)=0, \tag{1.1.2}$$

$$y_2(0,\lambda,q)=0, \quad y_2'(0,\lambda,q)=1 \tag{1.1.3}$$

kezdeti feltételek mellett. A lineáris differenciálegyenletekről szóló általános tételek szerint (lásd pl. [14], Chapter 3.), (1.1.1) bármely megoldása kifejezhető $y_1$ és $y_2$ segítségével, mégpedig az

$$y(x)=y(0)y_1(x)+y'(0)y_2(x) \tag{1.1.4}$$

alakban.

A $q=0$ esetben kapott megoldásokra vezessük be a

$$c_\lambda(x)=\cos\sqrt{\lambda}x, \qquad s_\lambda(x)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \tag{1.1.5}$$

rövidítéseket. Ezek minden $x$-re az egész komplex számsíkon $\lambda$ reguláris függvényei.

**1.1.1. Tétel.** *[7, 16, 42, 56, 66]*

$$y_1(x,\lambda,q)=c_\lambda(x)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(x,\lambda,q), \tag{1.1.6}$$

$$y_2(x,\lambda,q) = s_\lambda(x) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x,\lambda,q), \tag{1.1.7}$$

*ahol*

$$C_n(x,\lambda,q) = \int_0^{x=t_n} \int_0^{t_{n-1}} \dots \int_0^{t_1} c_\lambda(t_0) \prod_{j=1}^{n} [s_\lambda(t_j - t_{j-1})(q(t_{j-1})]\ \mathrm{d}t_0 \dots\ \mathrm{d}t_{n-1},$$

$$S_n(x,\lambda,q) = \int_0^{x=t_n} \int_0^{t_{n-1}} \dots \int_0^{t_1} s_\lambda(t_0) \prod_{j=1}^{n} [s_\lambda(t_j - t_{j-1})(q(t_{j-1})]\ \mathrm{d}t_0 \dots\ \mathrm{d}t_{n-1}.$$

*Az (1.1.6)-(1.1.7) sorok* $[0,\pi]\times\mathbb{C}\times L^1(0,\pi)$ *korlátos részhalmazain egyenletesen konvergálnak.*

**1.1.2. Következmény.** *[7, 16, 42, 48, 56, 66] A megoldások kielégítik az alábbi integrálegyenleteket:*

$$y_1(x,\lambda,q) = c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)y_1(t,\lambda,q)\ \mathrm{d}t, \tag{1.1.8}$$

$$y_2(x,\lambda,q) = s_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)y_2(t,\lambda,q)\ \mathrm{d}t. \tag{1.1.9}$$

*Ha pedig egy folytonos függvény kielégíti valamelyik integrálegyenletet, akkor egyben megoldása a megfelelő kezdetiértékproblémának is.*

**1.1.3. Állítás.** *[7, 16, 42, 48, 56, 66]*

$$|y_1(x,\lambda,q)| \le \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x + x||q||_1), \tag{1.1.10}$$

$$|y_2(x,\lambda,q)| \le x\exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x + x||q||_1). \tag{1.1.11}$$

*Bizonyítás.*

$$|c_\lambda(x)| = \frac{1}{2}|e^{i\sqrt{\lambda}x} + e^{-i\sqrt{\lambda}x}| \le \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x), \tag{1.1.12}$$

valamint

$$|s_\lambda(x)| = \left|\int_0^x c_\lambda(t)\ \mathrm{d}t\right| \le \int_0^x \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|t)\ \mathrm{d}t \le x\exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x), \tag{1.1.13}$$

ezért

$$\begin{aligned} |C_n(x,\lambda,q)| &\le \int_0^{x=t_n} \dots \int_0^{t_1} |c_\lambda(t_0)| \prod_{j=1}^{n} |s_\lambda(t_j - t_{j-1})(q(t_{j-1})|\ \mathrm{d}t_0 \dots\ \mathrm{d}t_{n-1} \\ &\le x^n \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x) \int_0^{x=t_n} \dots \int_0^{t_1} \prod_{j=1}^{n} |(q(t_{j-1})|\ \mathrm{d}t_0 \dots\ \mathrm{d}t_{n-1} \\ &\le x^n \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x) \frac{1}{n!}\left[\int_0^x |q(t)|\ \mathrm{d}t\right]^n, \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

és hasonlóképpen

$$|S_n(x,\lambda,q)| \le x^{n+1} \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x)\frac{1}{n!}\left[\int_0^x |q(t)|\ \mathrm{d}t\right]^n. \tag{1.1.15}$$

Ezeket a becsléseket összeadva az állítást kapjuk. □

**Megjegyzés.** Az előbbi állítás bizonyítása során kapott becslések elegendők lennének az összes, ebben a szakaszban található tétel bizonyítására.

**1.1.4. Tulajdonságok.** *[7, 16, 42, 48, 56, 66]*

$$|y_1(x,\lambda,q)-c_\lambda(x)| \le \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x+\pi||q||_1), \tag{1.1.16}$$

$$|y_2(x,\lambda,q)-s_\lambda(x)| \le \frac{1}{|\lambda|} \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x+\pi||q||_1), \tag{1.1.17}$$

$$|y_1'(x,\lambda,q)+\lambda s_\lambda(x)| \le ||q||_1 \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x+\pi||q||_1), \tag{1.1.18}$$

$$|y_2'(x,\lambda,q)-c_\lambda(x)| \le \frac{||q||_1}{\sqrt{|\lambda|}} \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x+\pi||q||_1). \tag{1.1.19}$$

**1.1.5. Tétel.** *[56, 66] Ha $q_m \to q$ gyengén $L^1$-ben, akkor*

$$y_j(x,\lambda,q_m) \to y_j(x,\lambda,q) \qquad j=1,2. \tag{1.1.20}$$

*A konvergencia $[0,\pi]\times\mathbb{C}\times L^1$ korlátos részhalmazain egyenletes.*

**1.1.6. Következmény.** *Ha $q_m \to q$ gyengén $L^1$-ben, akkor*

$$y_j'(x,\lambda,q_m) \to y_j'(x,\lambda,q) \qquad j=1,2. \tag{1.1.21}$$

*A konvergencia $[0,\pi]\times\mathbb{C}\times L^1$ korlátos részhalmazain egyenletes.*

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk az előző tételt és az alábbi egyenlőségeket:

$$y_1'(x,\lambda,q) = -\lambda s_\lambda(x) + \int_0^x c_\lambda(x-t)q(t)y_1(t,\lambda,q)\ \mathrm{d}t. \tag{1.1.22}$$

$$y_2'(x,\lambda,q) = c_\lambda(x) + \int_0^x c_\lambda(x-t)q(t)y_2(t,\lambda,q)\ \mathrm{d}t. \tag{1.1.23}$$

□

## 1.2. Schrödinger egyenlet a félegyenesen

Tekintsük az (1.1.1) differenciálegyenletet ezúttal a félegyenesen, azaz legyen $0 \le x < \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $q \in L^1(0,\infty)$. Később általában azt is feltesszük, hogy $q$ valós értékű, de erre egyelőre nincs szükségünk. Akkor mondjuk, hogy $y(x,\lambda)$ megoldása a Schrödinger-egyenletnek, ha $L^2(0,\infty)$-beli és megoldása az (1.1.1) differenciálegyenletnek.

**1.2.1. Tétel.** *[7, 66] Az (1.1.1) differenciálegyenlet $L^2(0,\infty)$-beli megoldása a $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\lambda \ge 0\}$ halmazon egyértelmű, és*

$$y(x,\lambda,q) = e^{i\sqrt{\lambda}x} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n(x,\lambda,q), \tag{1.2.1}$$

*ahol* $\Im\sqrt{\lambda} > 0$ *és*

$$E_n(x,\lambda,q) = \int_{x=t_n}^{\infty} \dots \int_{t_1}^{\infty} e^{i\sqrt{\lambda}t_0} \prod_{j=1}^{n} [s_\lambda(t_{j-1}-t_j)q(t_{j-1})] \, \mathrm{d}t_0 \dots \, \mathrm{d}t_{n-1}. \tag{1.2.2}$$

**1.2.2. Következmény.** *[7, 66] A megoldás kielégíti az*

$$y(x,\lambda,q) = e^{i\sqrt{\lambda}x} + \int_x^{\infty} s_\lambda(t-x)q(t)y(t,\lambda,q) \, \mathrm{d}t \tag{1.2.3}$$

*integrálegyenletet; ha pedig egy folytonos függvényre teljesül az integrálegyenlet, akkor az egyben az (1.1.1) egyenlet $L^2$-beli megoldása.*

**1.2.3. Állítás.**

$$|y(x,\lambda,q)| \le \exp\left(-|\Im\sqrt{\lambda}|x + \frac{\int_x^\infty |q|}{|\sqrt{\lambda}|}\right) \tag{1.2.4}$$

*és a* $Q(x) = \int_x^\infty q$ *jelöléssel*

$$|y(x,\lambda,q)| \le \exp\left(-|\Im\sqrt{\lambda}|x + \int_x^\infty |Q|\right). \tag{1.2.5}$$

*Bizonyítás.* Az

$$|s_\lambda(x)| \le \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp\left(|\Im\sqrt{\lambda}|x\right) \tag{1.2.6}$$

becslést felhasználva egyrészt

$$|E_n(x,\lambda,q)| \le \exp\left(-|\Im\sqrt{\lambda}|x\right) \frac{1}{n!} \left[\frac{\int_x^\infty |q|}{|\sqrt{\lambda}|}\right]^n, \tag{1.2.7}$$

másrészt $n$-szer parciálisan integrálva

$$|E_n(x,\lambda,q)| \le \exp\left(-|\Im\sqrt{\lambda}|x\right) \frac{1}{n!} \left[\int_x^\infty |Q|\right]^n. \tag{1.2.8}$$

A véges esethez hasonlóan ezekből a szakasz minden állítása következik. □

### 1.2.4. Tulajdonságok.

$$|y(x,\lambda,q)-e^{i\sqrt{\lambda}x}| \leq \exp(-\Im\sqrt{\lambda}x)(\exp\frac{||q||_1}{|\sqrt{\lambda}|})-1), \tag{1.2.9}$$

$$|y(x,\lambda,q)-e^{i\sqrt{\lambda}x}| \leq \exp(-\Im\sqrt{\lambda}x)(\exp||Q||_1-1), \tag{1.2.10}$$

$$|y'(x,\lambda,q)-i\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}x}| \leq ||q||_1 \exp(-|\Im\sqrt{\lambda}|x+\frac{||q||_1}{\sqrt{\lambda}}) \tag{1.2.11}$$

$$|y'(x,\lambda,q)-i\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}x}| \leq \frac{||q||_1}{\sqrt{|\lambda|}} \exp(-|\Im\sqrt{\lambda}|x+||Q||_1) \tag{1.2.12}$$

**1.2.5. Tétel.** *Ha $q_m \to q$ gyengén $L^1$-ben, akkor*

$$y(x,\lambda,q_m) \to y(x,\lambda,q). \tag{1.2.13}$$

*Ha $|\lambda|$, $\frac{1}{|\lambda|}$, $\|q_m\|_1$ és $\|q\|_1$ korlátos, akkor a konvergencia egyenletes.*

**1.2.6. Következmény.** *Ha $q_m \to q$ gyengén $L^1$-ben, akkor*

$$y'(x,\lambda,q_m) \to y'(x,\lambda,q). \tag{1.2.14}$$

*Ha $|\lambda|$, $\frac{1}{|\lambda|}$, $\|q_m\|_1$ és $\|q\|_1$ korlátos, akkor a konvergencia egyenletes.*

**1.2.7. Tétel.** *Ha $Q_m \to Q$ gyengén $L^1$-ben, akkor*

$$y(x,\lambda,q_m) \to y(x,\lambda,q). \tag{1.2.15}$$

*Ha $|\lambda|$, $\|Q_m\|_1$ és $\|Q\|_1$ korlátos, akkor a konvergencia egyenletes.*

**1.2.8. Következmény.** *Ha $Q_m \to Q$ gyengén $L^1$-ben, akkor*

$$y'(x,\lambda,q_m) \to y'(x,\lambda,q). \tag{1.2.16}$$

*Ha $|\lambda|$, $\|Q_m\|_1$ és $\|Q\|_1$ korlátos, akkor a konvergencia egyenletes.*

**Megjegyzés.** $y(x,\lambda)$ előállítása és a szakasz $Q$-val felírt becslései akkor is érvényben maradnak, ha $q$ nem feltétlenül $L^1$-beli, de létezik a $Q(x)=\int_x^\infty q$ improprius integrál és $Q \in L^1(0,\infty)$. Sőt, ha (1.1.1) helyett az

$$-y''\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}Q=\lambda y\,\mathrm{d}x \tag{1.2.17}$$

egyenletet vizsgálnánk, $Q$-ról még az abszolút folytonosságot sem kellene föltenni.

## 1.3. Transzformációs operátorok

Az inverz feladatok megoldásához legjobban használható eszköz a különböző potenciálokhoz tartozó megoldásokat egymásba vivő Gelfand-Levitan-Marchenko integráloperátor [20]. Különös hatékonyságának a kulcsa, hogy az operátor magja nem függ $\lambda$-tól.

**1.3.1. Tétel.** *[42, 52, 53] Tekintsük az alábbi kezdetiérték-problémát:*

$$-y''+q(x)y=\lambda y, \quad y(0,\lambda)=1, \quad y'(0,\lambda)=iz, \tag{1.3.1}$$

*ahol $\lambda=z^2$, $z\in\mathbb{C}$, $q\in L^1_{loc}(-\infty,\infty)$ valós értékű. Akkor*

$$y(x,\lambda,q)=e^{ixz}+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{itz}\ \mathrm{d}t \tag{1.3.2}$$

*valamilyen $K(x,t)$ $|t|\le x$ folytonos kétváltozós magfüggvénnyel.*

**Megjegyzés.** $q=0$ esetén a megoldás éppen $e^{ixz}$.

**1.3.2. Lemma.** *[7, 42, 48] Az $y(x)$ folytonos függvény pontosan akkor megoldása az (1.3.1) kezdetiértékproblémának, ha*

$$y(x)=e^{ixz}+\int_0^x\frac{\sin z(x-t)}{z}q(t)y(t)\ \mathrm{d}t. \tag{1.3.3}$$

**1.3.3. Lemma.** *[52, 53] Ha $K(x,t)$ kielégíti a*

$$K(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}}q+\int_0^x\int_{\max(u-(x-t),-u)}^{\min(-u+(x-t),u)}q(u)K(u,\tau)\ \mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}u \tag{1.3.4}$$

*integrálegyenletet, akkor*

$$y(x,\lambda)=e^{ixz}+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{itz}\ \mathrm{d}t \tag{1.3.5}$$

*kielégíti az (1.3.3) integrálegyenletet.*

*Bizonyítás.*

$$\int_0^x\frac{\sin z(x-t)}{z}q(t)y(t)\ \mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\sin z(x-t)}{z}q(t)[e^{itz}+\int_{-t}^{t}K(t,\tau)e^{i\tau z}\ \mathrm{d}\tau]\ \mathrm{d}t.$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{\sin z(x-t)}{z}e^{i\tau z}=\frac{1}{2}\int_{\tau-(x-t)}^{\tau+(x-t)}e^{iuz}\ \mathrm{d}u,$$

egyrészt

$$\int_0^x \frac{\sin z(x-t)}{z} q(t) e^{itz} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^x \int_{2t-x}^x e^{iuz} \, \mathrm{d}u \, q(t) \, \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-x}^x e^{iuz} \int_0^{\frac{x+u}{2}} q(t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}u,$$

másrészt

$$\int_0^x q(t) \int_{-t}^t K(t,\tau) \frac{\sin z(x-t)}{z} e^{i\tau z} \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^x q(t) \int_{-t}^t K(t,\tau) \frac{1}{2} \int_{\tau-(x-t)}^{\tau+(x-t)} e^{iuz} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}t =$$
$$= \int_{-x}^x e^{iuz} [\int_0^x q(t) \frac{1}{2} \int_{\max(u-(x-t),-u)}^{\min(-u+(x+t),u)} K(t,\tau) \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}t] \, \mathrm{d}u.$$

Felhasználva a $K$-ra adott integrálegyenletet, a kettő összege

$$\frac{1}{2} \int_{-x}^x e^{iuz} K(x,u) \, \mathrm{d}u = y(x) - e^{ixz}, \tag{1.3.6}$$

azaz $y(x)$ kielégíti az (1.3.3) integrálegyenletet. $\square$

**Megjegyzés.** Mivel $z$-ről csak azt használtuk ki, hogy $z^2 = \lambda$, ugyanezzel a $K(x,t)$ magfüggvénnyel

$$e^{-ixz} + \int_{-x}^x K(x,t) e^{-itz} \, \mathrm{d}t \tag{1.3.7}$$

az

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y(0,\lambda) = 1, \quad y'(0,\lambda) = -iz, \tag{1.3.8}$$

kezdetiértékprobléma megoldása.

**1.3.4. Állítás.** *[52, 53] $K(x,t)$ mindkét változójában differenciálható, és*

$$K(x,x) = \frac{1}{2} \int_0^x q, \quad K(x,-x) = 0. \tag{1.3.9}$$

*Bizonyítás.* Az $u = \alpha + \beta$, $\tau = \alpha - \beta$ helyettesítésekkel

$$K(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x+t}{2}} q + \int_0^{\frac{x+t}{2}} \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\alpha+\beta) K(\alpha+\beta, \alpha-\beta) \, \mathrm{d}\beta \, \mathrm{d}\alpha, \tag{1.3.10}$$

amiből az állítás következik. $\square$

Tudjuk, hogy ha van olyan $K$, ami kielégíti ezt az integrálegyenletet, akkor $y$ is kielégíti a rá megkövetelt (1.3.3) integrálegyenletet, azaz az (1.3.1) kezdetiérték-problémát is. A $H(v,w)=K(v+w,v-w)$ jelöléssel

$$H(v,w)=\frac{1}{2}\int_0^v q+\int_0^v\int_0^w q(\alpha+\beta)H(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha. \tag{1.3.11}$$

A következő lemmában bizonyítjuk, hogy ennek az integrálegyenletnek létezik folytonos megoldása; ezzel tételünk bizonyítása teljes lesz.

**1.3.5. Lemma.** *[52, 53] Az (1.3.11) integrálegyenletnek a pozitív síknegyed bármely korlátos halmazán létezik folytonos megoldása.*

*Bizonyítás.* Legyen

$$H_0(v,w)=\frac{1}{2}\int_0^v q,\quad H_{n+1}(v,w)=\int_0^v\int_0^w q(\alpha+\beta)H_n(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha, \tag{1.3.12}$$

és vezessük be az alábbi segédfüggvényeket:

$$\sigma_0(x)=\int_0^x |q|,\qquad \sigma_1(x)=\int_0^x \sigma_0. \tag{1.3.13}$$

Mindkét függvény monoton növő, sőt, $\sigma_1$ konvex is. Legyen

$$M(v,w)=\sigma_1(v+w)-\sigma_1(v)-\sigma_1(w), \tag{1.3.14}$$

mindkét változójában monoton növekedő függvény.

**1.3.6. Állítás.** *[52, 53]*

$$|H_n(v,w)|\le\frac{1}{2}\sigma_0(v)\frac{M^n(v,w)}{n!},\ \text{ha } n\ge 0. \tag{1.3.15}$$

*Bizonyítás.* Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás $n=0$-ra nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $n=k$-ra igaz, akkor

$$\begin{aligned}|H_{k+1}(v,w)|&\le\int_0^v\int_0^w |q(\alpha+\beta)|\frac{1}{2}\sigma_0(\alpha)\frac{M^k(\alpha,\beta)}{k!}\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha\le\\ &\le\frac{1}{2}\sigma_0(v)\int_0^v\frac{M^k(\alpha,w)}{k!}\int_0^w|q(\alpha+\beta)|\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha=\\ &=\frac{1}{2}\sigma_0(v)\int_0^v\frac{M^k(\alpha,w)}{k!}(\sigma_0(\alpha+w)-\sigma_0(\alpha))\,\mathrm{d}\alpha=\\ &=\frac{1}{2}\sigma_0(v)\left[\frac{M^{k+1}(\alpha,w)}{(k+1)!}\right]_{\alpha=0}^{\alpha=v},\end{aligned}$$

ez pedig éppen az, amit állítottunk. □

Legyen ezután

$$H(v,w)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(v,w). \tag{1.3.16}$$

Az előbbi állításban adott becslés $\sigma_1$ konvexitása miatt mindkét változójában monoton növekedő, így az összeg egyenletesen konvergens a $v\geq 0, w\geq 0$ síknegyed korlátos részhalmazain. Emiatt $H$ folytonos, és könnyen ellenőrizhető az is, hogy teljesíti a lemmában megkövetelt integrálegyenletet. □

A transzformációs operátor magfüggvénye segítségével pontosabb becsléseket írhatunk fel a kezdetiérték-probléma megoldására, illetve két különböző potenciál esetén a megoldások különbözőségére. Ennek nagy jelentősége lesz a stabilitással kapcsolatos fejezetben.

Tekintsünk két potenciált, $q$-t és $q^*$-ot, és legyen $H^*$ az a függvény, ami kielégíti az (1.3.11) integrálegyenletet $q$ helyett $q^*$-gal. Azt szeretnénk megbecsülni, hogy ha $q$ és $q^*$ közel vannak egymáshoz, akkor mit mondhatunk $H$ és $H^*$ eltéréséről. Módosítsuk $\sigma_0$ (és ennek megfelelően $\sigma_1$, valamint $M$) definícióját a következőképpen: legyen

$$\sigma_0(x)=\max\left(\int_0^x|q|,\int_0^x|q^*|\right). \tag{1.3.17}$$

Vezessük be a

$$\delta_0(x)=\int_0^x|q-q^*|,\qquad \delta_1(x)=\int_0^x\delta_0 \tag{1.3.18}$$

függvényeket, valamint legyen

$$\Delta(v,w)=\delta_1(v+w)-\delta_1(v)-\delta_1(w). \tag{1.3.19}$$

Az eddigiekhez hasonlóan $\sigma_0$ és $\delta_0$ monoton növő, $\sigma_1$ és $\delta_1$ konvex, $\Delta$ pedig mindkét változójában monoton növekedő függvény.

Nyilván $|H_0(v,w)-{H^*}_0(v,w)|\leq\frac{1}{2}\delta_0(v)$, valamint

**1.3.7. Állítás.** *[32]*

$$|H_n(v,w)-{H^*}_n(v,w)|\leq\frac{1}{2}\delta_0(v)\frac{M^n(v,w)}{n!}+ \\ +\frac{1}{2}\sigma_0(v)\Delta(v,w)\frac{M^{n-1}(v,w)}{(n-1)!},\ \textit{ha } n\geq 1.$$

*Bizonyítás.* Ismét teljes indukcióval bizonyítunk. $n=1$-re

$$\begin{aligned}
|H_1(v,w)-{H^*}_1(v,w)| &\leq \\
&\leq \int_0^v \int_0^w |q(\alpha+\beta)H_0(\alpha,\beta)-q^*(\alpha+\beta){H^*}_0(\alpha,\beta)|\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha \leq \\
&\leq \int_0^v \int_0^w |q(\alpha+\beta)||H_0(\alpha,\beta)-{H^*}_0(\alpha,\beta)|\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha + \\
&+ \int_0^v \int_0^w |q(\alpha+\beta)-q^*(\alpha+\beta)||{H^*}_0(\alpha,\beta)|\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\delta_0(v)M(v,w)+\frac{1}{2}\sigma_0(v)\Delta(v,w).
\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy az állítás $n=k$-ra igaz, akkor

$$\begin{aligned}
|H_{k+1}(v,w)-{H^*}_{k+1}(v,w)| &\leq \\
\leq& \int_0^v \int_0^w |q(\alpha+\beta)||H_k(\alpha,\beta)-{H^*}_k(\alpha,\beta)|\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha + \\
+& \int_0^v \int_0^w |q(\alpha+\beta)-q^*(\alpha+\beta)||{H^*}_k(\alpha,\beta)|\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha \leq \\
\leq& \int_0^v \int_0^w |q(\alpha+\beta)|\frac{1}{2}\delta_0(v)\frac{M^k(\alpha,w)}{k!}\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha + \\
+& \int_0^v \int_0^w |q(\alpha+\beta)|\frac{1}{2}\sigma_0(v)\Delta(\alpha,w)\frac{M^{k-1}(\alpha,w)}{(k-1)!}\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha + \\
+& \int_0^v \int_0^w |q(\alpha+\beta)-q^*(\alpha+\beta)|\frac{1}{2}\sigma_0(v)\frac{M^k(\alpha,w)}{k!}\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha = \\
=& \frac{1}{2}\delta_0(v)\int_0^v \frac{M^k(\alpha,w)}{k!}(\sigma_0(\alpha+w)-\sigma_0(\alpha))\,\mathrm{d}\alpha + \\
+& \frac{1}{2}\sigma_0(v)\int_0^v \Delta(\alpha,w)\frac{M^{k-1}(\alpha,w)}{(k-1)!}(\sigma_0(\alpha+w)-\sigma_0(\alpha))\,\mathrm{d}\alpha + \\
+& \frac{1}{2}\sigma_0(v)\int_0^v (\delta_0(\alpha+w)-\delta_0(\alpha))\frac{M^k(\alpha,w)}{k!}\,\mathrm{d}\alpha = \\
=& \frac{1}{2}\delta_0(v)\left[\frac{M^{k+1}(\alpha,w)}{(k+1)!}\right]_{\alpha=0}^{\alpha=v} + \frac{1}{2}\sigma_0(v)\left[\Delta(\alpha,w)\frac{M^k(\alpha,w)}{k!}\right]_{\alpha=0}^{\alpha=v},
\end{aligned}$$

ez pedig éppen az, amit állítottunk. □

**1.3.8. Következmény.** *[32] Az eddigi jelölésekkel*

$$|K(x,t)-K^*(x,t)| \leq \frac{1}{2}\left[\delta_0(\frac{x+t}{2})+\sigma_0(\frac{x+t}{2})\Delta(\frac{x+t}{2},\frac{x-t}{2})\right]e^{M(\frac{x+t}{2},\frac{x-t}{2})}. \tag{1.3.20}$$

*Bizonyítás.* Adjuk össze az előző állításban kapott becsléseket:

$$|H(v,w)-H^*(v,w)| \leq \frac{1}{2}\left[\delta_0(v)+\sigma_0(v)\Delta(v,w)\right]e^{M(v,w)}, \tag{1.3.21}$$

ez pedig ugyanaz, mint amit bizonyítani akartunk. □

**1.3.9. Tétel.** *[32] Tekintsük az (1.3.1) kezdetiértékproblémát a $q$ illetve a $q^*$ potenciálokkal véges, például a $[0,\pi]$ intervallumon. Ekkor $||q||_1, ||q^*||_1 \leq D$ mellett a $K$, $K^*$ magfüggvényekre*

$$|K(x,t)-K^*(x,t)| \leq c(D)||q-q^*||_1 \tag{1.3.22}$$

*teljesül, ahol a $c(D)$ konstans független a $q$, $q^*$ potenciálok választásától.*

*Bizonyítás.* Könnyen látható, hogy

$$\delta_0(\frac{x+t}{2}) \leq \delta_0(x) \leq ||q-q^*||_1, \tag{1.3.23}$$

$$\Delta(\frac{x+t}{2}, \frac{x-t}{2}) \leq \delta_1(x) \leq \pi||q-q^*||_1, \tag{1.3.24}$$

és hasonló becslések teljesülnek $\sigma$-ra és $M$-re. Így

$$c(D) = (D+\frac{1}{2})e^{2\pi D} \tag{1.3.25}$$

megfelelő választás lesz. □

**1.3.10. Következmény.** *[52, 53] Legyen $y_1$ és $y_2$ ugyanaz, mint az előző pontban, és legyen $y_\alpha = y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha$. Ekkor*

$$y_\alpha(x,\lambda,q) = y_\alpha(x,\lambda,0) + \int_{-x}^{x} K(x,t,q) y_\alpha(t,\lambda,0)\ \mathrm{d}t. \tag{1.3.26}$$

*Bizonyítás.* Jelölje $y_-$ az $y_-(0,\lambda)=1$, $y_-'(0,\lambda) = -iz$ kezdeti értékekből induló megoldást.

$$y_1(x,\lambda) = \frac{y(x,\lambda)+y_-(x,\lambda)}{2}, \tag{1.3.27}$$

valamint

$$y_2(x,\lambda) = \frac{y(x,\lambda)-y_-(x,\lambda)}{2iz}, \tag{1.3.28}$$

ezért

$$y_1(x,\lambda) = \cos xz + \int_{-x}^{x} K(x,t)\cos tz\ \mathrm{d}t \tag{1.3.29}$$

és

$$y_2(x,\lambda) = \frac{\sin xz}{z} + \int_{-x}^{x} K(x,t)\frac{\sin tz}{z}\ \mathrm{d}t. \tag{1.3.30}$$

A két egyenlet lineáris kombinációja az állítást adja. □

**1.3.11. Következmény.** *[52, 53] Létezik olyan ($\alpha$-tól függő), mindkét változójában differenciálható $K_\alpha(x,t)$ magfüggvény, hogy*

$$y_2(x,\lambda) = \frac{\sin xz}{z} + \int_0^x K_0(x,t)\frac{\sin tz}{z}\ \mathrm{d}t, \tag{1.3.31}$$

*míg* $\sin\alpha \neq 0$*-ra*

$$y_\alpha(x,\lambda) = \sin\alpha\cos xz + \int_0^x K_\alpha(x,t)\cos tz\ \mathrm{d}t, \tag{1.3.32}$$

*és két különböző potenciálhoz tartozó magfüggvényre*

$$|K_\alpha(x,t) - K_\alpha^*(x,t)| \leq c(D)||q-q^*||_1 \tag{1.3.33}$$

*teljesül.*

*Bizonyítás.* Mivel a színuszfüggvény páratlan, (1.3.29)-ben az integrálásokat elég 0-tól $x$-ig elvégezni a $K(x,t)-K(x,-t)$ magfüggvénnyel. Ha pedig $\sin\alpha\neq 0$, akkor

$$\frac{\sin xz}{z} = \int_0^x \cos tz\ \mathrm{d}t \tag{1.3.34}$$

miatt a

$$\begin{aligned} K_\alpha(x,t) = {} & \sin\alpha[K(x,t)+K(x,-t)]+ \\ & +\cos\alpha[1+K(x,x)-K(x,-x)-\int_0^t K(x,\tau)-K(x,-\tau)\ \mathrm{d}\tau] \end{aligned} \tag{1.3.35}$$

választás megfelelő lesz.

A különböző potenciálokhoz tartozó magfüggvények eltérésére vonatkozó becslés az előző tétel nyilvánvaló következménye. □

## 1.4. Transzformációs operátorok a félegyenesen

Ebben az alfejezetben olyan transzformációs operátort keresünk, ami a félegyenesen adott Schrödinger-egyenlet $L^2$-beli megoldásait viszi egymásba.

**1.4.1. Tétel.** *[7, 52, 53] Tekintsük az alábbi problémát:*

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y(x,\lambda) = e^{ixz}(1+o(1)), \quad x\to\infty, \tag{1.4.1}$$

*ahol* $\lambda = z^2$, $\Im z \geq 0$, $q(x), xq(x) \in L^1(0,\infty)$ *valós értékű. Akkor*

$$y(x,\lambda,q) = e^{ixz} + \int_x^\infty K(x,t)e^{itz}\ \mathrm{d}t \tag{1.4.2}$$

*valamilyen* $K(x,t)$ $t\geq x$ *folytonos kétváltozós magfüggvénnyel.*

**Megjegyzés.** $q=0$ esetén a megoldás éppen $e^{ixz}$.
**Megjegyzés.** Az $y(x)$ folytonos függvény pontosan akkor megoldása az (1.4.1) problémának, ha

$$y(x)=e^{ixz}+\int_x^\infty \frac{\sin z(t-x)}{z}q(t)y(t)\ \mathrm{d}t \tag{1.4.3}$$

**1.4.2. Lemma.** *[52, 53] Ha $K(x,t)$ kielégíti a*

$$K(x,t)=\frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty q+\int_x^\infty\int_t^{t+(u-x)} q(u)K(u,\tau)\ \mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}u \tag{1.4.4}$$

*integrálegyenletet, akkor*

$$y(x,\lambda)=e^{ixz}+\int_x^\infty K(x,t)e^{itz}\ \mathrm{d}t \tag{1.4.5}$$

*kielégíti az (1.4.3) integrálegyenletet.*

*Bizonyítás.*

$$\int_x^\infty \frac{\sin z(t-x)}{z}q(t)y(t)\ \mathrm{d}t=\int_x^\infty \frac{\sin z(t-x)}{z}q(t)[e^{itz}+\int_t^\infty K(t,\tau)e^{i\tau z}\ \mathrm{d}\tau]\ \mathrm{d}t.$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{\sin z(t-x)}{z}e^{i\tau z}=\frac{1}{2}\int_{\tau-(t-x)}^{\tau+(t-x)} e^{iuz}\ \mathrm{d}u,$$

egyrészt

$$\begin{aligned}\int_x^\infty \frac{\sin z(x-t)}{z}q(t)e^{itz}\ \mathrm{d}t&=\frac{1}{2}\int_x^\infty\int_x^{2t-x} e^{iuz}\ \mathrm{d}u\,q(t)\ \mathrm{d}t=\\&=\frac{1}{2}\int_x^\infty e^{iuz}\int_{\frac{x+u}{2}}^\infty q(t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}u,\end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned}&\int_x^\infty q(t)\int_t^\infty K(t,\tau)\frac{\sin z(t-x)}{z}e^{i\tau z}\ \mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}t=\\&\qquad=\int_x^\infty q(t)\int_t^\infty K(t,\tau)\frac{1}{2}\int_{\tau-(t-x)}^{\tau+(t-x)} e^{iuz}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}t=\\&\qquad=\int_x^\infty e^{iuz}[\int_x^\infty q(t)\frac{1}{2}\int_u^{u+(t-x)} K(t,\tau)\ \mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}t]\ \mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Felhasználva a $K$-ra adott integrálegyenletet, a kettő összege

$$\int_x^\infty e^{iuz}K(x,u)\ \mathrm{d}u=y(x)-e^{ixz}, \tag{1.4.6}$$

azaz $y(x)$ kielégíti az (1.4.3) integrálegyenletet. □

**1.4.3. Állítás.** *[52, 53] $K(x,t)$ mindkét változójában differenciálható, és*

$$K(x,x)=\frac{1}{2}\int_x^\infty q. \tag{1.4.7}$$

*Bizonyítás.* Az $u=\alpha-\beta$, $\tau=\alpha+\beta$ helyettesítésekkel

$$K(x,t)=\frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty q+\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty\int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\alpha-\beta)K(\alpha-\beta,\alpha+\beta)\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha, \tag{1.4.8}$$

amiből az állítás következik. $\square$

Tudjuk, hogy ha van olyan $K$, ami kielégíti ezt az integrálegyenletet, akkor $y$ is kielégíti a rá megkövetelt (1.4.3) integrálegyenletet, azaz az (1.4.1) kezdetiérték-problémát is. A $H(v,w)=K(v-w,v+w)$ jelöléssel

$$H(v,w)=\frac{1}{2}\int_v^\infty q+\int_v^\infty\int_0^w q(\alpha-\beta)H(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha. \tag{1.4.9}$$

A következő lemmában bizonyítjuk, hogy ennek az integrálegyenletnek létezik folytonos megoldása; ezzel tételünk bizonyítása teljes lesz.

**1.4.4. Lemma.** *[52, 53] Az (1.4.9) integrálegyenletnek bármely $0\le w\le v<\infty$ halmazon létezik folytonos megoldása.*

*Bizonyítás.* Legyen

$$H_0(v,w)=\frac{1}{2}\int_v^\infty q,\quad H_{n+1}(v,w)=\int_v^\infty\int_0^w q(\alpha-\beta)H_n(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha, \tag{1.4.10}$$

és vezessük be az alábbi segédfüggvényeket:

$$\sigma_0(x)=\int_x^\infty |q|,\qquad \sigma_1(x)=\int_x^\infty \sigma_0. \tag{1.4.11}$$

Mindkét függvény nemnegatív, monoton csökkenő, sőt, $\sigma_1$ konvex is. Legyen

$$M(v,w)=\sigma_1(v-w)-\sigma_1(v), \tag{1.4.12}$$

első változójában monoton csökkenő, második változójában monoton növő függvény.

**1.4.5. Állítás.** *[52, 53]*

$$|H_n(v,w)|\le\frac{1}{2}\sigma_0(v)\frac{M^n(v,w)}{n!},\ \textit{ha}\ n\ge 0. \tag{1.4.13}$$

*Bizonyítás.* Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás $n = 0$-ra nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz, akkor

$$\begin{aligned}|H_{k+1}(v,w)| &\le \int_v^\infty \int_0^w |q(\alpha-\beta)| \frac{1}{2}\sigma_0(\alpha)\frac{M^k(\alpha,\beta)}{k!}\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha \le \\ &\le \frac{1}{2}\sigma_0(v)\int_v^\infty \frac{M^k(\alpha,w)}{k!}\int_0^w |q(\alpha-\beta)|\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha = \\ &= \frac{1}{2}\sigma_0(v)\int_v^\infty \frac{M^k(\alpha,w)}{k!}(\sigma_0(\alpha-w)-\sigma_0(\alpha))\,\mathrm{d}\alpha = \\ &= -\frac{1}{2}\sigma_0(v)\left[\frac{M^{k+1}(\alpha,w)}{(k+1)!}\right]_{\alpha=v}^{\alpha=\infty},\end{aligned}$$

ez pedig éppen az, amit állítottunk. □

Legyen ezután

$$H(v,w) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(v,w). \tag{1.4.14}$$

Az előbbi állításban adott becslés a $0 \le w \le v < \infty$ alakú halmazokon $\frac{1}{2}\sigma_0(0)\frac{\sigma_1(0)}{n!}$-ral becsülhető, így az összeg egyenletesen konvergens. Emiatt $H$ folytonos, és könnyen ellenőrizhető az is, hogy teljesíti a lemmában megkövetelt integrálegyenletet. □

**1.4.6. Állítás.** *[52, 53]*

$$|K(x,t)| \le \frac{1}{2}\sigma_0\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{\sigma_1(x)-\sigma_1(\frac{x+t}{2})}. \tag{1.4.15}$$

*Bizonyítás.* Adjuk össze az (1.4.13) becsléseket minden $n \ge 0$-ra. □

**1.4.7. Állítás.** *[52, 53]*

$$\int_x^\infty |K(x,t)|\,\mathrm{d}t \le e^{\sigma_1(x)}. \tag{1.4.16}$$

*Bizonyítás.* Integráljuk az előző állításban kapott becslést. □

Ugyanúgy, mint az előző szakaszban, módosítsuk $\sigma_0$ (és ennek megfelelően $\sigma_1$, valamint $M$) definícióját a következőképpen: legyen

$$\sigma_0(x) = \max\left(\int_x^\infty |q|, \int_x^\infty |q^*|\right). \tag{1.4.17}$$

Vezessük be a

$$\delta_0(x) = \int_x^\infty |q-q^*|, \qquad \delta_1(x) = \int_x^\infty \delta_0 \tag{1.4.18}$$

függvényeket, valamint legyen

$$\Delta(v,w) = \delta_1(v-w) - \delta_1(v). \tag{1.4.19}$$

Az eddigiekhez hasonlóan $\sigma_0$ és $\delta_0$ monoton csökkenő, $\sigma_1$ és $\delta_1$ konvex is, $\Delta$ pedig első változójában monoton csökkenő, második változójában monoton növekedő függvény.

Nyilván $|H_0(v,w)-{H^*}_0(v,w)| \leq \frac{1}{2}\delta_0(v)$, valamint

**1.4.8. Állítás.** *[33]*

$$|H_n(v,w)-{H^*}_n(v,w)| \leq \frac{1}{2}\delta_0(v)\frac{M^n(v,w)}{n!}+ \\ +\frac{1}{2}\sigma_0(v)\Delta(v,w)\frac{M^{n-1}(v,w)}{(n-1)!},\ \textit{ha } n \geq 1.$$

*Bizonyítás.* Ismét teljes indukcióval bizonyítunk. $n=1$-re

$$\begin{aligned} &|H_1(v,w)-{H^*}_1(v,w)| \leq \\ &\leq \int_v^\infty \int_0^w |q(\alpha-\beta)H_0(\alpha,\beta)-q^*(\alpha-\beta){H^*}_0(\alpha,\beta)|\ \mathrm{d}\beta\ \mathrm{d}\alpha \leq \\ &\leq \int_v^\infty \int_0^w |q(\alpha-\beta)||H_0(\alpha,\beta)-{H^*}_0(\alpha,\beta)|\ \mathrm{d}\beta\ \mathrm{d}\alpha + \\ &+ \int_v^\infty \int_0^w |q(\alpha-\beta)-q^*(\alpha-\beta)||{H^*}_0(\alpha,\beta)|\ \mathrm{d}\beta\ \mathrm{d}\alpha \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\delta_0(v)M(v,w)+\frac{1}{2}\sigma_0(v)\Delta(v,w). \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy az állítás $n=k$-ra igaz, akkor

$$\begin{aligned} &|H_{k+1}(v,w)-{H^*}_{k+1}(v,w)| \leq \\ &\leq \int_v^\infty \int_0^w |q(\alpha-\beta)||H_k(\alpha,\beta)-{H^*}_k(\alpha,\beta)|\ \mathrm{d}\beta\ \mathrm{d}\alpha + \\ &+ \int_v^\infty \int_0^w |q(\alpha-\beta)-q^*(\alpha-\beta)||{H^*}_k(\alpha,\beta)|\ \mathrm{d}\beta\ \mathrm{d}\alpha \leq \\ &\leq \int_v^\infty \int_0^w |q(\alpha-\beta)|\frac{1}{2}\delta_0(v)\frac{M^k(\alpha,w)}{k!}\ \mathrm{d}\beta\ \mathrm{d}\alpha + \\ &+ \int_v^\infty \int_0^w |q(\alpha-\beta)|\frac{1}{2}\sigma_0(v)\Delta(\alpha,w)\frac{M^{k-1}(\alpha,w)}{(k-1)!}\ \mathrm{d}\beta\ \mathrm{d}\alpha + \\ &+ \int_v^\infty \int_0^w |q(\alpha-\beta)-q^*(\alpha-\beta)|\frac{1}{2}\sigma_0(v)\frac{M^k(\alpha,w)}{k!}\ \mathrm{d}\beta\ \mathrm{d}\alpha = \\ &= \frac{1}{2}\delta_0(v)\int_v^\infty \frac{M^k(\alpha,w)}{k!}(\sigma_0(\alpha-w)-\sigma_0(\alpha))\ \mathrm{d}\alpha + \\ &+ \frac{1}{2}\sigma_0(v)\int_v^\infty \Delta(\alpha,w)\frac{M^{k-1}(\alpha,w)}{(k-1)!}(\sigma_0(\alpha-w)-\sigma_0(\alpha))\ \mathrm{d}\alpha + \\ &+ \frac{1}{2}\sigma_0(v)\int_v^\infty (\delta_0(\alpha-w)-\delta_0(\alpha))\frac{M^k(\alpha,w)}{k!}\ \mathrm{d}\alpha = \\ &= -\frac{1}{2}\delta_0(v)\left[\frac{M^{k+1}(\alpha,w)}{(k+1)!}\right]_{\alpha=v}^{\alpha=\infty} - \frac{1}{2}\sigma_0(v)\left[\Delta(\alpha,w)\frac{M^k(\alpha,w)}{k!}\right]_{\alpha=v}^{\alpha=\infty}, \end{aligned}$$

ez pedig éppen az, amit állítottunk. □

**1.4.9. Következmény.** *[33] Az eddigi jelölésekkel*

$$|K(x,t)-K^*(x,t)| \le \frac{1}{2}\left[\delta_0(\frac{x+t}{2})+\sigma_0(\frac{x+t}{2})\Delta(\frac{x+t}{2},\frac{t-x}{2})\right]e^{M(\frac{x+t}{2},\frac{t-x}{2})}. \tag{1.4.20}$$

*Bizonyítás.* Adjuk össze az előző állításban kapott becsléseket:

$$|H(v,w)-H^*(v,w)| \le \frac{1}{2}\left[\delta_0(v)+\sigma_0(v)\Delta(v,w)\right]e^{M(v,w)}, \tag{1.4.21}$$

ez pedig ugyanaz, mint amit bizonyítani akartunk. □

**1.4.10. Következmény.** *[33] Az eddigi jelölésekkel*

$$\int_x^\infty |K(x,t)-K^*(x,t)|\ \mathrm{d}t \le \Delta(\frac{x+t}{2},\frac{t-x}{2})e^{M(\frac{x+t}{2},\frac{t-x}{2})}. \tag{1.4.22}$$

*Bizonyítás.* Integráljuk az előző következményben kapott becslést. □

**1.4.11. Tétel.** *[33] Tekintsük az (1.4.1) problémát a $q$ illetve a $q^*$ potenciálokkal. Ekkor $||q||_1, ||q^*||_1, ||xq(x)||_1, ||xq^*(x)||_1 \le D$ mellett a $K$, $K^*$ magfüggvényekre egyrészt*

$$|K(x,t)-K^*(x,t)| \le c(D)(||q-q^*||_1+||xq(x)-xq^*(x)||_1), \tag{1.4.23}$$

*másrészt*

$$\int_x^\infty |K(x,t)-K^*(x,t)|\ \mathrm{d}t \le c(D)(||q-q^*||_1+||xq(x)-xq^*(x)||_1) \tag{1.4.24}$$

*teljesül, ahol a $c(D)$ konstans független a $q$, $q^*$ potenciálok választásától.*

*Bizonyítás.* Könnyen látható, hogy

$$\delta_0(\frac{x+t}{2}) \le \delta_0(x) \le ||q-q^*||_1, \tag{1.4.25}$$

$$\Delta(\frac{x+t}{2},\frac{t-x}{2}) \le \delta_1(x) \le ||xq(x)-xq^*(x)||_1, \tag{1.4.26}$$

és hasonló becslések teljesülnek $\sigma$-ra és $M$-re. Így mindkét becslésben

$$c(D) = (D+\frac{1}{2})e^D \tag{1.4.27}$$

megfelelő választás lesz. □

## 1.5. Polárkoordináták

Legyen $y(x,\lambda)$ (1.1.1) tetszőleges megoldása. A $q$-tól való függést most nem tüntetjük fel, de feltesszük, hogy $q$ is és $\lambda$ is valósak. Vezessük be az alábbi (Prüfer-) változókat:

$$y(x,\lambda) = r(x,\lambda)\sin\varphi(x,\lambda), \tag{1.5.1}$$

$$y'(x,\lambda) = r(x,\lambda)\cos\varphi(x,\lambda), \tag{1.5.2}$$

ahol $r(x,\lambda) > 0$. Új változóinkra a következő egyenlőségek teljesülnek:

$$\varphi' = \cos^2\varphi + (\lambda - q)\sin^2\varphi, \tag{1.5.3}$$

$$\frac{r'}{r} = (q-\lambda)\sin\varphi\cos\varphi. \tag{1.5.4}$$

Ez a transzformáció általános Sturm-Liouville típusú egyenletekre is elvégezhető [14, 66].

**Megjegyzés.** $q$ folytonossági pontjaiban ezek a formulák a klasszikus értelemben teljesülnek, míg a többi pontban általánosított (disztribúciós) értelemben.

**1.5.1. Állítás.**

$$r^2(0,\lambda)\exp\left[-(||q||_1 + \lambda x)\right] \le r^2(x,\lambda) \le r^2(0,\lambda)\exp\left(||q||_1 + \lambda x\right) \tag{1.5.5}$$

*Bizonyítás.* Következik (1.5.4)-ből. □

**1.5.2. Következmény.** *Ha $q_m \to q$ $L^1$-ben, akkor*

$$r(x,\lambda,q_m) \to r(x,\lambda,q) \qquad j = 1{,}2, \tag{1.5.6}$$

$$\varphi(x,\lambda,q_m) \to \varphi(x,\lambda,q) \qquad j = 1{,}2, \tag{1.5.7}$$

*és a konvergencia $[0,\pi]\times\mathbb{C}\times L^1$ korlátos részhalmazain egyenletes.*

*Bizonyítás.* Az 1.1.5. tétel és az 1.1.6. következmény szerint $y$ és $y'$ egyenletesen konvergál a megadott halmazokon, tehát $r^2 = y^2 + y'^2$ és $r$ is. Az előző becslés szerint $r$ és $\frac{1}{r}$ egyenletesen korlátos, így az $(y,y') = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ vektor egyenletes konvergenciájából következik a $(\cos\varphi,\sin\varphi)$ vektor egyenletes konvergenciája, ebből pedig $\varphi$ egyenletes konvergenciája is. □

**Megjegyzés.** Sok bizonyításban módosított Prüfer-változókat használnak. Ha $y(x,z)$ a $-y'' + q(x)y = z^2 y$ egyenlet megoldása, akkor az

$$y(x,z) = \frac{r(x,z)}{z}\sin\varphi(x,z), \tag{1.5.8}$$

$$y'(x,z) = r(x,z)\cos\varphi(x,z) \tag{1.5.9}$$

módosított Prüfer-változókra a következő egyenlőségek igazak:

$$\varphi' = z - \frac{q}{z}\sin^2\varphi, \tag{1.5.10}$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{q}{z} \sin\varphi \cos\varphi. \tag{1.5.11}$$

Ez a transzformáció sokszor jobb, mint az előző, mert $y'(x,z)$ és $zy(x,z)$ nagyságrendje megegyezik. Hátránya, hogy csak pozitív $\lambda$-kra alkalmazható, például nemnegatív potenciálok esetén. A módosított Prüfer-transzformáció hossz-változójára teljesül az 1.5.1. állításnál jóval erősebb

$$r^2(0,z) \exp\left[-\frac{||q||_1}{z}\right] \le r^2(x,z) \le r^2(0,z) \exp\frac{||q||_1}{z}, \tag{1.5.12}$$

tehát az 1.5.2. tétel állítása ezekre a változókra is igaz.

## 1.6. Összehasonlító tételek. Nullhelyek. Oszcillációs tételek.

**1.6.1. Tétel** (összehasonlító tétel)**.** *Legyen $F(t,x) \le G(t,x)$ $[0,\infty] \times I$-n, ahol $I \subset$ $\subset \mathbb{R}$ véges vagy végtelen intervallum. Tekintsük az alábbi kezdetiérték-feladatokat:*

$$x'(t) = F(t, x(t)), \qquad x(a) = c, \tag{1.6.1}$$

$$x'(t) = G(t, x(t)), \qquad x(a) = d. \tag{1.6.2}$$

*Ha*

- *az (1.6.1) és az (1.6.2) kezdetiérték-feladat megoldása létezik és egyértelmű,*
- *$F(t,x) \le G(t,x)$ $[a,b] \times I$-n, valamilyen $I \subset \mathbb{R}$, a megoldásokat, de legalábbis az (1.6.1) egyenlet megoldását tartalmazó intervallumra,*
- *$x_1(t)$ és $x_2(t)$ az (1.6.1) és (1.6.2) egyenlet megoldása úgy, hogy $x_1(a) =$ $= c \le d = x_2(a)$,*

*akkor*

$$x_1(t) \le x_2(t), \qquad a \le t \le b, \tag{1.6.3}$$

*és ha egy $t_0 \in (a,b)$-re egyenlőség van, akkor $a \le t \le t_0$-ra is.*

A Sturm-féle oszcillációs tételek a megoldások nullhelyeinek egymáshoz viszonyított elhelyezkedéséről szólnak. (1.5.3) alapján ezek az előző tétel egyszerű következményei, például:

**1.6.2. Tétel.** *Legyen $y(x,\lambda)$ (1.1.1) tetszőleges megoldása, $\lambda_1 < \lambda_2$. Ekkor $y(x,\lambda_1)$ bármely két nullhelye között van $y(x,\lambda_2)$-nek is nullhelye.*

*Bizonyítás.* Vegyük észre, hogy

$$y = 0 \Leftrightarrow \varphi = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.6.4}$$

Legyenek ezért $\varphi_1(x)$ és $\varphi_2(x)$ a megfelelő szögváltozók, mégpedig, ha $y(x,\lambda_1)$ két nullhelye $a$ és $b$, akkor

$$\varphi_1'(x) = \cos^2\varphi_1(x) + (\lambda_1 - q(x))\sin^2\varphi_1(x), \qquad \varphi_1(a) = 0, \tag{1.6.5}$$

$$\varphi_2'(x) = \cos^2\varphi_2(x) + (\lambda_2 - q(x))\sin^2\varphi_2(x), \qquad \varphi_2(a) = d, \tag{1.6.6}$$

ahol $0 \le d < \pi$ és $\tan d = \frac{y(x,\lambda_2)}{y'(x,\lambda_2)}$. Ellenőrizhető, hogy $\varphi_1$-re és $\varphi_2$-re teljesülnek az összehasonlító tétel feltételei, ezért $\varphi_2(b) > \varphi_1(b) \ge \pi > \varphi_2(a)$. A Bolzano tétel szerint tehát valamilyen $a < x < b$-re $\varphi_2(x) = \pi$, azaz $y(x,\lambda_2) = 0$. □

## 1.7. A véges intervallumon értelmezett Schrödinger operátor spektruma

Tekintsük az (1.1.1) egydimenziós Schrödinger-egyenletet az

$$y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0, \tag{1.7.1}$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 \tag{1.7.2}$$

peremfeltételekkel, ahol $\alpha$, $\beta$ adott valós számok. Ha valamilyen $\lambda$ komplex (valós, mint később látni fogjuk) számra (1.1.1)-(1.7.1)-(1.7.2)-nek van nemtriviális megoldása, akkor $\lambda$ sajátérték, a megoldással, mint hozzá tartozó sajátfüggvénnyel.

**1.7.1. Definíció.** *$\sigma(\alpha,\beta,q)$-val jelöljük az (1.1.1) egyenletnek az (1.7.1)-(1.7.2) peremfeltételekkel adódó spektrumát.*

**Megjegyzés.** Az (1.7.1)-(1.7.2) peremfeltételeket úgy választottuk, hogy

$$y(x) \in \sigma(\alpha,\beta,q(x)) \Longleftrightarrow y(\pi - x) \in \sigma(\beta,\alpha,q(\pi - x)). \tag{1.7.3}$$

**1.7.2. Tétel.** *Az (1.1.1)-(1.7.1)-(1.7.2) sajátértékproblémának megszámlálhatóan végtelen sok sajátértéke létezik, $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \lambda_n < \ldots$, $\lambda_n \to +\infty$. A $\lambda_n$-hez tartozó sajátfüggvénynek $n$ darab nullhelye van a $(0,\pi)$ nyílt intervallumon. A sajátfüggvények teljes ortogonális rendszert alkotnak $L^2[0,\pi]$-ben.*

**Megjegyzés.** A sajátfüggvények számozása az egyes speciális esetekben az itt megadottól eltérő lehet.
**Megjegyzés.** Általános Sturm-Liouville egyenletekre lásd [66]-ban a 4.3.1. tételt.
**Megjegyzés.** Parciális differenciálegyenletekre lásd [18]-ban a 9.4. tételt.

*Bizonyítás.* Feltehető, hogy $0 \le \alpha, \beta \le \pi$. (1.1.1) és (1.7.1) megoldása minden $\lambda$-ra egyértelmű, legyen ez a megoldás $y(x,\lambda)$, és alkalmazzuk a polárkoordinátákban való felírást. (1.5.3) szerint

$$\varphi' = \cos^2\varphi + (\lambda - q)\sin^2\varphi, \tag{1.7.4}$$

míg az (1.7.1) kezdeti feltételből

$$\varphi(0,\lambda) = \alpha. \tag{1.7.5}$$

Ha $q$ folytonos, akkor az (1.7.4) felírás alapján $\sin\varphi = 0 \Longrightarrow \varphi' > 0$, tehát $\varphi \ge 0$. Az összehasonlító tétel miatt $\varphi(x,\lambda)$ növekvő $\lambda$-ban. Az is könnyen látható, hogy rögzített $x \in [0,\pi]$ mellett $\lim_{\lambda\to-\infty}\varphi(x,\lambda) = 0$, valamint $\lim_{\lambda\to+\infty}\varphi(x,\lambda) = +\infty$. Az 1.5.2. tétel szerint ez $q \in L^1$-re is teljesül. $\lambda$ pontosan akkor sajátérték, ha $\varphi(\pi,\lambda) \equiv -\beta$ moduló $\pi$. Mivel $\varphi(\pi,\lambda)$ monoton növő $\lambda$-ban, létezik egy olyan $\lambda_0$ érték, amelyre $\varphi(\pi,\lambda_0) = \pi - \beta$. $0 \le \alpha, \beta \le \pi$ miatt $0 < \varphi(x,\lambda_0) < \pi$ $(0,\pi)$-n, így $y(x,\lambda_0)$ egy $(0,\pi)$-n el nem tűnő sajátfüggvény. $\lambda$ növelésével kapjuk a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ értékeket úgy, hogy $\varphi(\pi,\lambda_n) = (n+1)\pi - \beta$. Könnyen látható, hogy $\varphi(x,\lambda_n)$ sajátfüggvény lesz, $n$ darab gyökkel a $(0,\pi)$ nyílt intervallumon.

A sajátfüggvényrendszer teljességét illetően az általános elméletre hivatkozunk. □

## 1.8. Aszimptotikák

**1.8.1. Állítás.** *[48] Legyen $q \in L_1$, $\lambda_n \in \sigma(\alpha,\beta,q)$. Ha a sajátértékek számozását a $\sin\alpha = \sin\beta = 0$ esetben 1-től kezdjük, egyébként 0-tól, akkor*

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \gamma + \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

*ahol*

$$c = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q + \frac{1}{\pi}\cot\alpha - \frac{1}{\pi}\cot\beta, & \text{ha } \sin\alpha \ne 0, \sin\beta \ne 0 \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q + \frac{1}{\pi}\cot\alpha, & \text{ha } \sin\alpha \ne 0, \sin\beta = 0, \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q - \frac{1}{\pi}\cot\beta, & \text{ha } \sin\alpha = 0, \sin\beta \ne 0, \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q, & \text{ha } \sin\alpha = 0, \sin\beta = 0, \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \text{ha } \sin\alpha \ne 0, \sin\beta \ne 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } \sin\alpha \ne 0, \sin\beta = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } \sin\alpha = 0, \sin\beta \ne 0, \\ 0, & \text{ha } \sin\alpha = 0, \sin\beta = 0, \end{cases}$$

**1.8.2. Állítás.** *[42, 48, 56] Legyen $q \in L_1$, $g_n$ pedig a $\lambda_n \in \sigma(0,\beta,q)$-hoz tartozó ($L^2$-ben) normált sajátfüggvény. Akkor*

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1.8.1}$$

$$g_n'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}n\cos nx + O(1), \tag{1.8.2}$$

*$[0,\pi] \times L^1$ korlátos részhalmazain egyenletesen.*

**1.8.3. Állítás.** *[42, 48] Legyen $q \in L_1$, $\sin\alpha \neq 0$, $g_n$ pedig a $\lambda_n \in \sigma(\alpha,\beta,q)$-hoz tartozó ($L^2$-ben) normált sajátfüggvény. Akkor*

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx + O(\frac{1}{n}), \tag{1.8.3}$$

$$g_n'(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} n \sin nx + O(1), \tag{1.8.4}$$

*$[0,\pi]\times L^1$ korlátos részhalmazain egyenletesen.*

## 1.9. Rezolvens operátor és Green függvény

**1.9.1. Definíció.** *Tekintsük az (1.1.1) Schrödinger egyenlet két tetszőleges u,v megoldását! A*

$$W(\lambda) = W(u,v,\lambda) = \det \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \tag{1.9.1}$$

*mennyiséget az (1.1.1) egyenlet Wronsky determinánsának nevezzük.*

Az $x$-től való függést nem jelöltük, mert

**1.9.2. Állítás.** *A Wronsky determináns $x$-ben állandó.*

**1.9.3. Definíció.** *Legyen u és v (1.1.1) egy-egy megoldása, u az (1.7.1), v az (1.7.2) feltételek mellett. (1.1.1) Green függvénye:*

$$G(x,t,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{W(\lambda)} u(x,\lambda)v(t,\lambda), & x \leq t \\ \frac{1}{W(\lambda)} u(t,\lambda)v(x,\lambda), & x \geq t \end{cases} \tag{1.9.2}$$

*A Green függvényt az (1.1.1)-(1.7.1)-(1.7.2) probléma sajátértékeiben ($u = c\cdot v$ esetén) nem értelmezzük.*

**Megjegyzés.** A Wronsky determináns és a Green függvény tetszőleges lineáris differenciálegyenlet(rendszer) esetén definiálható. Általában azonban nem igaz, hogy a Wronsky determináns értéke konstans (lásd [14], Chapter 3., (6.5)).

**1.9.4. Állítás.** *Legyen $f \in L^2(0,\pi)$. Ha $y(x,\lambda) = \int_0^\pi G(x,t,\lambda)f(t)\ \mathrm{d}t$, akkor*

$$-y''(x,\lambda) + q(x)y(x,\lambda) = \lambda y(x,\lambda) + f(x). \tag{1.9.3}$$

Legyen $L$ az (1.1.1)-(1.7.1)-(1.7.2) sajátértékprobléma lineáris operátora, azaz legyen

$$Ly = -y'' + qy, \tag{1.9.4}$$

$$\begin{aligned} DomL = \{y, y' \in AC[0,\pi] : & y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0, \\ & y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0\}. \end{aligned}$$

Legyen továbbá $G : f(t) \mapsto \int_0^\pi G(x,t,\lambda)f(t)\ \mathrm{d}t$, $L^2 \to L^2$ folytonos lineáris. Az előző állításokat az $L$ és a $G$ operátorok segítségével a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

**1.9.5. Állítás.** *Ha $\lambda$ nem sajátérték, akkor*

$$(L-\lambda I)Gf = f, \qquad f \in L^2(0,\pi), \tag{1.9.5}$$

$$G(L-\lambda I)y = y, \qquad y \in Dom\ L. \tag{1.9.6}$$

A következő definíció értelmében tehát $-G$ az $L$ operátor rezolvense:

**1.9.6. Definíció.** *Legyen $T$ lineáris operátor. Akkor a $z \mapsto (zI-T)^{-1}$ $\mathbb{C}\backslash\sigma_T$-n értelmezett operátor értékű függvényt (ahol $\sigma_T$ a $T$ operátor spektruma) a $T$ operátor rezolvensének nevezzük.*

**1.9.7. Tétel.** *[47] Jelölje az (1.1.1)-(1.7.1)-(1.7.2) sajátértékprobléma $n$. sajátértékét $\lambda_n$, a hozzá tartozó normált sajátfüggvényt $g_n$. Akkor*

$$G(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n(x)g_n(t)}{\lambda_n - \lambda}, \qquad \lambda \neq \lambda_n. \tag{1.9.7}$$

## 1.10. m-függvény és spektrálfüggvény véges intervallumon

**1.10.1. Definíció.** *Jelölje $u(x,\lambda)$ az (1.1.1) egyenlet $u(0,\lambda) = \sin\alpha$, $u'(0,\lambda) = \cos\alpha$ kezdeti értékekből induló megoldását. A $\varrho(\lambda)$ spektrálfüggvény egy jobbról folytonos lépcsős függvény, ami az (1.1.1)-(1.7.1)-(1.7.2) sajátértékprobléma sajátértékeiben ugrik $\frac{1}{||u(x,\lambda)||_2^2}$-t, továbbá $\varrho(0) = 0$.*

Látható, hogy a spektrálfüggvény függ a definícióban önkényesen megválasztott kezdeti feltételekből induló megoldástól. Segítségével átfogalmazhatjuk az előző tételt:

**1.10.2. Tétel.**

$$G(x,t,\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{u(x,z)u(t,z)}{z-\lambda}\ \mathrm{d}\varrho(z). \tag{1.10.1}$$

**1.10.3. Állítás** (Spektrálfüggvény tulajdonságai)**.** *$f \in L^2(0,\pi)$-re létezik*

$$F(\lambda) = \int_0^{\pi} f(x)y(x,\lambda)\ \mathrm{d}x \in L^2(\mathbb{R},\ \mathrm{d}\varrho), \tag{1.10.2}$$

*és*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(\lambda)y(x,\lambda)\ \mathrm{d}\varrho(\lambda). \tag{1.10.3}$$

**1.10.4. Definíció.** *Jelölje $v(x,\lambda)$ (1.1.1) $v(\pi,\lambda) = \sin\beta$, $v'(\pi,\lambda) = -\cos\beta$ végpontbeli feltételeket kielégítő megoldását. Akkor az*

$$m_\beta(\lambda) = \frac{v'(0,\lambda)}{v(0,\lambda)} \tag{1.10.4}$$

*függvényt az (1.1.1)-(1.7.1)-(1.7.2) sajátértékprobléma m-függvényének nevezzük.*

**1.10.5. Állítás** ($m$-függvény tulajdonságai)**.** *[14] Az $m$-függvény meromorf, gyökei és pólusai valósak, egyszeresek, továbbá*

**(a)** $\Im\lambda > 0$*-ra* $\Im m(\lambda) > 0$,

**(b)** $\lambda \in \sigma(\alpha,\beta) \Longleftrightarrow m(\lambda) = \cot\alpha$.

**1.10.6. Tétel.** *[58] Legyen* $m_{\alpha,\beta} = \frac{m_\beta \sin\alpha - \cos\alpha}{m_\beta \cos\alpha + \sin\alpha}$. *Az (1.1.1)-(1.7.1)-(1.7.2) sajátértékprobléma $m$-függvénye és spektrálfüggvénye között a következő összefüggés áll fenn:*

$$m_{\alpha,\beta}(z) = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) \, \mathrm{d}\varrho(\lambda), \tag{1.10.5}$$

*valamint $\varrho$ folytonossági pontjaiban*

$$\varrho(\mu) - \varrho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_\lambda^\mu \Im m_{\alpha,\beta}(z + i\epsilon) \, \mathrm{d}z. \tag{1.10.6}$$

## 1.11. Schrödinger operátor a félegyenesen

Tekintsük a

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) \tag{1.11.1}$$

Schrödinger egyenletet a $[0,\infty)$ intervallumon. Megvizsgáljuk, hogy milyen peremfeltételek szükségesek ahhoz, hogy a megfelelő lineáris operátor önadjungált legyen, és néhány egyszerű megállapítást teszünk a spektrumra vonatkozóan. Végig feltesszük, hogy $q \in L^1_{loc}$, azaz a potenciál a véges szakaszokon integrálható.

**1.11.1. Állítás.** *[14, 48] Tegyük fel, hogy az (1.11.1) egyenletnek valamilyen $\lambda_0 \in \mathbb{C}$-re két darab lineárisan független $L^2$-beli megoldása van. Akkor $\forall \lambda \in \mathbb{C}$-re pontosan két darab lineárisan független $L^2$-beli megoldás létezik.*

**Megjegyzés.** A $q$ potenciáltól függően tehát vagy minden komplex $\lambda$-ra két lineárisan független $L^2$-beli megoldás létezik, vagy legfeljebb egy, és minden nemvalós $\lambda$-ra pontosan egy.

**1.11.2. Definíció.** *[63] Azt mondjuk, hogy határkör eset van, ha minden nemvalós $\lambda$-ra az (1.11.1) egyenletnek két lineárisan független $L^2$-beli megoldása van.*

**1.11.3. Definíció.** *[63] Azt mondjuk, hogy határpont eset van, ha minden nemvalós $\lambda$-ra az (1.11.1) egyenletnek csak egy lineárisan független $L^2$-beli megoldása van.*

**Megjegyzés.** Ezeket a definíciókat H. Weyl vezette be egy egyre kisebb sugarú koncentrikus körökből álló geometriai konstrukcióval kapcsolatban.

**1.11.4. Állítás.** *[14, 48] Ha az alábbi feltételek közül bármelyik teljesül:*

**a)** *$q$ alulról korlátos,*

**b)** *$q(x) > kx^2$ valamilyen $k > 0$-ra,*

**c)** *$q(x) \in L^1$,*

**d)** *$q(x) \in L^2 + L^\infty$,*

*akkor a határpont eset áll fenn.*

## 1.12. A határpont eset

Tekintsük az (1.11.1) egyenletet a $[0,\infty)$ intervallumon. A peremfeltételek legyenek

$$y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0, \tag{1.12.1}$$

valamilyen $\alpha$ valós számra. Határpont esetben az egyenlethez tartozó $L$ differenciáloperátor önadjungált, hiszen Ker $(L \pm i) = 0$.

Tekintsük ezután az (1.11.1) egyenletet a $[0,b]$ intervallumon, ahol $b \to \infty$! A peremfeltételek legyenek

$$y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0, \tag{1.12.2}$$

$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0, \tag{1.12.3}$$

ahol $\alpha$, $\beta$ adott valós számok. Legyen (hasonlóan a $[0,\pi]$ esethez) a probléma spektruma $\lambda_{0,b}, ..., \lambda_{n,b}, ...$, sajátfüggvényei $y_{n,b}(x)$, $m$-függvénye $m_{\beta,b}$, Green függvénye $G_b(x,t,\lambda)$.

**1.12.1. Definíció.** *Az*

$$m(\lambda) = \lim_{b\to\infty} m_{\beta,b}(\lambda) \tag{1.12.4}$$

*függvényt az (1.11.1)-(1.12.1) sajátértékprobléma $m$-függvényének nevezzük.*

**Megjegyzés.** Az $m$-függvény ott van értelmezve, ahol a limesz létezik, tehát legalábbis a nyílt alsó és felső félsíkokon, ugyanis határpont esetben az $m_{\beta,b}$ függvények $\beta$-tól függetlenül minden $\Im z \neq 0$-ra konvergálnak.

**1.12.2. Tétel.** *[14]*

**(a)** *$m(\lambda) = \frac{y'(0,\lambda)}{y(0,\lambda)}$ (ahol $y(x,\lambda)$ (1.11.1) $L^2$-beli megoldása),*

**(b)** *$m$ reguláris $\mathbb{C}\backslash\sigma(L)$-en, speciálisan a nyílt alsó és a nyílt felső félsíkon,*

**(c)** *$\Im\lambda > 0$-ra $\Im m(\lambda) > 0$.*

**1.12.3. Tétel.** *[14]*

**(i)** *Létezik egy $\mathbb{R}$-en monoton nemcsökkenő $\varrho$ spektrálfüggvény, hogy $\varrho_b$ gyengén tart $\varrho$-hoz, azaz*

$$\varrho(\lambda) - \varrho(\mu) = \lim_{b\to\infty} (\varrho_b(\lambda) - \varrho_b(\mu)) \tag{1.12.5}$$

*$\varrho$ folytonossági pontjaiban.*

**(ii)** *$f \in L^2(0,\infty)$-re létezik*

$$F(\lambda) = (L^2) \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)y(x,\lambda)\,\mathrm{d}x, \tag{1.12.6}$$

*és*

$$f(x) = (L^2) \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R F(\lambda)y(x,\lambda)\,\mathrm{d}\varrho(\lambda). \tag{1.12.7}$$

**1.12.4. Tétel.** *[58] Legyen $m_\alpha = \frac{m\sin\alpha - \cos\alpha}{m\cos\alpha + \sin\alpha}$. Az (1.11.1)-(1.12.1) probléma m-függvénye és spektrálfüggvénye között a következő összefüggés áll fenn:*

$$m_\alpha(z) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\,\mathrm{d}\varrho(\lambda), \tag{1.12.8}$$

*valamint $\varrho$ folytonossági pontjaiban*

$$\varrho(\mu) - \varrho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_\lambda^\mu \Im m_\alpha(z+i\epsilon)\,\mathrm{d}z. \tag{1.12.9}$$

**Megjegyzés.** Ez ugyanaz, mint véges intervallum esetében az 1.10.6. tétel.

A spektrum jellegéről teljes általánosságban a következőt mondhatjuk:

**1.12.5. Tétel.** *Az (1.11.1)-(1.12.1) problémához tartozó operátor spektruma egyszeres.*

Az előző szakaszban láttuk, hogy ha a potenciál $L^1$-beli, akkor határpont eset van. Ilyenkor a spektrum jellegéről tudjuk, hogy:

**1.12.6. Tétel.** *Legyen $q \in L^1$. Akkor az (1.11.1)-(1.12.1) probléma folytonos spektruma a $[0,\infty)$ félegyenes. A diszkrét spektrum legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok egyszeres sajátértékből áll, amelyek csak a 0 pontban torlódhatnak.*

A $[0,\infty)$ intervallumon kapott folytonos spektrum mellett lehet véges vagy végtelen számú negatív sajátérték is. A pontos szerkezet tisztázása érdekében (úgy $L^1$-beli, mint általánosabb potenciálok esetén) az utóbbi tíz évben jelentős lépések történtek. Az eredmények áttekintése megtalálható például az [58, 66] munkákban.

Még egy speciális esetet érdemes megemlíteni:

**1.12.7. Állítás.** *Ha $q(x) \to \infty$ amint $x \to \infty$, akkor a spektrum diszkrét, csak a $+\infty$-ben torlódhat.*

## 1.13. A határkör eset

Tekintsük az (1.11.1) egyenletet a $[0,\infty)$ intervallumon, és tegyük fel, hogy a határkör-eset áll fenn. Ekkor minden $\lambda$-ra két darab lineárisan független $L^2$-beli megoldás van. Legyen $\beta_j, b_j$ egy olyan sorozat, hogy a

$$y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0, \tag{1.13.1}$$

$$y(b_j)\cos\beta_j + y'(b_j)\sin\beta_j = 0, \tag{1.13.2}$$

peremfeltételekkel adott sajátértékproblémák $m_j$ $m$-függvényei egy adott $\lambda_0$ pontban konvergálnak a határkör [63] egy $m(\lambda_0)$ pontjához.

**1.13.1. Tétel.** *Ekkor*

$$\lim_{j\to\infty} m_j(\lambda) = m_\infty(\lambda) \tag{1.13.3}$$

*úgy, hogy az $m_\infty(\lambda)$ függvény meromorf, valós $\lambda$-ra valós, gyökei és pólusai valósak, egyszeresek. Ugyanez igaz az $m_{\alpha,\infty} = \frac{m_\infty \sin\alpha - \cos\alpha}{m_\infty \cos\alpha + \sin\alpha}$ függvényre. Továbbá létezik egy olyan $\varrho$ lépcsős függvény, amely $m_{\alpha,\infty}$ $\lambda_0, \ldots, \lambda_n, \ldots$ pólusaiban ugrik, folytonossági pontjaiban pedig*

$$\varrho(\lambda) - \varrho(\mu) = \lim_{b\to\infty} (\varrho_b(\lambda) - \varrho_b(\mu)). \tag{1.13.4}$$

**Megjegyzés.** $\varrho$ az alább definiált $L$ operátor spektrálfüggvénye, maga is lépcsős függvény. Az 1.10.6. és az 1.12.4. tételben kimondott összefüggések $\varrho$ és $m_{\alpha,\infty}$ között is fennállnak.

Legyen $y(x,\lambda)$ (1.11.1)-nek az

$$\frac{y'(0,\lambda)}{y(0,\lambda)} = m_\infty(\lambda) \tag{1.13.5}$$

feltételeket kielégítő megoldása.

**1.13.2. Tétel.** *Legyen $v(x) = y(x,\lambda_0)$ valamilyen $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$-re, és tekintsük az $Ly = -y'' + qy$ operátort a*

$$\mathit{Dom}\ L = \left\{ y, y' \in AC_{loc}(0,\infty) | y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0, \lim_{x\to\infty} W(y,\bar{v}) = 0 \right\}.$$

*értelmezési tartományon. Az így meghatározott $L$ differenciáloperátor önadjungált, spektruma az $m_{\alpha,\infty}$-függvény $\lambda_0, \ldots, \lambda_n, \ldots$ pólusaiból álló végtelen sorozat. Ha $y_k(x) = y(x,\lambda_k)$, egy $\lambda_k$-hoz tartozó sajátfüggvény, akkor az $y_k(x)$ függvények teljes ortogonális rendszert alkotnak az $L^2(0,\infty)$ térben.*

# 2. fejezet

# Sajátértékeloszlás véges intervallumon

## 2.1. A sajátértékek hányadosa nemnegatív potenciálok esetén

### 2.1.1. Bevezetés

Tekintsük az

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x) \tag{2.1.1}$$

Schrödinger-egyenletet a $[0,\pi]$ intervallumon, Dirichlet peremfeltételekkel. Legyen $q\in L_1(0,\pi)$ valós. A korábbi fejezetekben beláttuk, hogy a spektrum diszkrét, a $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., sajátértékek csak a $+\infty$-ben torlódhatnak. Sőt, ha $q(x)$ nemnegatív, akkor $\lambda_n \geq n^2$ (lásd például (2.1.8)-at).

Először magasabb dimenziókban vetődtek fel kérdésként a Dirichlet-sajátértékek hányadosaira vonatkozó becslések. Pólya, Payne és Weinberger azt sejtették, hogy az $\Omega$-n értelmezett $H=-\Delta+V(x)$, $V(x)=0$ operátor első két Dirichlet-sajátértékének hányadosa akkor maximális, ha $\Omega$ gömb. Bár a sejtés 1955-ből származik, csak 1992-ben sikerült igazolni. A megfelelő egydimenziós kérdést vizsgálva Ashbaugh és Benguria 1987-ben [2] bizonyították, hogy ha a potenciál nemnegatív, akkor $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\leq 4$. (Természetesen az egydimenziós eset más jellegű, hiszen ilyenkor az $\Omega$ halmaz csak egy intervallum lehet, azaz a sajátértékek hányadosa nem is függ $\Omega$-tól, csak a potenciáltól. Az előbb idézett állítás úgy fogalmazható át, hogy az első két sajátérték hányadosa a 0 potenciál esetén maximális.) Két évvel később egy újabb cikkükben [3] olyan módszert találtak, amelynek segítségével a $\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ hányadosra is igazolták az optimális becslést. Alább az ő bizonyításuknak egy rövidített változata következik.

### 2.1.2. A $\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ hányados

**2.1.1. Tétel** (Ashbaugh-Benguria). *Tekintsük az* $L = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + q(x)$ *operátort a* $[0,\pi]$ *intervallumon Dirichlet peremfeltételekkel, továbbá legyen* $q(x) \geq 0$. *Ekkor*

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \leq n^2, \tag{2.1.2}$$

*és ha bármely* $n > 1$*-re egyenlőség van, akkor* $q = 0$ *mm.* $[0,\pi]$*-n.*

*Bizonyítás.* Jelölje $y(x,z)$ az

$$-y'' + q(x)y = z^2 y, \quad x \in [0,\pi], \quad z > 0, \tag{2.1.3}$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1 \tag{2.1.4}$$

kezdetiértékprobléma egyértelmű megoldását, és vezessük be az alábbi – módosított Prüfer- – változókat:

$$y(x,z) = \frac{r(x,z)}{z} \sin\varphi(x,z), \tag{2.1.5}$$

$$y'(x,z) = r(x,z)\cos\varphi(x,z), \tag{2.1.6}$$

$$\varphi(0,z) = 0, \tag{2.1.7}$$

ahol $r(x,z) > 0$, és vesszővel az $x$ szerinti deriválást jelöltük.

Egyszerű számolással látható, hogy új változóink az alábbi egyenleteknek tesznek eleget:

$$\varphi' = z - \frac{q}{z}\sin^2\varphi, \tag{2.1.8}$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{q}{z}\sin\varphi\cos\varphi. \tag{2.1.9}$$

**Megjegyzés.** A klasszikus értelemben ezek a formulák csak $q$ folytonossági pontjaiban igazak; egyébként a két oldal disztribúciós értelemben egyenlő.

A (2.1.5) felírásból látszik, hogy $y = 0 \Leftrightarrow \sin\varphi = 0$, így $z^2$ pontosan akkor sajátérték, ha $\varphi(\pi,z)$ $\pi$ egész számú többszöröse. Jelölje $\lambda_n$ négyzetgyökét $z_n$.

**2.1.2. Lemma.** $\varphi(\pi, z_n) = n\pi$.

*Bizonyítás.* (2.1.8)-ból látszik, hogy $\sin\varphi = 0 \implies \varphi' > 0$, így $\varphi(\cdot,z)$ $\pi$ minden többszörösét egyszer veszi föl. $\varphi$ pontosan akkor egész számú többszöröse $\pi$-nek, ha $y = 0$, tehát $\varphi(\pi,z_n)$ $\pi$-nek annyiszorosa, ahány nullhelye van $y(\cdot,z_n)$-nek a félig nyílt $(0,\pi]$ intervallumon. A Sturm-féle oszcillációs tételek szerint a $(0,\pi)$ nyílt intervallumon az (az éppen aktuális 1-től kezdődő számozás szerinti) $n$. Dirichlet sajátfüggvénynek $(n-1)$ gyöke van, tehát a félig nyílton $n$, azaz $\varphi(\pi,z_n) = n\pi$. □

Mint látni fogjuk, a bizonyításban lényeges lesz, hogy $\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ egész szám-e. Ezért először lássuk be az alábbi lemmát:

**2.1.3. Lemma.** *Tegyük fel, hogy valamilyen $n>1$-re*

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_1}=n^2. \tag{2.1.10}$$

*Ekkor $q(x)=0$.*

*Bizonyítás.* Az $F_n$ és a $\psi_n(x)=\frac{\varphi(x,z_n)}{z_n}$ jelölés bevezetésével

$$\psi_n'(x)=1-q(x)\frac{\sin^2 z_n\psi_n(x)}{z_n^2}=F_n(x,\psi_n(x)), \tag{2.1.11}$$

$$\psi_1'(x)=1-q(x)\frac{\sin^2 z_1\psi_1(x)}{z_1^2}=F_1(x,\psi_1(x)). \tag{2.1.12}$$

Belátjuk, hogy $F_n(x,\psi)\le F_1(x,\psi)$ a $[0,\pi]\times[0,\dfrac{\pi}{z_1}]$ tartományon, és egyenlőség csak a tartomány határán vagy $q(x)=0$-ra van. Ez $q(x)\ge 0$ miatt az alábbi egyszerű állítás következménye:

**2.1.4. Állítás.** *Ha $n>1$, $0<x\le\frac{\pi}{2}$, akkor*

$$n\sin x>|\sin nx|. \tag{2.1.13}$$

*Ha $n$ egész szám, akkor az egyenlőtlenség $0<x<\pi$ esetén is igaz.*

*Bizonyítás.* 0-ban mindkét oldal értéke 0, az első deriváltakra pedig, legalábbis ha $0<nx\le\pi$, $n\cos x>\cos nx$ teljesül. Emiatt $0<x\le\frac{\pi}{n}$-re az állítás igaz. $\sin x\ge$ $\ge\frac{2}{\pi}x$ $[0,\frac{\pi}{2}]$-en, mert $\sin x$ konkáv. Így – mivel $\sin x$ szigorúan monoton növő is –, ha $x>\frac{\pi}{2n}$, akkor $n\sin x>1$ miatt az egyenlőtlenség ismét teljesül. Ha pedig $n$ egész szám, akkor mindkét oldal szimmetrikus $\frac{\pi}{2}$-re (ugyanazt veszi fel $x$-ben, mint $(\frac{\pi}{2}-x)$-ben), tehát az állítás $\frac{\pi}{2}$ és $\pi$ között is igaz. □

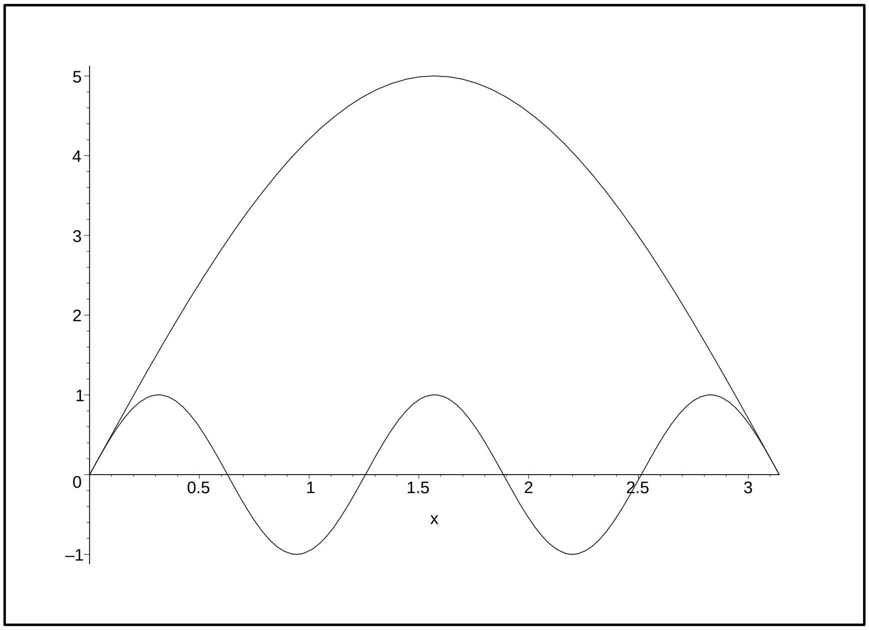
A közbeiktatott 2.1.4. állítás szerint, mivel $\frac{z_n}{z_1}=n$ egész szám,

$$\frac{\sin z_1\psi(x)}{z_1}>|\frac{\sin z_n\psi(x)}{z_n}|, \tag{2.1.14}$$

ha $0<z_1\psi(x)<\pi$, tehát valóban $F_n(x,\psi)\le F_1(x,\psi)$, és egyenlőség csak akkor lehet, ha $q(x)=0$, amint állítottuk.

Mivel (minden $z$-re) $\psi(x)$ folytonos és $\pi$ minden többszörösét csak egyszer veszi föl, $0<\psi_1(x),\psi_n(x)<\frac{\pi}{z_1}$ minden $x\in(0,\pi)$-re, míg $\psi_1(\pi)=\psi_n(\pi)$. Ezért az 1.6.1 összehasonlító tétel szerint $\psi_n(x)=\psi_1(x)$ minden $x\in[0,\pi]$-re, azaz $F_n(x,\psi_n(x))=F_1(x,\psi_1(x))$, azaz $q=0$ mm. $x\in[0,\pi]$-re. Ezzel a lemmát beláttuk. □

**A 2.1.1. tétel bizonyítása.** Tegyük fel, hogy valamilyen $n>1$ egész számra $\frac{z_n}{z_1}\ge n$. Tekintsük például az azonosan 1 potenciált. A megfelelő $\frac{\tilde\lambda_n}{\tilde\lambda_1}$ hányadosok kisebbek, mint $n^2$. A sajátértékek folytonos függvényei a potenciálnak, ezért létezik olyan $\widehat{\varrho}$ konvex konbinációja $q$-nak és az azonosan 1 potenciálnak, amelyre $\frac{\widehat\lambda_n}{\widehat\lambda_1}=n^2$. Lemmánk értelmében $\widehat{\varrho}=0$, de ez csak akkor lehetséges, ha $q=0$, és ekkor persze $\frac{\lambda_n}{\lambda_1}=n^2$. Ezzel a tételt beláttuk. □




2.1. ábra. Illusztráció a (2.1.13) egyenlőtlenséghez (n=5).

**Megjegyzés.** Ha $q(x) \le 0$ és $\frac{z_n}{z_1} = n$, akkor épp fordítva, $F_n(x,\psi) \ge F_1(x,\psi)$, amiből ugyanúgy következik $q=0$. Ha tehát továbbra is $q(x) \le 0$, és valamilyen $n>1$ egész számra $0<\frac{z_n}{z_1}\le n$, akkor az előző gondolatmenet (például az azonosan $-\frac{1}{2}$ potenciállal) mutatja, hogy $q=0$ és $\frac{\lambda_n}{\lambda_1}=n^2$. Ezzel beláttuk az alábbi tételt:

**2.1.5. Tétel** (Chen)**.** *Tekintsük az $L=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+q(x)$ operátort a $[0,\pi]$ intervallumon Dirichlet peremfeltételekkel, ahol $q(x) \le 0$. Ha $\lambda_1 > 0$, akkor*

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \ge n^2, \tag{2.1.15}$$

*és ha bármely $n>1$-re egyenlőség van, akkor $q=0$ mm. $[0,\pi]$-n.*

### 2.1.3. A $\frac{\lambda_n}{\lambda_m}$ hányados

**2.1.6. Tétel** (Ashbaugh-Benguria)**.** *Tekintsük a 2.1.1. tétel $L$ operátorát ugyanazokkal a feltételekkel. Ekkor*

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \le \lceil \frac{n}{m} \rceil^2, \qquad n \ge m, \tag{2.1.16}$$

*és ha bármely $n>m$-re egyenlőség van, akkor $m \mid n$ és $q=0$ mm. $[0,\pi]$-n.*

**Megjegyzés.** $\lceil x \rceil$ $x$ felső egészrészét jelöli.

*Bizonyítás.*

**2.1.7. Lemma.** *Legyen $k \in \mathbb{Z}$. Akkor*

$$\frac{\lambda_{kn}}{\lambda_n} \leq k^2. \tag{2.1.17}$$

*és egyenlőség csak $q=0$-ra van.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $\frac{\lambda_{kn}}{\lambda_n} \geq k^2$. Belátjuk, hogy ekkor valójában $\frac{\lambda_{kn}}{\lambda_n} = k^2$ és $q=0$. Az előző tételen kívül az alábbi természetes állítást használjuk fel:

**2.1.8. Állítás.** *[66] Legyen $a \leq \tilde{a} < \tilde{b} \leq b$, és tekintsük a (2.1.1) Schrödinger egyenletet $[a,b]$-n rögzített peremfeltételekkel. Akkor, ha $[\tilde{a},\tilde{b}]$-n ugyanazokat a peremfeltételeket írjuk elő, a spektrum minden egyes eleme kisebb lesz az $[a,b]$ intervallumon felírt probléma spektrumának megfelelő eleménél. Ha pedig bármely két megfelelő sajátérték megegyezik, akkor $a=\tilde{a}$, $b=\tilde{b}$.*

Jelölje $w_j$, $j=0,\ldots,n$ a $\lambda_n$-hez tartozó sajátfüggvény nullhelyeit, $x_j$ pedig azokat a pontokat, amelyekre $\varphi(x_j,z_{kn})=kj\pi$. Akkor a $[w_{j-1},w_j]$ intervallumon tekintett Dirichlet-probléma első sajátértéke $\lambda_n$ (hiszen a sajátfüggvény megszorítása sajátfüggvény lesz), míg az $[x_{j-1},x_j]$ intervallumon tekintett problémának $\lambda_{kn}$ a $k$. sajátértéke (ugyanazon okból). Nyilván $w_0=x_0=0$ és $w_n=x_n=\pi$. Vegyük észre a következőt: vagy minden $0 \leq j \leq n$-re $w_j=x_j$, vagy létezik egy olyan $j$, amelyre a $(w_{j-1},w_j)$ intervallum szigorúan tartalmazza az $(x_{j-1},x_j)$ intervallumot. Megmutatjuk, hogy ez utóbbi eset nem lehetséges. Tekintsük a Dirichlet-problémát $[w_{j-1},w_j]$-n. Az első sajátértéke ennek a problémának, mint mondottuk, $\lambda_n$, tehát a $k$. sajátértéke legföljebb $k^2\lambda_n \leq \lambda_{kn}$ feltevésünk és az előző tétel értelmében. A szigorú tartalmazás miatt az $[x_{j-1},x_j]$ intervallumon tekintett Dirichlet-probléma $k$. sajátértéke ennél nagyobb kellene legyen, ami ellentmondás, így minden $j$-re $w_j=x_j$. Ekkor viszont $k^2\lambda_n=\lambda_{kn}$ és $q=0$ az összes részintervallumon. □

Már csak az maradt hátra, hogy az $n \nmid m$ esetben mutassunk a korlátot megközelítő potenciálokat. Mivel azonban a bizonyítás az eddigiektől jelentősen eltérő eszközöket igényelne, azt nem közöljük, csupán hivatkozunk a [3, 15] cikkekre. □

**Megjegyzés.** Az előző tételhez hasonlóan ez is kimondható nempozitív potenciálokra, amennyiben $\lambda_1 > 0$:

**2.1.9. Tétel** (Chen)**.** *Tekintsük a 2.1.5. tétel $L$ operátorát ugyanazokkal a feltételekkel. Ekkor*

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \leq \lfloor\frac{n}{m}\rfloor^2 \qquad n \geq m, \tag{2.1.18}$$

*és ha bármely $n > m$-re egyenlőség van, akkor $m \mid n$ és $q=0$ mm. $[0,\pi]$-n.*

## 2.2. Korlátok a sajátértékek hányadosaira egyvölgyes potenciálok esetén

### 2.2.1. Eredmények

Ashbaugh és Benguria [3] bizonyították, hogy ha a $q(x)$ potenciál nemnegatív, akkor

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \le n^2. \tag{2.2.1}$$

Mint láttuk, két tetszőleges sajátérték hányadosára módszerük a

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \le \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil^2 \tag{2.2.2}$$

korlátot adta, ahol $\lceil x \rceil$ $x$ felső egészrészét jelöli. Megmutatták azt is, hogy vannak olyan potenciálok, amelyek esetén $\frac{\lambda_n}{\lambda_m}$ tetszőlegesen megközelíti $\frac{n}{m}$-et. Ezek a példák azonban úgynevezett „multiple-well” (többvölgyes) potenciálok, amelyek a $[0, \pi]$ intervallumon belül néhány pont környezetében nagyon nagy értékeket vesznek föl, míg máshol közel 0-t. Ez alapján azt sejtették, hogy ha a potenciál nem pusztán nemnegatív, hanem konvex is, akkor az egészrészek elhagyhatók, azaz

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \le \frac{n^2}{m^2} \quad n \ge m \tag{2.2.3}$$

is teljesül. Horváth és Kiss [35] bizonyították, hogy a sejtés erősebb formában is igaz; elegendő, ha a potenciálról csak azt tesszük fel, hogy egyvölgyes (maga a fogalom korábban már ismert volt [2]):

**2.2.1. Definíció.** *A $q$ potenciál egyvölgyes (single-well), ha létezik egy olyan $a \in [0, \pi]$, hogy $q$ monoton csökken $[0, a]$-n és monoton nő $[a, \pi]$-n.*

Az előző szakasz jelölésein túl legyen

$$\psi = \frac{\varphi}{z}. \tag{2.2.4}$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy (bizonyos feltételek mellett) $\psi(x, z)$ monoton növő $z$-ben, mert ebből már következik (2.2.3).

**2.2.2. Tétel** (Horváth-Kiss)**.** *Legyen $q(x) \ge 0$ monoton csökkenő $[0, x_0]$-on. Ekkor $\dot{\psi}(x_0, z) \ge 0$, azaz $z > 0$-ra $\psi(x_0, z)$ $z$-nek monoton növekvő függvénye. Ha csak egyetlen $z > 0$-ra is $\dot{\psi}(x_0, z) = 0$, akkor $q = 0$ a $(0, x_0]$ intervallumon.*

Ennek a tételnek különböző peremfeltételek mellett számos következménye van. Például az alábbi:

**2.2.3. Következmény** (Horváth-Kiss)**.** *Tekintsük a (2.1.1) egyenletet az*

$$y(0) = y'(\pi) = 0 \tag{2.2.5}$$

*Dirichlet-Neumann peremfeltételekkel. Ha a $q$ potenciál csökkenő és nemnegatív, akkor az $n$. és az $m$. sajátérték hányadosára $m \le n$ esetén*

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \le \frac{(2n-1)^2}{(2m-1)^2} \tag{2.2.6}$$

*teljesül. Ha bármely két különböző $m$-re és $n$-re egyenlőség van, akkor $q = 0$ $(0, \pi]$-n.*

A bizonyítás a 2.2.2 szakaszban olvasható.

A egyvölgyes potenciálokra vonatkozó fő eredmény:

**2.2.4. Tétel** (Horváth-Kiss)**.** *Tekintsük a (2.1.1) egyenletet az*

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{2.2.7}$$

*Dirichlet peremfeltételekkel. Ha a $q$ potenciál nemnegatív és egyvölgyes, akkor az $n$. és az $m$. sajátérték hányadosára $m \le n$ esetén*

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \le \frac{n^2}{m^2}, \tag{2.2.8}$$

*és ha két különböző $m$-re és $n$-re egyenlőség van, akkor $q = 0$ $(0, \pi)$-n.*

A bizonyítás a 2.2.3 szakaszban található.

## 2.2.2. A 2.2.2. tétel bizonyítása

**2.2.5. Lemma.** *Ha $q(x)$ is monoton csökken $[0, x_0]$-on, akkor ($z>0$-ra) $\varphi(x_0, z)$ szigorúan monoton nő $x$-ben, ha $x \in [0, x_0]$. Sőt az is igaz, hogy $z>0$-ra $\varphi'_\pm(x, z) >$ $> 0$.*

*Bizonyítás.* Rögzítsük $z$-t. Ha $\varphi'_\pm(\tilde{x}, z) \le 0$, akkor $x < \tilde{x}$-re $q(x) \ge z^2$ (2.1.8) miatt. Minthogy $y'' = (q - z^2)y$, $y$ konvex, pozitív és növekszik, $y' > 0$, így $x < \tilde{x}$-re $\varphi(x, z) < \frac{\pi}{2}$. Kis $x > 0$-ra $\varphi'_\pm(0, z) > 0$ (lásd (2.1.8)). A $\varphi'_\pm(x, z)$ függvény $q(x)$ folytonossági pontjaiban folytonos, és (mivel $q(x)$ monoton csökken) ha ugrik, csak fölfelé ugorhat. Ezért ha valamilyen $\tilde{x}$-re $\varphi'_\pm(\tilde{x}, z)$ nem pozitív, akkor van olyan $x_2 \in (0, \tilde{x}]$, hogy $\varphi_-{}'(x_2, z) = 0$ és $x < x_2$-re $\varphi'_\pm(x, z) > 0$. Válasszunk egy tetszőleges $x_1 \in (0, x_2)$ pontot. Ekkor az $[x_1, x_2]$ intervallumban $0 < \varphi(x_1, z) <$ $< \varphi(x, z) < \varphi(x_2, z) < \frac{\pi}{2}$, továbbá

$$(z \cot \varphi(x, z))' = q(x) - z^2 - (z \cot \varphi(x, z))^2. \tag{2.2.9}$$

Tudjuk, hogy $(\cot \varphi)'_\pm(x, z) = \frac{-1}{\sin^2 \varphi} \varphi'_\pm(x, z)$, amiből $\sqrt{q(x) - z^2} < z \cot \varphi(x, z)$ következik $x \in [x_1, x_2)$ esetén, míg $\sqrt{q(x_2 - 0) - z^2} = z \cot \varphi(x_2, z)$. Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen. Válasszunk egy tetszőleges $x_3$ pontot $[x_1, x_2)$-ben.

$$\left[\log\left(z\cot\varphi(x,z)-\sqrt{q(x)-z^2}\right)\right]_{x_1}^{x_3}=$$

$$=\int_{x_1}^{x_3}\frac{\mathrm{d}(z\cot\varphi(x,z)-\sqrt{q(x)-z^2})}{z\cot\varphi(x,z)-\sqrt{q(x)-z^2}}=$$

$$=\int_{x_1}^{x_3}\frac{q(x)-z^2-(z\cot\varphi(x,z))^2}{z\cot\varphi(x,z)-\sqrt{q(x)-z^2}}\,\mathrm{d}x-$$

$$-\int_{x_1}^{x_3}\frac{\mathrm{d}q(x)}{2\sqrt{q(x)-z^2}(z\cot\varphi(x,z)-\sqrt{q(x)-z^2})}\geq$$

$$\geq\int_{x_1}^{x_3}-(z\cot\varphi(x,z)+\sqrt{q(x)-z^2})\,\mathrm{d}x$$

ahol (2.2.9)-et és $q$ monotonitását használtuk. $z\cot\varphi(x,z)$ folytonos és korlátos $[x_1,x_2]$-n, ezért $-(z\cot\varphi(x,z)+\sqrt{q(x)-z^2})$ alulról korlátos, így

$$\left[\log\left(z\cot\varphi(x,z)-\sqrt{q(x)-z^2}\right)\right]_{x_1}^{x_3}\geq K \tag{2.2.10}$$

valamilyen $x_3$-tól független $K$-val. Ha $x_3$ tart $x_2$-höz, akkor

$$z\cot\varphi(x_2,z)>\sqrt{q(x_2-0)-z^2}, \tag{2.2.11}$$

azaz (újra (2.2.9) miatt) $\varphi'_-(x_2,z)>0$, ellentmondás. □

A következőkben, ha ez nem okoz félreértést, $\varphi(x,z)$ helyett csak $\varphi(x)$-et írunk.

**2.2.6. Lemma.**

$$\dot\varphi(x)=\int_0^x(1+\frac{q(t)}{z^2}\sin^2\varphi(t))e^{-\int_t^x\frac{q}{z}\sin 2\varphi}\,\mathrm{d}t. \tag{2.2.12}$$

*Bizonyítás.* A (2.1.8) egyenlőséget $z$ szerint differenciálva

$$\dot\varphi'(x)=1+\frac{q(x)}{z^2}\sin^2\varphi(x)-\frac{q(x)}{z}\sin 2\varphi(x)\dot\varphi(x). \tag{2.2.13}$$

Ez egy lineáris differenciálegyenlet $x\to\dot\varphi(x,z)$-ben. Mindkét oldalt megszorozva $e^{\int_0^x\frac{q}{z}\sin 2\varphi}$-vel,

$$(\dot\varphi(x)e^{\int_0^x\frac{q}{z}\sin 2\varphi})'=(1+\frac{q(x)}{z^2}\sin^2\varphi(x))e^{\int_0^x\frac{q}{z}\sin 2\varphi}. \tag{2.2.14}$$

Felhasználva, hogy $\dot\varphi(0)=0$, az állítást kapjuk. □

**Megjegyzés.** (2.1.9) segítségével átfogalmazhatjuk (2.2.12)-ot:

$$\dot{\varphi}(x) = \int_0^x (1 + \frac{q(t)}{z^2} \sin^2 \varphi(t)) \frac{r^2(t)}{r^2(x)}\ \mathrm{d}t. \tag{2.2.15}$$

A (2.2.15) egyenletből nyilvánvaló, hogy $\varphi(x,z)$ szigorúan monoton nő $z$-ben.

**2.2.7. Következmény.**

$$\dot{\psi}(x) = \frac{2}{r^2(x) z^2} \int_0^x r^2 (\frac{q}{z} \sin^2 \varphi - \frac{q}{z} \varphi \sin\varphi \cos\varphi). \tag{2.2.16}$$

*Bizonyítás.*

$$\dot{\psi}(x) = \frac{\dot{\varphi}(x)}{z} - \frac{\varphi(x)}{z^2} =$$

$$= \frac{1}{r^2(x)z^2} \left\{ \int_0^x r^2(t)[2(z - \varphi'(t)) + \varphi'(t)]\ \mathrm{d}t - r^2(x)\varphi(x) \right\} =$$

$$= \frac{2}{r^2(x)z^2} \int_0^x [r^2(t)(z - \varphi'(t)) - r(t)r'(t)\varphi(t)]\ \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{r^2(x)z^2} \int_0^x r^2 (\frac{q}{z} \sin^2 \varphi - \frac{q}{z} \varphi \sin\varphi \cos\varphi).$$

□

A következő lemmákban nem szeretnénk tekintettel lenni $x_0$ értékére, ezért definiáljuk a potenciált 0-nak, ha $x \in (x_0, \infty)$, és ennek megfelelően terjesszük ki $\varphi$, $r$ és $\psi$ definícióját is. Ekkor rögzített $z$-re $\varphi(x,z) \to \infty$, ha $x \to \infty$.

**2.2.8. Lemma.** *Ha* $0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, *akkor* $\sin^2 \varphi - \varphi \sin\varphi \cos\varphi > 0$.

*Bizonyítás.* Ismert, hogy $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$-re $\varphi < \tan\varphi$. □

**2.2.9. Következmény.** *Legyen* $k \geq 0$ *egész,* $k\pi \leq c \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k\pi + \frac{\pi}{2} \leq d \leq (k+1)\pi$. *Ekkor*

$$\int_{\varphi^{-1}(k\pi)}^{\varphi^{-1}(c)} r^2(t) (\frac{q}{z} \sin^2 \varphi - \frac{q}{z} \varphi \sin\varphi \cos\varphi) \geq -k\frac{\pi}{2} \left[r^2\right]_{\varphi^{-1}(k\pi)}^{\varphi^{-1}(c)}, \tag{2.2.17}$$

$$\int_{\varphi^{-1}(k\pi + \frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}(d)} r^2(t) (\frac{q}{z} \sin^2 \varphi - \frac{q}{z} \varphi \sin\varphi \cos\varphi) \geq -(k+1)\frac{\pi}{2} \left[r^2\right]_{\varphi^{-1}(k\pi + \frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}(d)}, \tag{2.2.18}$$

*és egyenlőség pontosan akkor van, ha a megfelelő nyílt intervallumon* $q = 0$.

*Bizonyítás.*

$$\int_{\varphi^{-1}(k\pi)}^{\varphi^{-1}(c)} r^2(\frac{q}{z}\sin^2\varphi - \frac{q}{z}\varphi\sin\varphi\cos\varphi) =$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(k\pi)}^{\varphi^{-1}(c)} r^2(\frac{q}{z}\sin^2(\varphi - k\pi) - \frac{q}{z}(\varphi - k\pi)\sin\varphi\cos\varphi) -$$

$$-k\pi \int_{\varphi^{-1}(k\pi)}^{\varphi^{-1}(c)} r^2(\frac{q}{z}\sin\varphi\cos\varphi).$$

Mivel $(\varphi - k\pi)$ $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közé esik, az előző lemma szerint az első tag pozitív, kivéve a $q=0$ esetet. A második pedig ugyanaz, mint (2.2.17) jobb oldala (lásd (2.1.9)).

A lemma másik fele hasonlóképpen bizonyítható:

$$\int_{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}(d)} r^2(\frac{q}{z}\sin^2\varphi - \frac{q}{z}\varphi\sin\varphi\cos\varphi) =$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}(d)} r^2(\frac{q}{z}\sin^2(\varphi - (k+1)\pi) - \frac{q}{z}(\varphi - (k+1)\pi)\sin\varphi\cos\varphi) -$$

$$-(k+1)\pi \int_{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}(d)} r^2(\frac{q}{z}\sin\varphi\cos\varphi) \geq$$

$$\geq -(k+1)\pi \int_{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}(d)} rr' = -(k+1)\frac{\pi}{2}\left[r^2\right]_{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}(d)}.$$

□

**2.2.10. Következmény.** *Legyen* $0 \leq C \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq D \leq \pi$. *Ekkor*

$$\int_0^{\varphi^{-1}(C)} r^2(t)(\frac{q}{z}\sin^2\varphi - \frac{q}{z}\varphi\sin\varphi\cos\varphi) \geq 0, \tag{2.2.19}$$

$$\int_{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2}+D)} r^2(t)(\frac{q}{z}\sin^2\varphi - \frac{q}{z}\varphi\sin\varphi\cos\varphi) \geq \tag{2.2.20}$$
$$\geq -(k+1)\frac{\pi}{2}\left[r^2\right]_{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2}+D)},$$

*és egyenlőség pontosan akkor van, ha a megfelelő nyílt intervallumon* $q=0$.

*Bizonyítás.* (2.2.19) ugyanaz, mint (2.2.17) a $k=0$ esetben. Ha $D \le \frac{\pi}{2}$, akkor (2.2.20) megegyezik (2.2.18)-cal. Ha nem, akkor pedig (2.2.18) és (2.2.17) összege, ha előbbiben a $d=(k+1)\pi$, utóbbiban a $c=k\pi+\frac{\pi}{2}+D$ és $k=k+1$ helyettesítést hajtjuk végre. □

**2.2.11. Lemma.** *$r(\varphi^{-1}(k\pi+3\frac{\pi}{2})) \le r(\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2}))$ minden $k=0,1,2,\ldots$-re. Az $r$ függvény $\varphi^{-1}(k\pi)$ és $\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})$ között monoton nő, $\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})$ és $\varphi^{-1}((k+1)\pi)$ között monoton csökken.*

*Bizonyítás.* Mivel a logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, elég bizonyítani, hogy

$$\left[\log r^2\right]_{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{3}{2}\pi)} \le 0, \tag{2.2.21}$$

míg az $r$ függvény monotonitására vonatkozó állítás azonnal következik $(\log r^2)' = \frac{q}{z}\sin 2\varphi$ előjeléből. Az $u=\varphi(x)$ helyettesítéssel

$$\int_{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}((k+1)\pi)} \frac{2r'}{r} = \int_{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}((k+1)\pi)} \frac{q}{z}\sin 2\varphi =$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}((k+1)\pi))} \frac{q(x)\sin 2\varphi(x)}{z^2-q(x)\sin^2\varphi(x)}\varphi'(x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\pi} \frac{q(\varphi^{-1}(u))\sin 2u}{z^2-q(\varphi^{-1}(u))\sin^2 u}\ \mathrm{d}u.$$

A 2.2.5. lemma szerint a nevező mindig pozitív, míg $k\pi+\frac{\pi}{2}$ és $(k+1)\pi$ között $\sin 2u<0$. Ezért a tört értéke nagyobb lesz, ha $q$-t $q(\varphi^{-1}((k+1)\pi))$-ra, a minimumára csökkentjük:

$$\int_{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}((k+1)\pi)} \frac{2r'}{r} \le \int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\pi} \frac{q(\varphi^{-1}((k+1)\pi))\sin 2u}{z^2-q(\varphi^{-1}((k+1)\pi))\sin^2 u}\ \mathrm{d}u =$$

$$= \left[-\ln(z-\frac{q(\varphi^{-1}((k+1)\pi))}{z}\sin^2 u)\right]_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\pi}.$$

A $(\varphi^{-1}((k+1)\pi),\varphi^{-1}(k\pi+3\frac{\pi}{2}))$ intervallumon $\sin 2u>0$. $q$-t ezúttal a maximumával becsülve:

$$\int_{\varphi^{-1}((k+1)\pi)}^{\varphi^{-1}(k\pi+3\frac{\pi}{2})} \frac{2r'}{r} \le \left[-\ln(z-\frac{q(\varphi^{-1}((k+1)\pi))}{z}\sin^2 u)\right]_{(k+1)\pi}^{k\pi+3\frac{\pi}{2}}. \tag{2.2.22}$$

Összegezve

$$\int_{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}(k\pi+3\frac{\pi}{2})} \frac{2r'}{r} \leq \left[-\ln(z - \frac{q(\varphi^{-1}((k+1)\pi))}{z} \sin^2 u)\right]_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^{k\pi+3\frac{\pi}{2}} = 0. \qquad (2.2.23)$$

□

**A 2.2.2. tétel bizonyítása.**
$\varphi(x_0, z) \leq \frac{\pi}{2}$ esetén a tétel állítása rögtön következik (2.2.19)-ből. Máskülönben legyen $\varphi(x_0, z) = \frac{\pi}{2} + k\pi + D$, ahol $0 \leq D \leq \pi$:

$$\int_0^{\varphi^{-1}(\frac{\pi}{2}+k\pi+D)} r^2(t)(\frac{q}{z}\sin^2\varphi - \frac{q}{z}\varphi\sin\varphi\cos\varphi)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\varphi^{-1}(\frac{\pi}{2})} r^2(t)(\frac{q}{z}\sin^2\varphi - \frac{q}{z}\varphi\sin\varphi\cos\varphi)\ \mathrm{d}t +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi^{-1}(i\pi-\frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}(i\pi+\frac{\pi}{2})} r^2(t)(\frac{q}{z}\sin^2\varphi - \frac{q}{z}\varphi\sin\varphi\cos\varphi)\ \mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2})}^{\varphi^{-1}(k\pi+\frac{\pi}{2}+D)} r^2(t)(\frac{q}{z}\sin^2\varphi - \frac{q}{z}\varphi\sin\varphi\cos\varphi)\ \mathrm{d}t.$$

A 2.2.10. következmény és a 2.2.11. lemma szerint itt mindegyik tag nemnegatív, és ha az összegük 0, akkor $q = 0$ a teljes $(0, x_0]$ intervallumon. □

**A 2.2.3. következmény bizonyítása.**
A megadott peremfeltételek esetén ezúttal

$$z_n \psi(\pi, z_n) = (n - \frac{1}{2})\pi. \qquad (2.2.24)$$

Legyen $m$ kisebb, mint $n$. Ekkor $\frac{(2m-1)\pi}{2z_m} = \psi(\pi, z_m) \leq \psi(\pi, z_n) = \frac{(2n-1)\pi}{2z_n}$, és így $\frac{z_n}{z_m} \leq \frac{2n-1}{2m-1}$, azaz $\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \leq \frac{(2n-1)^2}{(2m-1)^2}$. Egyenlőség esetén $\psi(\pi, z_m) = \psi(\pi, z_n)$, ebből pedig a 2.2.2. tétel szerint következik, hogy $q = 0$ $(0, \pi]$-n. □

## 2.2.3. A 2.2.4. tétel bizonyítása

Legyen a $q(x)$ potenciál $[0, a]$-n monoton csökkenő és $[a, \pi]$-n monoton növő. Jelölje $\tilde{q}(x)$ a $\frac{\pi}{2}$-re tükrözött potenciált, azaz legyen $\tilde{q}(x) = q(\pi - x)$. Ekkor $y(\pi - x, z_n)$ egy, a $\tilde{q}(x)$ potenciálhoz tartozó sajátfüggvény. Definiáljuk a következő függvényeket:

$$\tilde{y}(x, z_n) = (-1)^{n+1} \frac{y(\pi - x, z_n)}{r(\pi, z_n)}, \qquad (2.2.25)$$

$$\tilde{r}(x,z_n)=\frac{r(\pi-x,z_n)}{r(\pi,z_n)} \tag{2.2.26}$$

és

$$\tilde{\varphi}(x,z_n)=n\pi-\varphi(\pi-x,z_n). \tag{2.2.27}$$

Akkor

$$\tilde{y}(0,z_n)=0, \tag{2.2.28}$$

$$\tilde{y}'(0,z_n)=1, \tag{2.2.29}$$

azaz $\tilde{y}(x,z_n)$ a (2.1.3)-(2.1.4) kezdetiértékprobléma megoldása $q$ helyett $\tilde{q}$-mal. Egyszerű ellenőrizni, hogy

$$\tilde{y}(x,z_n)=\frac{\tilde{r}(x,z_n)}{z_n}\sin\tilde{\varphi}(x,z_n), \tag{2.2.30}$$

$$\tilde{y}'(x,z_n)=\tilde{r}(x,z_n)\cos\tilde{\varphi}(x,z_n), \tag{2.2.31}$$

$$\tilde{\varphi}(0,z_n)=0, \tag{2.2.32}$$

azaz $\tilde{r}$ és $\tilde{\varphi}$ értelmezhetők minden $z>0$-ra, mint a $\tilde{q}$-hoz tartozó Prüfer-változók. Végül legyen $\tilde{\psi}=\frac{\tilde{\varphi}}{z}$.

**A 2.2.4. tétel bizonyítása**

Legyen $\Psi(z)=\psi(a,z)+\tilde{\psi}(\pi-a,z)$. A 2.2.2 tétel szerint ez két monoton növő függvény összege. (2.2.27)-ből

$$z_n\Psi(z_n)=n\pi. \tag{2.2.33}$$

Legyen $m$ kisebb, mint $n$. Ekkor $\frac{m\pi}{z_m}=\Psi(z_m)\le\Psi(z_n)=\frac{n\pi}{z_n}$, így $\frac{z_n}{z_m}\le\frac{n}{m}$, azaz $\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\le\frac{n^2}{m^2}$. Egyenlőség esetén $\Psi(z_m)=\Psi(z_n)$, így $\psi(a,z_m)=\psi(a,z_n)$ és $\tilde{\psi}(\pi-a,z_m)=\tilde{\psi}(\pi-a,z_n)$. Akkor viszont a 2.2.2 szerint $q=0$ $(0,a]$-n és $\tilde{q}=0$ $(0,\pi-a]$-n, azaz $q=0$ $(0,\pi)$-n. □

## 2.2.4. Megjegyzések a bizonyításokhoz

**1. Megjegyzés** Ha a potenciál nem monoton csökkenő, előfordulhat, hogy bizonyos pontokban $\psi$ nem növekszik. Legyen például a $[0,\frac{2}{3}\pi]$ intervallumon $q=0$, egyébként 1. Legyen $z=3/2$. Könnyen látható, hogy

$$y(x,\frac{3}{2})=\begin{cases}\frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}x & \text{ha } x\le\frac{2}{3}\pi\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\frac{\sqrt{5}}{2}(x-\frac{2}{3}\pi) & \text{egyébként,}\end{cases} \tag{2.2.34}$$

$$y'(x,\frac{3}{2})=\begin{cases}\cos\frac{3}{2}x & \text{ha } x\le\frac{2}{3}\pi\\ -\cos\frac{\sqrt{5}}{2}(x-\frac{2}{3}\pi) & \text{egyébként.}\end{cases} \tag{2.2.35}$$

(2.1.8)-ból

$$\varphi'(x)\ge\frac{3}{2}-\frac{2}{3}>0. \tag{2.2.36}$$

Könnyen ellenőrizhetően $\varphi(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{2}) = \pi$, $\varphi(\pi, \frac{3}{2}) \approx 4.27083 < \frac{3}{2}\pi$. Ezért

$$r(x) = \exp(\int_0^x \frac{q}{z} \sin\varphi\cos\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \leq \frac{2}{3}\pi \\ \exp(\int_\pi^{\varphi(x)} \frac{\frac{2}{3}\sin v\cos v}{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\sin^2 v}\,\mathrm{d}v) & \text{egyébként} \end{cases} \tag{2.2.37}$$

így

$$\begin{aligned}\dot\psi(\pi) &= \frac{2}{r^2(\pi)z^2}\int_0^\pi r^2(\frac{q}{z}\sin^2\varphi - \frac{q}{z}\varphi\sin\varphi\cos\varphi) = \\ &= \frac{2}{r^2(\pi)z^2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^\pi \frac{r^2(\frac{2}{3}\sin^2\varphi - \frac{2}{3}\varphi\sin\varphi\cos\varphi)}{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\sin^2\varphi}\varphi'.\end{aligned}$$

Ez az integrál a $\varphi(x) = u$ helyettesítés után numerikusan kiszámolható (például a Maple vagy a Mathematica segítségével):

$$\int_\pi^{4.27083} \exp(\int_\pi^u \frac{\frac{2}{3}\sin 2v}{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\sin^2 v}\,\mathrm{d}v)\frac{(\frac{2}{3}\sin^2 u - \frac{2}{3}u\sin u\cos u)}{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\sin^2 u}\,\mathrm{d}u \approx -0.811, \tag{2.2.38}$$

ami azt jelenti, hogy $\psi$ csökken a $z = \frac{3}{2}$ pontban.

**2. Megjegyzés.** Felmerülhet, hogy vajon a $q(x)$ és a $q(\pi - x)$ potenciálhoz tartozó $\psi(\pi)$-k összege monoton nő-e $z$-ben, hiszen például szimmetrikus potenciálokra ez az állítás igaz. Az előző példa azonban azt mutatja, hogy általában ez sem teljesül. Valóban,

$$\dot\psi(\pi) \approx \frac{2}{r^2(\pi)z^2}(-0.811) \approx -0.292. \tag{2.2.39}$$

Hasonlóképpen kiszámíthatjuk a $q(\pi - x)$ potenciálhoz tartozó $\dot\psi(x, \frac{3}{2})$ értéket, ami megközelítőleg 0.0306, tehát az összeg még mindig negatív.

# 3. fejezet

# A sajátértékek eloszlása végtelen intervallum esetén

## 3.1. Bevezetés

Tekintsük a

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x) \tag{3.1.1}$$

Schrödinger-egyenletet a $[0,\infty)$ félegyenesen, vagypedig a valós számegyenesen. Ebben a fejezetben végig feltesszük, hogy a $q$ potenciál nagy $|x|$-re $+\infty$-hez tart. Ilyenkor a végtelenben (a számegyenesen tekintett egyenlet esetén mindkét végtelenben) határpont eset van, azaz a félegyenes esetében az

$$y(0)=0 \tag{3.1.2}$$

peremfeltételt írjuk elő, míg a számegyenes esetében nem írunk elő további feltételeket.

Mint ismert, a spektrum diszkrét, a valós $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\ldots$, sajátértékek csak a $+\infty$-ben torlódnak [48], sőt, ha $q(x)$ még nemnegatív is, akkor $\lambda_1>0$ (lásd a 3.1.1. tétel utáni megjegyzést).

A következő tételben összefoglaljuk az $y$ megoldások tulajdonságait:

**3.1.1. Tétel.** *Tekintsük a*

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x) \tag{3.1.3}$$

*Schrödinger-egyenletet a $(-\infty,0]$ félegyenesen, és tegyük fel, hogy a $q$ potenciál $+\infty$-hez tart, ha $x\to-\infty$. Akkor minden valós $\lambda$-ra pontosan egy olyan $y\in$ $\in L^2(-\infty,0]$-beli megoldás létezik, ami $-\infty$-hez közeledve pozitív, nullához tart, és $\int_{-\infty}^{0} y^2=1$. Ez a megoldás továbbá rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

- *Ha $x\le x_0$-ra $q(x)\ge\lambda$, akkor $y(x)$ és $y'(x)$ pozitív,*
- *$x\to-\infty$ esetén $\frac{y}{y'}$ 0-hoz tart.*

*Bizonyítás.* Ismert, hogy konstans szorzótól eltekintve egyértelműen létezik (3.1.1)-nek egy $y(-\infty)=0$-t kielégítő $L^2(-\infty,0]$-beli megoldása, lásd pl. [7]. Tegyük fel, hogy $y(x_0)=0$ valamilyen $x_0$-lal úgy, hogy $x \leq x_0$-ra $q(x) \geq \lambda$. Akkor $y'(x_0) \neq 0$; feltehető, hogy $y'(x_0) < 0$. (3.1.1)-ből látható, hogy $y$ pozitív, konvex és csökkenő $(-\infty, x_0]$-on, így $y(-\infty)=+\infty$; ellentmondás. Vagyis a $(-\infty, x_0]$ félegyenesen $y$-nak nincs nullhelye. Feltehetjük, hogy itt $y>0$, de akkor $y$ konvexitása és $y(-\infty)=0$ miatt $y$ szigorúan monoton nő, és $y'$ pozitív.

A második tulajdonság bizonyításához vezessük be a $h=\frac{y'}{y}$ függvényt. Egyszerűen belátható (lásd (2.2.9)-t a véges esetben), hogy

$$h'(x,z)=q(x)-\lambda-h^2(x,z). \tag{3.1.4}$$

Rögzítsük $\lambda$-t, és legyen $N>0$ tetszőleges. Elég nagy $K$-val $x<-K$-ra $q(x)-\lambda > N^2+1$ és $y(x)>0$, $y'(x)>0$, azaz $h(x)>0$. Ha valamilyen $x<-K$-ra $h(x)<N$, akkor $h'(x)>1$, következésképpen $x'<x$-re is $h(x')<N$ és $h'(x')>1$; ám ez lehetetlen, hiszen $h(x')>0$. Azaz $h(x) \geq N$ minden $x<-K$-ra, és mivel $N$ tetszőleges volt, $h(-\infty)=+\infty$. □

**Megjegyzés.** $\lambda \leq 0$-ra sem a (3.1.1) egyenlet említett megoldása, sem pedig a megoldás deriváltja nem lehet nulla az első tulajdonság szerint. Azaz $y$ pozitív és monoton nő az egész $\mathbb{R}$-en, tehát nem lehet $L^2$-beli. Így $\lambda_1>0$.

Legyen $0<\lambda=z^2$ és jelölje $y(x,z)$ a (3.1.1) egyenlet 3.1.1.tételben említett megoldását. Vezessük be az alábbi Prüfer-változókat:

$$y(x,z)=\frac{r(x,z)}{z}\sin\varphi(x,z), \tag{3.1.5}$$

$$y'(x,z)=r(x,z)\cos\varphi(x,z), \tag{3.1.6}$$

ahol $r(x,z)>0$, és vesszővel az $x$ szerinti deriválást jelöltük. A 3.1.1. tételbeli második tulajdonság szerint feltehető, hogy

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x,z)=0. \tag{3.1.7}$$

Legyen továbbá

$$\psi=\frac{\varphi}{z}. \tag{3.1.8}$$

Egyszerű számolással látható, hogy új változóink az alábbi egyenleteknek tesznek eleget:

$$\varphi'=z-\frac{q}{z}\sin^2\varphi, \tag{3.1.9}$$

$$\frac{r'}{r}=\frac{q}{z}\sin\varphi\cos\varphi. \tag{3.1.10}$$

**Megjegyzés.** A klasszikus értelemben ezek a formulák csak $q$ folytonossági pontjaiban igazak; egyébként a két oldal disztribúciós értelemben egyenlő.

## 3.2. Nemnegatív potenciálok

**3.2.1. Tétel** (Ashbaugh-Benguria). *[3] Tekintsük az $L=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+q(x)$ operátort a valós számegyenesen, vagy a $[0,\infty)$ félegyenesen, a 0-ban Dirichlet peremfeltétellel. Ha $q(x)\geq 0$ és $|x|\to\infty$ esetén $q(x)\to+\infty$, akkor*

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\leq\lceil\frac{n}{m}\rceil^2 \qquad n\geq m, \tag{3.2.1}$$

*és egyenlőség legföljebb $m|\,n$-re lehet.*

**Megjegyzés.** Valójában az $m|\,n$ esetben sem lehet egyenlőség ($m{=}n$-et kivéve).
**Megjegyzés.** A $q(x)=x^2$ potenciál esete egy ismert példa diszkrét spektrumú Schrödinger operátorra.

$$-y''+x^2y=(2n+1)y, \quad y=e^{-x^2/2}H_n(x) \quad (n\geq 0), \tag{3.2.2}$$

ahol $H_n$ az $n$. Hermite polinom. Ekkor $\lambda_n=2n-1$, $n\geq 1$, azaz (3.2.1) nyilvánvalóan teljesül. A végtelen potenciálgát esete azonban mutatja, hogy a becslés (legalábbis $m|\,n$ esetén) éles.

## 3.3. Végtelenhez tartó egyvölgyes potenciálok

**3.3.1. Tétel** (Horváth-Kiss). *[34] Legyen $\lim_{x\to-\infty}q(x){=}+\infty$ és legyen $q(x){\geq}0$ monoton csökkenő $(-\infty,x_0]$-n. Ekkor $\dot{\psi}(x_0,z)>0$, azaz $\psi(x_0,z)$ $z>0$-ra $z$-ben szigorúan monoton nő.*

**3.3.2. Lemma.** *Ha $q(x)$ monoton csökken $(-\infty,x_0]$-on, akkor ($z{>}0$-ra) $\varphi(x_0,z)$ szigorúan monoton nő $x$-ben, ha $x{\leq}x_0$. Sőt az is igaz, hogy $z{>}0$-ra $\varphi'_\pm(x,z){>}0$.*

*Bizonyítás.* Felhasználva a 3.1.1. tételben kimondott második tulajdonságot, a bizonyítás hasonló a 2.2.5. lemmáéhoz. □

A következőkben, ha ez nem okoz félreértést, $\varphi(x,z)$ helyett csak $\varphi(x)$-et írunk.

**3.3.3. Lemma.** *Minden $x_1<x_2$-re*

$$\dot{\varphi}(x_2)-\dot{\varphi}(x_1)e^{-\int_{x_1}^{x_2}\frac{q}{z}\sin 2\varphi}=\int_{x_1}^{x_2}(1+\frac{q(t)}{z^2}\sin^2\varphi(t))e^{-\int_t^{x_2}\frac{q}{z}\sin 2\varphi}\,\mathrm{d}t, \tag{3.3.1}$$

*és a jobb oldali integrandus $L^1(-\infty,x_2]$-beli.*

*Bizonyítás.* A (3.1.9) egyenlőséget $z$ szerint differenciálva

$$\dot{\varphi}'(x)=1+\frac{q(x)}{z^2}\sin^2\varphi(x)-\frac{q(x)}{z}\sin 2\varphi(x)\dot{\varphi}(x). \tag{3.3.2}$$

Ez egy lineáris differenciálegyenlet $x \to \dot\varphi(x,z)$-ben. Mindkét oldalt megszorozva $e^{-\int_x^{x_2} \frac{q}{z}\sin 2\varphi}$-vel,

$$(\dot\varphi(x,z)e^{-\int_x^{x_2} \frac{q}{z}\sin 2\varphi})' = (1+\frac{q(x)}{z^2}\sin^2\varphi(x,z))e^{-\int_x^{x_2} \frac{q}{z}\sin 2\varphi}. \tag{3.3.3}$$

Ezt az egyenlőséget $x_1$ től $x_2$-ig integrálva (3.3.1)-et kapjuk. Be kell még látni, hogy a jobb oldal $L^1(-\infty, x_2]$-beli:

$$r^2(x_2)(1+\frac{q(x)}{z^2}\sin^2\varphi(x,z))e^{-\int_x^{x_2} \frac{q}{z}\sin 2\varphi} = (1+\frac{q(x)}{z^2}\sin^2\varphi(x))r^2(x)$$

$$= r^2+qy^2 = z^2y^2(x)+y'^2(x)+q(x)y^2(x) = (y'(x)y(x))'+2z^2y^2(x).$$

$y'(x)y(x)$ a véges szakaszokon abszolút folytonos. A $-\infty$ közelében, ha $q(x) > > z^2$, $y$ pozitív, konvex, monoton növő, ezért $y'(x)y(x)$ is monoton növő, de akkor korlátos változású is, azaz deriváltja $L^1$-beli. $y^2 \in L^1(-\infty, x_2]$ pedig nyilvánvaló. □

**3.3.4. Lemma.** *Legyen $z_1 < z_2$. Akkor megfelelően nagy $K$-ra $x < -K$ esetén $\varphi(x,z_1) < \varphi(x,z_2)$.*

*Bizonyítás.* Feltehetjük, hogy $K$ olyan nagy, hogy $x<-K$-ra $q(x)>z_1^2$, $q(x)>z_2^2$, és akkor mind $\varphi(x,z_1)$, mind $\varphi(x,z_2)$ 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé esik. Ha $\varphi(x,z_1)-\varphi(x,z_2)\geq 0$, akkor

$$(\varphi(x,z_1)-\varphi(x,z_2))' = z_1-z_2-q(x)\frac{\sin^2\varphi(x,z_1)}{z_1} - \frac{\sin^2\varphi(x,z_2)}{z_2} \leq z_1-z_2 < 0,$$

azaz $\lim_{x\to-\infty}(\varphi(x,z_1)-\varphi(x,z_2))$ nem lehet nulla. Tehát $\varphi(x,z_1)<\varphi(x,z_2)$. □

**3.3.5. Lemma.** *$\varphi(x,z)$ szigorúan monoton nő $z$-ben.*

*Bizonyítás.* Legyen $z_1<z_2$, $F(x,\varphi)=z_1-\frac{q(x)}{z_1}\sin^2\varphi$ és $G(x,\varphi)=z_2-\frac{q(x)}{z_2}\sin^2\varphi$. Az előző lemma szerint elég nagy $K$-ra $x<-K$ esetén $\varphi(x,z_1)<\varphi(x,z_2)$. Mivel

$$\varphi'(x,z_1) = F(x,\varphi(x,z_1)), \tag{3.3.4}$$

$$\varphi'(x,z_2) = G(x,\varphi(x,z_2)) \tag{3.3.5}$$

és

$$F(x,\varphi) < G(x,\varphi), \tag{3.3.6}$$

az 1.6.1. összehasonlító tétel szerint $\varphi(x,z_1) < \varphi(x,z_2)$ minden $x$-re. □

A monotonitást felhasználva a 3.3.3. lemmából az alábbit kapjuk:

**3.3.6. Következmény.**

$$\dot\varphi(x) \geq \int_{-\infty}^{x}(1+\frac{q(t)}{z^2}\sin^2\varphi(t))e^{-\int_t^x \frac{q}{z}\sin 2\varphi}\,dt. \tag{3.3.7}$$

□

**Megjegyzés.** (3.1.10) segítségével átfogalmazhatjuk (3.3.7)-et:

$$\dot{\varphi}(x) \geq \int_{-\infty}^{x} (1+\frac{q(t)}{z^2}\sin^2\varphi(t))\frac{r^2(t)}{r^2(x)}\,\mathrm{d}t. \tag{3.3.8}$$

**3.3.7. Következmény.**

$$\dot{\psi}(x) \geq \frac{2}{r^2(x)z^2}\int_{-\infty}^{x} r^2(\frac{q}{z}\sin^2\varphi - \frac{q}{z}\varphi\sin\varphi\cos\varphi). \tag{3.3.9}$$

*Bizonyítás.*

$$\dot{\psi}(x) = \frac{\dot{\varphi}(x)}{z} - \frac{\varphi(x)}{z^2} \geq$$

$$\geq \frac{1}{r^2(x)z^2}\left\{\int_{-\infty}^{x} r^2(t)[2(z-\varphi'(t))+\varphi'(t)]\,\mathrm{d}t - r^2(x)\varphi(x)\right\} =$$

$$= \frac{2}{r^2(x)z^2}\int_{-\infty}^{x}[r^2(t)(z-\varphi'(t)) - r(t)r'(t)\varphi(t)]\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{r^2(x)z^2}\int_{-\infty}^{x} r^2(\frac{q}{z}\sin^2\varphi - \frac{q}{z}\varphi\sin\varphi\cos\varphi).$$

□

**A 3.3.1. tétel bizonyítása**
Legyen

$$h(t) = r^2(t)\left(\frac{q(t)}{z}\sin^2\varphi(t) - \frac{q(t)}{z}\varphi(t)\sin\varphi(t)\cos\varphi(t)\right),$$

az integrandus (3.3.9)-ben. Meg kell mutatnunk, hogy ha $q \geq 0$ monoton csökken, akkor $\int_{-\infty}^{x_0} h > 0$. Ha $\varphi(x_0) \leq \frac{\pi}{2}$, akkor $h \geq 0$ $(-\infty, x_0)$-on és $x \to -\infty$-re $h > 0$, hiszen $\sin^2\varphi > \varphi\sin\varphi\cos\varphi$, ha $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Így ez esetben $\dot{\psi} > 0$. Egyébként legyen

$$\varphi(x_0) = k\pi + \pi/2 + D, \quad k \geq 0 \text{ egész, } 0 \leq D < \pi$$

és tekintsük a

$$\int_{-\infty}^{x_0} h = \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(\pi/2)} h + \sum_{j=1}^{k}\int_{\varphi^{-1}(j\pi-\pi/2)}^{\varphi^{-1}(j\pi+\pi/2)} h + \int_{\varphi^{-1}(k\pi+\pi/2)}^{x_0} h \tag{3.3.10}$$

összeget. Véges intervallumra megmutattuk, hogy ha $q \geq 0$ monoton csökken $[0, x_0]$-on és $\varphi(0) = 0$, akkor (3.3.10) -ban minden tag nemnegatív (azzal a különbséggel, hogy ott $\int_0^{\varphi^{-1}(\frac{\pi}{2})}$ szerepelt $\int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(\frac{\pi}{2})}$ helyett), és az egyes tagok értéke csak akkor lehet nulla, ha $q = 0$ azon az intervallumon, amelyen integráltunk. Most ugyanez a bizonyítás mutatja (mivel $(-\infty, x_0]$-n $q$ nem lehet azonosan nulla), hogy az első tag szigorúan pozitív, tehát $\dot{\psi} > 0$. □

**3.3.8. Tétel** (Horváth-Kiss)**.** *Tekintsük a (3.1.1) Schrödinger egyenletet a számegyenesen. Ha a $q$ potenciál nemnegatív, egyvölgyes és $\lim_{x\to\pm\infty} q(x) = +\infty$, akkor az $n$. és az $m$.sajátérték hányadosára, ha $m < n$,*

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_m} < \frac{n^2}{m^2} \tag{3.3.11}$$

*teljesül.*

**Megjegyzés.** Végtelen potenciálgát esetén, mint az előző szakaszban megjegyeztük, (3.3.11)-ben egyenlőség állna, tehát ez a becslés éles.

*Bizonyítás.* Legyen a $q(x)$ potenciál $(-\infty, a]$-n monoton csökkenő és $[a, \infty)$-n monoton növő. Jelölje $\tilde{q}(x)$ a $a$-ra tükrözött potenciált, azaz legyen $\tilde{q}(x) = q(2a-x)$. Ekkor $y(2a-x, z_n)$ egy, a $\tilde{q}(x)$ potenciálhoz tartozó sajátfüggvény. Definiáljuk a következő függvényeket:

$$\tilde{y}(x, z_n) = (-1)^{n+1} y(2a-x, z_n), \tag{3.3.12}$$

$$\tilde{r}(x, z_n) = r(2a-x, z_n) \tag{3.3.13}$$

és

$$\tilde{\varphi}(x, z_n) = n\pi - \varphi(2a-x, z_n). \tag{3.3.14}$$

Akkor $\tilde{y}(x, z_n)$ (2.1.1) megoldása $q$ helyett $\tilde{q}$-mal és $\tilde{y}(\pm\infty)=0$. Mivel $y(x, z_n)$-nek $(n-1)$ egyszeres nullhelye van $\mathbb{R}$-en, $y(x, z_n)$ előjele a $+\infty$ közelében $(-1)^{n-1}$, így $\tilde{y}$ a $-\infty$ közelében pozitív is, vagyis $\tilde{y}$ a 3.1.1. tételben említett megoldás.

**3.3.9. Lemma.** $\varphi(+\infty, z_n) = n\pi$.

*Bizonyítás.* (3.1.9)-ból látszik, hogy $\sin\varphi = 0 \implies \varphi' > 0$, így $\varphi(\cdot, z)$ $\pi$ minden többszörösét egyszer veszi föl. $\varphi$ pontosan akkor egész számú többszöröse $\pi$-nek, ha $y=0$, és $y(x, z_n)$-nek pontosan $n-1$ nullhelye van $\mathbb{R}$-en ([7]), tehát nagy $x$-re $(n-1)\pi < \varphi(x, z_n) < n\pi$. Mivel $y(+\infty) = 0$, a végtelenben vagy $\varphi \to n\pi - 0$ vagy $\varphi \to (n-1)\pi + 0$, de az utóbbi nem lehet, mert akkor $y$-nak és $y'$-nek ugyanaz lenne az előjele, ellentmondásban $y \to 0$-val. Tehát $\varphi(\pi, z_n) = n\pi$. □

Egyszerű ellenőrizni, hogy

$$\tilde{y}(x, z_n) = \frac{\tilde{r}(x, z_n)}{z_n} \sin\tilde{\varphi}(x, z_n), \tag{3.3.15}$$

$$\tilde{y}'(x, z_n) = \tilde{r}(x, z_n) \cos\tilde{\varphi}(x, z_n), \tag{3.3.16}$$

és a lemma szerint

$$\tilde{\varphi}(-\infty, z_n) = 0, \tag{3.3.17}$$

azaz $\tilde{r}$ és $\tilde{\varphi}$ értelmezhetők minden $z>0$-ra, mint a $\tilde{q}$-hoz tartozó Prüfer-változók. (3.1.8)-nak megfelelően legyen $\tilde{\psi} = \frac{\tilde{\varphi}}{z}$.

Tekintsük a $\Psi(z) = \psi(a,z) + \tilde{\psi}(a,z)$ függvényt. A 3.3.1 tétel szerint ez két szigorúan monoton növő függvény összege. (3.3.14)-ből

$$z_n \Psi(z_n) = n\pi. \tag{3.3.18}$$

Legyen $m$ kisebb, mint $n$. Ekkor $\frac{m\pi}{z_m} = \Psi(z_m) < \Psi(z_n) = \frac{n\pi}{z_n}$, így $\frac{z_n}{z_m} < \frac{n}{m}$, azaz $\frac{\lambda_n}{\lambda_m} < \frac{n^2}{m^2}$. □

**3.3.10. Tétel** (Horváth-Kiss). *Tekintsük a (3.1.1) Schrödinger-egyenletet a $(-\infty,0]$ félegyenesen az*

$$y(0) = 0 \tag{3.3.19}$$

*peremfeltétellel. Ha a $q$ potenciál nemnegatív, egyvölgyes és $\lim_{x\to-\infty} q(x) = +\infty$, akkor az $n$. és az $m$.sajátérték hányadosára, ha $m < n$,*

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_m} < \frac{n^2}{m^2} \tag{3.3.20}$$

*teljesül.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy a potenciál $(-\infty, -x_0]$-on monoton csökken, $[-x_0,0]$-n monoton nő. Jelölje $\tilde{q}(x)$ a 0-ra tükrözött potenciált, azaz értelmezzük $\tilde{q}(x) = q(-x)$-et a $[0,\infty)$ intervallumon. Ekkor $\tilde{q}(x)$ monoton csökken $[0,x_0]$-on, $y(-x,z_n)$ pedig egy, a $\tilde{q}(x)$ potenciálhoz tartozó sajátfüggvény (ugyanazon 0-beli peremfeltétel mellett). Definiáljuk a következő függvényeket:

$$\tilde{y}(x,z_n) = (-1)^{n+1}\frac{y(-x,z_n)}{r(0,z_n)}, \tag{3.3.21}$$

$$\tilde{r}(x,z_n) = \frac{r(-x,z_n)}{r(0,z_n)} \tag{3.3.22}$$

és

$$\tilde{\varphi}(x,z_n) = n\pi - \varphi(-x,z_n). \tag{3.3.23}$$

Ugyanúgy, mint véges intervallum esetén, $\varphi(0,z_n) = n\pi$. Ezért

$$\tilde{y}(0,z_n) = 0, \tag{3.3.24}$$

$$\tilde{y}'(0,z_n) = 1, \tag{3.3.25}$$

azaz $\tilde{y}(x,z_n)$ a véges intervallum esetében vizsgált kezdetiértékprobléma megoldása $q$ helyett $\tilde{q}$-mal. Egyszerű ellenőrizni, hogy

$$\tilde{y}(x,z_n) = \frac{\tilde{r}(x,z_n)}{z_n}\sin\tilde{\varphi}(x,z_n), \tag{3.3.26}$$

$$\tilde{y}'(x,z_n) = \tilde{r}(x,z_n)\cos\tilde{\varphi}(x,z_n), \tag{3.3.27}$$

$$\tilde{\varphi}(0,z_n) = 0, \tag{3.3.28}$$

azaz $\tilde{r}$ és $\tilde{\varphi}$ értelmezhetők minden $z>0$-ra, mint a $\tilde{q}$-hoz tartozó Prüfer-változók. Végül legyen $\tilde{\psi}=\frac{\tilde{\varphi}}{z}$.

Tekintsük a $\Psi(z)=\psi(-x_0,z)+\tilde{\psi}(x_0,z)$ függvényt. A 3.3.1 tétel és a 2.2.2. tétel szerint ez egy szigorúan monoton növő és egy monoton növő függvény összege. (3.3.23) miatt

$$z_n\Psi(z_n)=n\pi. \tag{3.3.29}$$

Legyen $m$ kisebb, mint $n$. Ekkor $\frac{m\pi}{z_m}=\Psi(z_m)<\Psi(z_n)=\frac{n\pi}{z_n}$, így $\frac{z_n}{z_m}<\frac{n}{m}$, azaz $\frac{\lambda_n}{\lambda_m}<\frac{n^2}{m^2}$. $\square$

# 4. fejezet

# A rezgő húr sajátértékei

## 4.1. A rezgő húr egyenlete és a Schrödinger operátor

Tekintsük egyrészt a rezgő húr egyenletét:

$$u'' + \lambda \varrho u = 0, \qquad \varrho > 0, \tag{4.1.1}$$

ahol

$$\int_0^\pi \sqrt{\varrho} = \pi, \tag{4.1.2}$$

másrészt a

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \tag{4.1.3}$$

Schrödinger-egyenletet a $[0, \pi]$ intervallumon Dirichlet peremfeltételekkel. Ha a $\varrho$ tömegsűrűség kétszer folytonosan differenciálható, akkor a (4.1.1) egyenlet Liouville-transzformációval (4.1.3)-be vihető. Valóban, a

$$\hat{x} = \int_0^x \sqrt{\varrho}, \tag{4.1.4}$$

$$q(\hat{x}) = \frac{1}{4}\left\{\frac{\varrho(x)''}{\varrho^2(x)} - \frac{5}{4}\frac{\varrho(x)'^2}{\varrho^3(x)}\right\} \tag{4.1.5}$$

és

$$y(\hat{x}) = u(x)\varrho^{\frac{1}{4}}(x) \tag{4.1.6}$$

helyettesítésekkel (4.1.1)-ből (4.1.3)-at kapjuk. A (4.1.2) feltevés szerepe az, hogy a Liouville-transzformációval kapott Schrödinger operátor is a $[0, \pi]$ intervallumon legyen értelmezve, és így közvetlenebbül hivatkozhassunk korábbi eredményeinkre. A későbbiekben pedig, amikor a sajátértékek hányadosairól mondunk ki állításokat, ettől a feltevéstől eltekinthetünk, hiszen ha a $\varrho$ tömegsűrűséget megszorozzuk valamilyen konstanssal, a sajátértékek hányadosa nem változik. Vegyük észre azt is, hogy a (4.1.2) feltevés mellett a (4.1.3) és a (4.1.1) egyenletek sajátértékei azonosak, tehát a sajátértékek jelölésében nem kell különbséget tennünk.

Mint ismert, ha $q \in L_1(0,\pi)$ valós, akkor a (4.1.3) egyenlet Dirichlet-spektruma a növekvő $\lambda_1$, $\lambda_2$, ... sorozatból áll. Ha $0 < \varrho \in L_1(0,\pi)$, akkor pedig (4.1.1) spektruma is egy szigorúan növő végtelen sorozat, és az 1.6.1. összehasonlító tétel szerint $\lambda_1 > 0$ (lásd [14, 48]).

A sajátértékek mindkét esetben folytonos, (sőt, kompakt, differenciálható) függvényei az $L^1$-beli potenciálnak illetve a sűrűségnek ([40, 56, 66]). Ezt felhasználva becsléseinket, amelyeket a potenciálok vagy tömegsűrűségek bizonyos sima osztályain belül igazoltunk, kiterjeszthetjük $L^1$-re.

## 4.2. Liouville-transzformációval megkapható eredmények

A pozitív potenciálokról szóló részben bizonyítottuk Ashbaugh és Benguria tételét, miszerint ha a potenciál nemnegatív, akkor a $\lambda_n$ Dirichlet-sajátértékekre $\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \le \lceil \frac{n}{m} \rceil^2$ teljesül. Ugyanott megjegyeztük azt is, hogy negatív (nempozitív) potenciálokra az állítás megfordítható, ha a legelső sajátérték pozitív. A Liouville-transzformáció segítségével rezgő húrokra is bizonyíthatjuk a tétel megfelelőjét:

**4.2.1. Tétel.** *[4, 10, 44] Tekintsük a (4.1.1) egyenletet a $[0,\pi]$ intervallumon Dirichlet peremfeltételekkel, és legyen $n \ge m$. Ha $\varrho^{-\frac{1}{4}}$ konvex (konkáv), akkor $\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \ge \lfloor \frac{n}{m} \rfloor^2$ ($\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \le \lceil \frac{n}{m} \rceil^2$). Ha még $\varrho \in C^2[0,\pi]$ is teljesül és valamilyen $n > m$-re egyenlőség van, akkor $m$ osztója $n$-nek, és $\varrho^{-\frac{1}{4}}$ lineáris $[0,\pi]$-n.*

*Bizonyítás.* Először lássuk be a tételt $\varrho \in C^2[0,\pi]$ esetén. Feltehetjük, hogy (4.1.2) teljesül, hiszen $\varrho$-nak egy konstansszorosát véve a sajátértékek aránya nem változik. Legyen $p = \varrho^{-\frac{1}{4}}$. $p$ segítségével (4.1.5) egyszerűbb alakra hozható:

$$q(\hat{x}) = -p^3(x)p''(x). \tag{4.2.1}$$

Eszerint a Liouville-transzformációval kapott Schrödinger-operátor $q$ potenciálja nempozitív, ha $p$ konvex, és nemnegatív, ha $p$ konkáv. Mivel egy rezgő húr egyenletét transzformáltuk oly módon, hogy a sajátértékek ugyanazok maradtak, $\lambda_1 > 0$, így alkalmazhatjuk a 2.1.9. és a 2.1.6. tételt, konvex $p$-re $\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \ge \lfloor \frac{n}{m} \rfloor^2$-et, konkávra $\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \le \lceil \frac{n}{m} \rceil^2$-et kapunk. Egyenlőség mindkét esetben csak akkor van, ha $n$ többszöröse $m$-nek és $p'' = 0$, azaz $p$ lineáris.

A konvexitás miatt $p$ a végpontokat kivéve folytonos. Két pontban megváltoztatva a tömegsűrűséget, a differenciáloperátor nem változik, tehát feltehetjük, hogy $p$ folytonos. Minden (pozitív) folytonos konvex függvény lokálisan egyenletesen közelíthető (pozitív) konvex $C^\infty$-beli függvényekkel (lásd például [6]-ben a Corollary 2.-t), így $\varrho$ is közelíthető $L^1$-ben. Mivel pedig a sajátértékek folytonos függvényei $\varrho \in L^1$-nek, a tételbeli egyenlőtlenség igaz minden konvex (konkáv) $p$-re. $\square$

## 4.3. További eredmények

Mielőtt további tételeket fogalmaznánk meg, idézzünk föl és bővítsünk egy korábbi definíciót:

**4.3.1. Definíció.** *A $\varrho$ sűrűség egygátas (egyvölgyes), ha létezik egy olyan $a \in$ $\in [0,\pi]$, hogy $\varrho$ monoton nő (csökken) $[0,a]$-n és monoton csökken (nő) $[a,\pi]$-n. $\varrho$ szimmetrikus, ha $\varrho(\pi - x) = \varrho(x)$.*

Huang [39] 1999-ben bizonyította, hogy ha $\varrho$ szimmetrikus egyvölgyes, akkor $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq 4$, míg szimmetrikus egygátas (single-barrier) sűrűségekre $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \geq 4$. Ez utóbbi esetben Tóth Anna [61] bizonyította, hogy $\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \geq 9$ és $\frac{\lambda_4}{\lambda_1} \geq 16$ is teljesül. Alkalmas módszerrel ezeket az eredményeket kiterjesztjük $\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$-re [44].

Horváth [31] megmutatta, hogy Huang egygátas sűrűségekre vonatkozó eredménye akkor is igaz, ha a sűrűség nem feltétlenül szimmetrikus, de a $\frac{\pi}{2}$ pontban vált növekedőből csökkenőbe. Abban az esetben, amikor a váltópont nem a $\frac{\pi}{2}$, mutatott olyan egygátas tömegsűrűség-függvényt, amelyre $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 4$. Egyelőre nyitott kérdés, hogy hasonló állítás mondható-e a egyvölgyes, illetőleg a $\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ esetre.

**4.3.2. Tétel.** *[44] Tekintsük a (4.1.1) egyenletet a $[0,\pi]$ intervallumon Dirichlet peremfeltételekkel. Ha a $\varrho$ tömegsűrűség*

- *szimmetrikus egyvölgyes, akkor $\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \leq n^2$,*
- *szimmetrikus egygátas, akkor $\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \geq n^2$.*

*Ha $\varrho \in C^1[0,\pi]$ és valamilyen $n > 1$-re egyenlőség van, akkor $\varrho$ konstans.*

*Bizonyítás.* A bizonyítás technikája hasonlít az előző részekben látottakhoz. $\varrho \in C^1$ esetén új, polárkoordináta-szerű változókat vezetünk be, amelyek a sajátértékekben – ezúttal – a $\frac{\pi}{2}$ többszöröseit veszik fel, aztán $\frac{\lambda_n}{\lambda_1} = n^2$ esetén a szögváltozókra felírt differenciálegyenletekre alkalmazzuk az 1.6.1. összehasonlító tételt, ami miatt $\varrho$ konstans kell, hogy legyen. Végül nem $C^1$-beli $\varrho$-kra is kiterjesztjük az állítást.

Jelölje $u(x,z)$ a

$$u'' + z^2 \varrho(x) u = 0, \quad x \in [0,\pi], \quad z > 0, \tag{4.3.1}$$

$$u(0) = 0, u'(0) = \varrho^{\frac{1}{4}}(0), \tag{4.3.2}$$

kezdetiértékprobléma (egyértelmű) megoldását, és vezessük be az alábbi változókat:

$$u(x,z) = \frac{r(x,z)}{z} \varrho^{-\frac{1}{4}} \sin\varphi(x,z), \tag{4.3.3}$$

$$u'(x,z) = r(x,z) \varrho^{\frac{1}{4}} \cos\varphi(x,z), \tag{4.3.4}$$

$$\varphi(0,z) = 0, \tag{4.3.5}$$

ahol $r(x,z) > 0$, és az $x$ szerinti deriválást szokás szerint vesszővel, míg a $z$ szerintit ponttal jelöljük. Legyen továbbá

$$\psi = \frac{\varphi}{z}. \tag{4.3.6}$$

Új változóink a

$$\varphi' = z\varrho^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\frac{\varrho'}{\varrho}\sin 2\varphi, \tag{4.3.7}$$

és

$$\frac{r'}{r} = -\frac{1}{4}\frac{\varrho'}{\varrho}\cos 2\varphi. \tag{4.3.8}$$

egyenleteknek tesznek eleget. Akárcsak a Prüfer-változók esetében, most is $u = 0 \Leftrightarrow \sin\varphi = 0$, azaz $z^2$ pontosan akkor sajátérték, ha $\varphi(\pi, z)$ $\pi$-nek valamilyen többszöröse. Legyen $z_n = \sqrt{\lambda_n}$.

**4.3.3. Lemma.** $\varphi(\frac{\pi}{2}, z_n) = n\frac{\pi}{2}$.

*Bizonyítás.* Az előző fejezetekben tárgyalt Schrödinger-operátorok esetéhez hasonlóan (4.3.7) miatt $\sin\varphi(x,z) = 0 \Longrightarrow \varphi'(x,z) > 0$, így $\varphi(\cdot, z)$ $\pi$ minden többszörösét egyszer veszi föl. Az oszcillációs tételek szerint $u(x, z_n)$-nek $n$ darab nullhelye van $(0,\pi]$-n, így $\varphi(\pi, z_n) = n\pi$, a szimmetria miatt pedig $\varphi(\frac{\pi}{2}, z_n) = n\frac{\pi}{2}$. □

Legyen $\psi_n(x) = \frac{\varphi(x,z_n)}{z_n}$ és

$$F_n(x,\psi) = \varrho^{\frac{1}{2}}(x) + \frac{1}{4z_n}\frac{\varrho'(x)}{\varrho(x)}\sin 2z_n\psi(x). \tag{4.3.9}$$

Ezekkel a jelölésekkel

$$\psi_n'(x) = F_n(x, \psi_n). \tag{4.3.10}$$

**4.3.4. Lemma.** *Tegyük fel, hogy valamilyen $n > 1$ egész számra $\frac{z_n}{z_1} = n$. Ha a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon*

- *$\varrho' \le 0$ vagy*
- *$\varrho' \ge 0$,*

*akkor $\varrho$ konstans.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $\varrho' \ge 0$; a másik eset ugyanúgy bizonyítható. A 2.1.4. állítás szerint, ha $n > 1$ egész és $0 < x < \pi$, akkor

$$n\sin x > \sin nx.$$

Ez és $\dfrac{z_n}{z_1} = n$ miatt $F_n(x,\psi) \geq F_1(x,\psi)$ a $[0,\dfrac{\pi}{2}] \times [0,\dfrac{\pi}{2z_1}]$ halmazon. A 4.3.3. lemma szerint $\varphi(\frac{\pi}{2}, z_1) = \frac{\pi}{2}$, (4.3.7) miatt pedig $\varphi(x,z) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \varphi'(x,z) > 0$, azaz $\varphi(x,z_1) < \frac{\pi}{2}$ az $x < \frac{\pi}{2}$ intervallumon. Ezért a

$$\psi_1'(x) = F_1(x,\psi_1(x))$$

és a

$$\psi_n'(x) = F_n(x,\psi_n(x))$$

differenciálegyenletekre alkalmazva az 1.6.1. összehasonlító tételt, $\psi_1(x) \geq \psi_n(x)$, és $\psi_1(\dfrac{\pi}{2}) = \psi_n(\dfrac{\pi}{2})$ miatt minden $x \in [0,\dfrac{\pi}{2}]$-re $\psi_1(x) = \psi_n(x)$. Akkor viszont $F_n(x,\psi(x)) = F_1(x,\psi(x))$, vagyis $\varrho' = 0$. □

Tegyük fel, hogy $\varrho \in C^1$ egygátas és mégis $\dfrac{z_n}{z_1} \leq n$ valamilyen $n$-re. Tekintsünk egy másik, $\tilde{\varrho} \in C^2$ sűrűséget, amelyre $\tilde{\varrho}^{-\frac{1}{4}}$ szimmetrikus és szigorúan konvex. Ekkor $\tilde{\varrho}$ egygátas és a 4.2.1. tétel szerint $\frac{\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_1} > n^2$, így a sajátértékek folytonossága miatt létezik $\varrho$-nak és $\tilde{\varrho}$-nak egy olyan $\hat{\varrho}$ egygátas konvex kombinációja, amelyre $\frac{\hat{\lambda}_n}{\hat{\lambda}_1} > n^2$. A lemma szerint tehát $\hat{\varrho}$ konstans, de ez csak úgy lehetséges, ha $\varrho = \hat{\varrho}$ és ekkor $\frac{\lambda_n}{\lambda_1} = n^2$. Tehát $\frac{\hat{\lambda}_n}{\hat{\lambda}_1} < n^2$ nem lehetséges, és, legalábbis a $C^1$-beli sűrűségek között, egyenlőség is csak konstans $\varrho$-ra lehet.

Hátra van még a bizonyítás tetszőleges egygátas (egyvölgyes) sűrűségekre. Mivel $\varrho$ monoton darabokból áll, egyenletesen közelíthető egygátas (egyvölgyes) lépcsős függvényekkel, ezek pedig $L^1$-ben közelíthetők sima egygátas (egyvölgyes) függvényekkel, ezért a tételbeli egyenlőtlenség minden egygátas (egyvölgyes) függvényre igaz. □

**Megjegyzés.** A bizonyítás során $\varrho \in C^1$ helyett a $\dfrac{\pi}{2}$ pontban elegendő lett volna a két féloldali differenciálhatóság. Ezt használjuk ki a harmadik megjegyzésben.

**Megjegyzés.** Tekintsünk egy olyan $\varrho(x)$ sűrűséget $[0,\frac{\pi}{2}]$-en, amelyre $\varrho^{-\frac{1}{4}}$ lineáris, de nem konstans. $[\frac{\pi}{2},\pi]$-n tekintsük $\varrho(\pi - x)$-et. A $[0,\frac{\pi}{2}]$-n és a $[\frac{\pi}{2},\pi]$-n felírt Dirichlet-problémák sajátértékei ugyanazok. A 4.2.1. tétel szerint a második és az első sajátérték hányadosa 4. Emiatt a teljes $[0,\pi]$ intervallumon tekintett Dirichlet-probléma sajátértékeire $\frac{\lambda_4}{\lambda_2} = 4$. Ez a példa mutatja, hogy ha $\varrho^{-\frac{1}{4}} \notin C^2$, a 4.2.1. tételben nemlineáris $\varrho^{-\frac{1}{4}}$-re is lehet egyenlőség.

**Megjegyzés.** Módosítsuk úgy az előző megjegyzés konstrukcióját, hogy $\varrho^{-\frac{1}{4}} \in$ $\in C^2[0,\frac{\pi}{2}] \cap C^2[\frac{\pi}{2},\pi]$ ne lineáris, hanem konkáv és monoton csökkenő legyen $[0,\frac{\pi}{2}]$-en. Akkor a fél intervallumokon a második és az első Dirichlet sajátérték hányadosa kisebb, mint 4. Ez azt jelenti, hogy a teljes $[0,\pi]$-n tekintett Dirichlet probléma sajátértékeire $\frac{\lambda_4}{\lambda_2} < 4$, jóllehet a sűrűség egygátas. Tehát a 4.3.2. tétel nem terjeszthető ki $\frac{\lambda_n}{\lambda_m}$-re.

# 5. fejezet

# Ambarzumian tétele

## 5.1. Bevezetés

Az inverz spektrálelmélet első eredménye 1929-ből származik [1]. Ambarzumian örmény csillagász bizonyította az alábbi érdekes tételt:

**5.1.1. Tétel** (Ambarzumian)**.** *Tekintsük a*

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x) \tag{5.1.1}$$

*egyenletet az*

$$y'(0)=y'(\pi)=0 \tag{5.1.2}$$

*Neumann-féle peremfeltételekkel. Legyen* $q\in C[0,\pi]$*. Ha ennek a problémának a sajátértékei* $\lambda_n=n^2$*,* $n\geq 0$*, akkor* $q=0$ $[0,\pi]$*-n.*

Később Borg norvég matematikus munkái nyomán kiderült ([8, 9]), hogy általában két különböző peremfeltételhez tartozó spektrum sajátértékeinek ismerete szükséges ahhoz, hogy megállapíthassuk, melyik potenciálból származnak; a nulla potenciál Neumann-peremfeltételekkel kivételes esetnek tekinthető. Ilyen kivételes esetek azonban sok más operátornál is előfordulnak. Az ezekről szóló tételeket Ambarzumian típusú tételeknek nevezzük.

Ambarzumian eredeti bizonyítása meglehetősen hosszú. Helyette két rövidebbet közlünk. Mindkét esetben a potenciál meghatározásához elegendő $q\in L^1$, és az, hogy a sajátértékek között van a 0 és végtelen sok négyzetszám.

**I. Bizonyítás.** A Neumann-esetben

$$\sqrt{\lambda}_n=n+\frac{c}{n}+O(\frac{1}{n}), \tag{5.1.3}$$

ahol

$$c=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q. \tag{5.1.4}$$

Ha a sajátértékek között végtelen sok négyzetszám szerepel, akkor $c=0$, azaz

$$\int_0^\pi q=0. \tag{5.1.5}$$

A $\lambda_0 = 0$ sajátértékre felírva (5.1.1)-et, $-y_0'' + q(x)y_0 = 0$, ami átírható $q = \frac{y_0''}{y_0}$-ra, hiszen a nulladik sajátfüggvénynek nincs nullhelye $[0,\pi]$-n. Parciálisan integrálva

$$0 = \int_0^\pi q = \int_0^\pi \frac{y_0''}{y_0} = \left[\frac{y_0'}{y_0}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)^2. \tag{5.1.6}$$

A peremfeltételek miatt

$$0 = \int_0^\pi \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)^2, \tag{5.1.7}$$

ezért $y_0' = 0$, és akkor $q = \frac{y_0''}{y_0} = 0$. $\square$

**II. Bizonyítás.** Tekintsük az $L : y \mapsto -y'' + q(x)y$ operátort az $\{y, y' \in AC[0,\pi] \mid y'(0) = y'(\pi) = 0\}$ értelmezési tartományon. A sajátértékek aszimptotikus eloszlása miatt ismét

$$\int_0^\pi q = 0. \tag{5.1.8}$$

A peremfeltételek miatt

$$\langle Ly, y\rangle = \int_0^\pi (y'^2 + q(x)y^2)\ \mathrm{d}x. \tag{5.1.9}$$

$y_0 = 1$-et helyettesítve

$$\langle Ly_0, y_0\rangle = 0. \tag{5.1.10}$$

Ekkor viszont $L \geq 0$ miatt $y_0 = 1$ a 0 sajátértékhez tartozó sajátfüggvény konstansszorosa, azaz (5.1.1) miatt $q = 0$. $\square$

**Megjegyzés.** A potenciálra tett alkalmas feltevés mellett a második bizonyítás segítségével Ambarzumian tétele kiterjeszthető más peremfeltételek esetére is [11].

## 5.2. Ambarzumian tétele mátrix potenciálokra

**5.2.1. Tétel** (Chern és Shen). *[12] Tekintsük a*

$$-y'' + P(x)y = \lambda y \tag{5.2.1}$$

*egyenletet az*

$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \tag{5.2.2}$$

*Neumann-féle peremfeltétellel, ahol $P$ folytonos, $n \times n$ szimmetrikus mátrix értékű függvény. Ha ennek a problémának a 0 $n$-szeres sajátértéke, továbbá végtelen sok egész $j$-re $j^2$ $n$-szeres sajátérték, akkor $P = 0$ $[0,\pi]$-n.*

*Bizonyítás.* Jelölje $Y(x,z)$ az (5.2.1) egyenlet $Y(0) = A$, $Y'(0) = B$ kezdeti feltételekből induló $n$ darab lineárisan független megoldását, ahol $z = \sqrt{\lambda}$ és $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ $n$ rangú. Az egydimenziós esethez hasonlóan [52, 53] a megoldás felírható

$$Y(x,z) = A\cos xz + B\frac{\sin xz}{z} + \int_0^x K(x,t)\left\{A\cos tz + B\frac{\sin tz}{z}\right\}\ \mathrm{d}t \tag{5.2.3}$$

alakban, ahol a $K(x,t)$ szimmetrikus mátrix értékű magfüggvény mindkét változójában differenciálható, és a (mátrix potenciálokra is bizonyítható) 1.3.4. állítás szerint

$$K(\pi,\pi) = \frac{1}{2}\int_0^\pi P(x)\ \mathrm{d}x. \tag{5.2.4}$$

Az általunk vizsgált esetben $A = I$, $B = 0$. Végtelen sok $j$-re

$$Y'(\pi, j) = 0. \tag{5.2.5}$$

Másrészt az (5.2.3) előállításból

$$Y'(x,z) = -zI\sin xz + K(x,x)\cos xz + \int_0^x K_x(x,t)\cos tz\ \mathrm{d}t, \tag{5.2.6}$$

amibe $x = \pi$-t és $z = j$-t helyettesítve

$$0 = K(\pi,\pi)\cos j\pi + \int_0^x K_x(\pi,t)\cos jt\ \mathrm{d}t. \tag{5.2.7}$$

Nagy $j$-re az integrál nullához tart a Riemann lemma miatt, tehát $K(\pi,\pi) = 0$, azaz $\int_0^\pi P(x)\ \mathrm{d}x = 0$.

Most megismételjük az egydimenziós esetben leírt második bizonyítás variációs érvelését. Legyen $y_0(x)$ tetszőleges konstans vektor. Ekkor

$$\int_0^\pi -y_0^* y_0'' + y_0^* P(x) y_0\ \mathrm{d}x = 0, \tag{5.2.8}$$

tehát $y_0$ a nulladik sajátértékhez tartozó sajátfüggvény, azaz például $Y_0(x) = I$ a 0 sajátértékhez tartozó megoldás. Ezt (5.2.1)-be helyettesítve kapjuk, hogy $P(x) = 0$. □

A tétel erősebb változata is igaz (eddig nem jelent meg):

**5.2.2. Tétel.** *Tekintsük az (5.2.1) egyenletet Neumann-féle peremfeltétellel. Legyen $\sigma_0 = \{m_1, \dots, m_n\}$ egy valós számokból álló $n$ elemű halmaz. Ha minden $k$-ra létezik végtelen sok olyan $j$ egész szám, hogy $m_k + j^2$ része a spektrumnak, akkor a $P(x)$ potenciál konstans, $\sigma_0$ pedig a $P$ mátrix sajátértékeinek halmaza.*

*Bizonyítás.* Az (5.2.6) egyenlőségbe $x = \pi$-t és $\sqrt{m_k + j^2}$-t helyettesítve

$$\begin{aligned} Y'(\pi, \sqrt{m_k + j^2}) = & -\sqrt{m_k + j^2} I \sin \pi\sqrt{m_k + j^2} + \\ & + K(\pi,\pi)\cos\pi\sqrt{m_k + j^2} + \\ & + \int_0^x K_x(\pi,t)\cos t\sqrt{m_k + j^2}\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ha $j$ nagy, akkor

$$\sqrt{m_k + j^2} = j + \frac{m_k}{\sqrt{m_k + j^2} + j} = j + \frac{m_k}{2j} + O(\frac{1}{j^3}), \tag{5.2.9}$$

$$\sqrt{m_k+j^2}\sin\pi\sqrt{m_k+j^2}=(-1)^j\frac{m_k\pi}{2}+O(\frac{1}{j^2}) \tag{5.2.10}$$

és

$$\cos\pi\sqrt{m_k+j^2}=(-1)^j+O(\frac{1}{j^2}). \tag{5.2.11}$$

Ezért

$$Y'(\pi,\sqrt{m_k+j^2})=(-1)^j\left(K(\pi,\pi)-\frac{m_k\pi}{2}I\right)+o(1),$$

azaz $K(\pi,\pi)-\frac{m_k\pi}{2}I$ tetszőlegesen közelíthető a szinguláris $\pm Y'(\pi,\sqrt{m_k+j^2})$ mátrixokkal, és mivel az invertálható mátrixok halmaza nyílt, nem lehet invertálható. Ekkor létezik egy olyan $y_{k,0}(x)=y_{k,0}$ egy abszolút értékű vektor, amelyre $K(\pi,\pi)y_{k,0}=\frac{m_k\pi}{2}y_{k,0}I$, továbbá

$$\langle Ly_{k,0},y_{k,0}\rangle=\int_0^\pi y_{k,0}^*P(x)y_{k,0}^2\ \mathrm{d}x=y_{1,0}^*2K(\pi,\pi)y_{1,0}^2=m_k\pi. \tag{5.2.12}$$

Tegyük fel, hogy $m_1\le m_2\le\ldots\le m_n$. A variációs módszerrel (5.2.12)-ból $k=1$ esetén következik, hogy $y_{1,0}$ az $m_1$ sajátértékhez tartozó konstans sajátfüggvény. Visszahelyettesítve (5.2.1)-be,

$$P(x)y_{1,0}=m_1y_{1,0} \tag{5.2.13}$$

adódik. Vegyük észre, hogy ha

$$y_{1,j}(x)=y_{1,0}(x)\cos jx, \tag{5.2.14}$$

akkor $y_{1,j}(x)$ egy, az $m_1+j^2$ sajátértékhez tartozó sajátfüggvény. Így az $y_{1,0}$-ra (és egyben minden $x$-re az összes $y_{1,j}(x)$-re) merőleges $y_{2,0}(x)=y_{2,0}$ vektorra $\langle Ly_{2,0},y_{2,0}\rangle=m_2\pi$, azaz $y_{2,0}$ az $m_2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Ezt folytatva kapjuk, hogy általában az $m_k+j^2$ sajátértékhez az $y_{k,0}(x)\cos jx$ sajátfüggvény tartozik, és minden $x$-re és minden $k$-ra

$$P(x)y_{k,0}=m_ky_{k,0}. \tag{5.2.15}$$

Ez csak úgy lehetséges, ha $P$ konstans, és sajátértékei az $m_k$ számok. □

## 5.3. Ambarzumian tétele Dirac egyenletekre

Ebben a részben az egydimenziós Dirac operátort tekintjük $2n\times 2n$-es mátrix potenciállal. A mátrix potenciálról feltesszük, hogy folytonos, önadjungált, és az (5.3.1)-(5.3.2)-ben meghatározott alakú. Ilyenkor is van olyan speciális eset, amikor a potenciál meghatározható a spektrumból. A bizonyítás egy új változó bevezetésén múlik (lásd az 5.3.4. lemmát).

Tekintsük a következő sajátértékproblémát a $[0,\pi]$ intervallumon:

$$\psi_2'+Q(x)\psi_1+m\psi_1=\lambda\psi_1, \tag{5.3.1}$$

$$-\psi_1' + Q(x)\psi_2 - m\psi_2 = \lambda\psi_2, \tag{5.3.2}$$

a

$$\psi_2(0) = \psi_2(\pi) = 0, \tag{5.3.3}$$

peremfeltételekkel, ahol $\psi_1$ és $\psi_2$ $n$ hosszú vektorok, $Q$ önadjungált (nem feltétlenül valós) $n \times n$-es mátrix potenciál és $m > 0$.

Az $n=1$ esetben az (5.3.1)-(5.3.2) egyenletek a $Q(x)$ elektrosztatikus potenciál terében mozgó relativisztikus elektront írják le [60].

Jelölje $\Psi(x)$ az (5.3.1)-(5.3.2) egyenlet $\Psi(0) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$ kezdeti feltételekből induló $n$ darab lineárisan független megoldását. Jelölje $\Psi_1$, illetve $\Psi_2$ a $\Psi$ fölső, illetve alsó $n$ sorából álló négyzetes mátrixot. $\lambda$ pontosan akkor sajátérték, ha $\Psi_2(\pi)$ szinguláris, multiplicitása $n - rank(\Psi_2(\pi))$ (ugyanúgy, mint a Schrödinger esetben). (5.3.1)-(5.3.3)-nak a $Q=0$ potenciálhoz tartozó sajátértékeit és sajátfüggvényeit egyszerűen kiszámíthatjuk. Mindegyik sajátérték $n$ multiplicitású, és

$$\left.\begin{array}{c} \Psi(x,\lambda_k) = \begin{bmatrix} \cos kxI \\ \frac{\lambda_k - m}{k} \sin kxI \end{bmatrix}, \lambda_k = \pm\sqrt{m^2+k^2}, k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ \Psi(x,m) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_0 = m. \end{array}\right\} \tag{5.3.4}$$

**Megjegyzés.** Nagy $|\nu|$-re $\lambda_\nu = \nu + o(1)$.

Ennyi bevezetés után következzen a Dirac operátorokra vonatkozó Ambarzumian-tétel:

**5.3.1. Tétel.** *[43] Tegyük fel, hogy $Q$ önadjungált, folytonos, és az (5.3.1)-(5.3.3) probléma spektruma ugyanaz, mint a $Q=0$ esetben (tehát az (5.3.4)-ben megadott). Akkor $Q = 0$ $[0,\pi]$-n.*

**Megjegyzés.** Az $n=1$ esetben Horváth [29] bizonyított hasonló tételt az $m < \frac{1}{2}$ feltevés mellett. Az itt leírt módszerrel erre a feltevésre nincs szükség.

*Bizonyítás.* A továbbiakban végig feltételezzük, hogy $\lambda$ valós szám.

**5.3.2. Lemma.**

$$\Psi_1^*\Psi_2 = \Psi_2^*\Psi_1. \tag{5.3.5}$$

*Bizonyítás.* $\Psi_1^*(0)\Psi_2(0) = \Psi_2^*(0)\Psi_1(0)$ és $(\Psi_1^*\Psi_2)' = -\Psi_2^*(\lambda I - Q + mI)\Psi_2 + \Psi_1^*(\lambda I - Q - mI)\Psi_1 = (\Psi_2^*\Psi_1)'$. □

**5.3.3. Következmény.**

$$(\Psi_1 + i\Psi_2)^*(\Psi_1 + i\Psi_2) = \Psi^*\Psi = (\Psi_1 - i\Psi_2)^*(\Psi_1 - i\Psi_2), \tag{5.3.6}$$

*és az itt felírt mátrixok invertálhatók.*

*Bizonyítás.* Az (5.3.6) egyenlet azonnal következik az előző lemmából. A megoldások egyértelműsége miatt $\Psi$ minden pontban $n$ rangú, így $\Psi^*\Psi$ invertálható. Akkor viszont $(\Psi_1 \pm i\Psi_2)$ sem lehet szinguláris. □

**5.3.4. Lemma.** *Legyen* $E=(\Psi_1+i\Psi_2)(\Psi_1-i\Psi_2)^{-1}$. *Ekkor (valós* $\lambda$*-ra)* $E$ *unitér.*

*Bizonyítás.* (5.3.6)-ból könnyen ellenőrizhető, hogy $E^* = E^{-1}$. □

**5.3.5. Lemma.**

$$E' = iE(\lambda I - Q) + i(\lambda I - Q)E - im(I + E^2). \tag{5.3.7}$$

*Bizonyítás.* $E$ definíciójából a $(B^{-1})' = -B^{-1}B'B^{-1}$ képlet felhasználásával az állítás következik. □

**5.3.6. Lemma.** $\lambda$ *ugyanakkora multiplicitású sajátértéke az (5.3.1)-(5.3.3) problémának, mint* $+1$ $E(\pi,\lambda)$*-nak.*

*Bizonyítás.* Legyen $\lambda$ az (5.3.1)-(5.3.3) probléma sajátértéke. Multiplicitása $n - rank(\Psi_2) = n - rank((\Psi_1 + i\Psi_2) - (\Psi_1 - i\Psi_2)) = n - rank(E - I)$, ami éppen $E$ 1 sajátértékének a multiplicitása. □

**5.3.7. Lemma.** *Rögzített (valós)* $\lambda$*-ra létezik* $n$ *darab* $x$*-ben differenciálható függvény, amelyek együtt minden* $x$*-re* $E$ *multiplicitással vett sajátértékeit veszik fel értékül.*

*Bizonyítás.* Rögzítsük $\lambda$-t. Mivel $E$ unitér, sajátértékei féligegyszerűek, azaz a Kato [41] második fejezetében található 5.4. tétel szerint a multiplicitással számolt sajátértékek rendezetlen $n$-ese differenciálható. Ugyanazon fejezet 5.6. tétele szerint pedig a $[0,\pi]$ intervallumon ez a rendezetlen $n$-es reprezentálható $n$ darab differenciálható komplex értékű függvénnyel. □

**5.3.8. Lemma.** *Rögzített* $\lambda$*-a léteznek a* $\varphi_1$, $\varphi_2$,…,$\varphi_n$ *valós értékű, differenciálható függvények úgy, hogy* $\varphi_k(0) = 0$ *és az* $\{e^{i\varphi_k} | i = 1,\ldots,n\}$ *szám-*$n$*-es* $E$ *sajátértékeit adja meg.*

*Bizonyítás.* Az állítás az előző lemmából következik, felhasználva, hogy $E(0)=I$ és $E$ unitér. □

**5.3.9. Lemma.** *Legyen* $e^{i\varphi_{k_1}(x)} = e^{i\varphi_{k_2}(x)} = \cdots = e^{i\varphi_{k_j}(x)}$ *és legyen* $P(x)$ *a hozzájuk tartozó sajátprojekció. Ekkor* $\varphi'_{k_1}(x), \varphi'_{k_2}(x), \ldots, \varphi'_{k_j}(x)$ *a* $Ran(P)$*-re megszorított* $P[2(\lambda I - Q) - m(E + E^{-1})]P$ *leképezés sajátértékeiből álló* $j$*-es.*

*Bizonyítás.* A Kato [41] $II$. fejezet 5.4. tétele szerint $(e^{i\varphi_{k_l}(x)})'$, $(l = 1,2,\ldots,j)$ rendezetlen $j$-es megegyezik a $Ran(P)$-re megszorított $P[iE(\lambda I - Q) + (\lambda I - Q)iE - mi(I + E^2)]P$ leképezés sajátértékeiből álló rendezetlen $j$-essel, amiből $EP = PE = e^{i\varphi_{k_l}(x)}P$ miatt következik a lemma állítása. □

**5.3.10. Következmény.** *Legyen* $\Phi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j$. *Ekkor*

$$\Phi'(x) = Tr[2(\lambda I - Q) - m(E + E^{-1})]. \tag{5.3.8}$$

□

**5.3.11. Következmény.** *Legyen $f(x)$ folytonos $[0,\pi]$-n. Ekkor*

$$\int_0^\pi f(x)e^{\pm i\varphi_k(x,\lambda)} \to 0 \tag{5.3.9}$$

*ha* $|\lambda| \to \infty$.

*Bizonyítás.* $||E+E^{-1}|| \leq 2$ és az előző lemma miatt

$$2(\lambda - ||Q|| - m) \leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi_k(x,\lambda) \leq 2(\lambda + ||Q|| + m), \tag{5.3.10}$$

így az állítás következik a Riemann lemmájából. □

**5.3.12. Következmény.** $|\lambda| \to \infty$ *esetén*

$$\Phi(\pi,\lambda) = 2n\lambda\pi - 2Tr\int_0^\pi Q + o(1). \tag{5.3.11}$$

*Bizonyítás.* Integráljuk (5.3.8)-at 0-tól $\pi$-ig. □

A $\varphi_k$ függvényeket minden rögzített $\lambda$-ra definiáltuk, ezért nem tudhatjuk, hogy folytonosak-e $\lambda$-ban. De (5.3.8) miatt az összegük folytonos (sőt reguláris) $\lambda$-ban.

**Az 5.3.1. tétel bizonyítása.**

Minden sajátérték $n$ multiplicitású, ezért $\lambda$ pontosan akkor sajátértéke (5.3.1) -(5.3.3)-nak, ha minden $1 \leq k \leq n$-re $\varphi_k(\pi,\lambda)$ $2\pi$ többszöröse. Ha $\lambda$ a valós számegyenesen mozog, folytonossági okokból $\Phi(\pi,\lambda)$ két szomszédos sajátérték között legfeljebb $2n\pi$-t változhat. (5.3.11) és $\lambda_\nu = \nu + o(1)$ miatt

$$\Phi(\pi,\lambda_\nu) - \Phi(\pi,\lambda_{-\nu}) = 4n\nu\pi + o(1). \tag{5.3.12}$$

Ha $\lambda$ sajátérték, $\Phi(\pi,\lambda)$ $2\pi$ többszöröse kell legyen, ezért nagy $\nu$-re

$$\Phi(\pi,\lambda_\nu) - \Phi(\pi,\lambda_{-\nu}) = 4n\nu\pi, \tag{5.3.13}$$

emiatt pedig $\Phi(\pi,\lambda)$ pontosan $2n\pi$-t változik két szomszédos sajátérték között. De akkor (5.3.11) miatt az összes sajátértékre igaz kell, hogy legyen

$$\Phi(\pi,\lambda_\nu) = 2n\nu\pi - 2Tr\int_0^\pi Q \tag{5.3.14}$$

(és $Tr\int_0^\pi Q$-nak is $\pi$ többszörösének kell lennie). Speciálisan $\nu=0$-ra azt kapjuk, hogy

$$\Phi(\pi,m) = -2Tr\int_0^\pi Q. \tag{5.3.15}$$

Másrészt, (5.3.8)-at integrálva

$$\Phi(\pi,m) = 2nm\pi - 2Tr[\int_0^\pi Q + \int_0^\pi m\frac{E(\cdot,m)+E^{-1}(\cdot,m)}{2}]. \tag{5.3.16}$$

Összevetve ezt a két egyenlőséget,

$$Tr\int_0^\pi \frac{E(\cdot,m)+E^{-1}(\cdot,m)}{2}=n\pi. \tag{5.3.17}$$

Ez csak akkor lehetséges, ha $E(x,m)=I$. De akkor $\Psi_2(x,m)=0$, azaz $\Psi_1(x,m)=$ $=I$. Beírva ezeket (5.3.1)-be, azt kapjuk, hogy $Q=0$, amit bizonyítanunk kellett. □

**1. Megjegyzés.** Ha $m=0$, Az 5.3.1. tétel állítása nem marad igaz. Az egydimenziós esetre Horváth [29] cikkében találhatók ellenpéldák.
**2. Megjegyzés.** Konstans $c$-re a $cI$ potenciált is meghatározza a spektruma: alkalmazzuk az 5.3.1. tételt a $Q-cI$ potenciállal felírt Dirac operatorra.
**3. Megjegyzés.** A Schrödinger operátorok esetében elegendő volt a spektrum egy részét ismerni: a legelsőn kívül végtelen sok másik sajátértéket. A Dirac esetben az $m$ sajátértéken kívül (amint az (5.3.13)-ból látható) ismernünk kell végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív sajátértéket.

# 6. fejezet

# Inverz problémák

## 6.1. Bevezetés

Inverz feladaton általánosságban azt értjük, hogy spektrális adatokból határozzuk meg egy differenciáloperátor együtthatóit [65]. Ilyen problémák gyakran bukkannak fel a természettudományok számos ágában; konkrét példák találhatók A. Kirsch [42] könyvében. A Sturm-Liouville operátorok esetében spektrális adatok alatt korábban az $m$-függvényt és a spektrálfüggvényt értették. Klasszikus eredménynek számít, hogy ezek bármelyike – Dirac operátorok esetén is – meghatározza a potenciált:

**6.1.1. Tétel.** *[9, 51] A Schrödinger operátor $m$-függvénye és spektrálfüggvénye közül bármelyik meghatározza a potenciált:*

**(a)** *Ha $\varrho^*(\lambda)=\varrho(\lambda)$ minden $\lambda\in\mathbb{R}$ esetén, akkor $q^*(x)=q(x)$ majdnem mindenütt $[0,\pi]$-n.*

**(b)** *Ha $m^*(\lambda) = m(\lambda)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ esetén, akkor $q^*(x) = q(x)$ majdnem mindenütt $[0,\pi]$-n.*

**6.1.2. Tétel.** *[48, 62] A Dirac operátor $m$-függvénye és spektrálfüggvénye közül bármelyik meghatározza a $2\times 2$ mátrixpotenciált:*

**(a)** *Ha $\varrho^*(\lambda) = \varrho(\lambda)$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén, akkor $Q^*(x) = Q(x)$ majdnem mindenütt $[0,\pi]$-n.*

**(b)** *Ha $m^*(\lambda) = m(\lambda)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ esetén, akkor $Q^*(x) = Q(x)$ majdnem mindenütt $[0,\pi]$-n.*

**Megjegyzés.** A spektrálfüggvény és az $m$-függvény is kölcsönösen meghatározzák egymást, lásd az 1.10.6. és az A.4.12. tételt.

Konkrétabb spektrális adatok, mint például különböző peremfeltételek mellett adódó spektrumokból származó sajátértékek rendszerét is vizsgálták. Jól ismert eredmény [45], hogy véges intervallumon két különböző peremfeltétellel kapott spektrum összes sajátértéke elegendő a potenciál meghatározásához. Az utóbbi évekig számos cikkben [13, 21, 24, 22, 23, 25, 28, 30, 46, 50, 49] bizonyítottak különböző olyan feltételeket, amelyek biztosítják a potenciál egyértelműségét. Végül 2001-ben Horváth [32] bizonyított exponenciális rendszerek teljességével kapcsolatos szükséges és elégséges feltételt.

**6.1.3. Definíció.** *[55] Legyen $X$ normált tér. Egy $M \subset X$ halmazt zárt, ha az $M$ által generált lineáris altér sűrű $X$-ben.*

**6.1.4. Definíció.** *[55] Legyen $X$ normált tér. Egy $M \subset X^*$ halmaz a $H \subset X$ részhalmazra vonatkozóan teljes, ha $x \in H$ és $m(x) = 0$ $\forall m \in M$-re esetén $x = 0$.*

Ha adott $X$ és $X^*$, akkor röviden azt mondjuk, hogy $M \subset X^*$ teljes, ha $X$-re vonatkozóan teljes. Ha az $M \subset X^*$ halmazra $M \subset X$ is teljesül, akkor ahelyett, hogy $M$ teljes $X$-re vonatkozóan, azt mondjuk, hogy $M$ teljes $X$-ben.

**6.1.5. Tétel.** *(Horváth) Legyen $q \in L^2$, $\lambda_n \nrightarrow -\infty$, $n \geq 1$ tetszőleges különböző valós számok. Legyen $\lambda_n \in \sigma(\alpha_n, 0)$. Akkor a $\lambda_n$ sajátértékek meghatározzák a potenciált $\Leftrightarrow$ tetszőleges $\mu \neq \pm\sqrt{\lambda_n}$-re $\{e^{\pm 2i\mu x}, e^{\pm 2i\lambda_n x}\}$ teljes $L^2[-\pi, \pi]$-ben.*

Kiderült, hogy exponenciális rendszerek tulajdonságaira vonatkozó tételek segítségével ([5, 45, 64]) az előbb említett eredmények nagy többsége levezethető ebből a feltételből (és $\sin\beta \neq 0$ esetén a $\sigma(\alpha, \beta)$-ra vonatkozó bonyolultabb, de hasonló jellegű feltételekből), lásd a [32] cikk 4. részét.

Megfelelő előkészítés után ilyen típusú általános, véges és végtelen intervallumra vonatkozó tételeket bizonyítunk ebben a fejezetben (lásd a 6.4.2., a 6.5.1., a 6.5.2. és a 6.5.4. tételt).

## 6.2. Integráloperátorok

Legyen $v(x, \lambda) = v_0(x, \lambda)$ az (1.1.1) egyenlet

$$v(\pi, \lambda) = 0, \quad v'(\pi, \lambda) = -1 \tag{6.2.1}$$

feltételeket kielégítő megoldása. Definiáljuk $v^*$-ot hasonlóan.

**6.2.1. Lemma.** *(Horváth [32], 5.2. lemma) Legyen $||q||_1, ||q^*||_1 \leq D$. Ekkor*

$$1 - 2z^2 v(\pi - x, \lambda) v^*(\pi - x, \lambda) = \cos 2xz + \int_0^{2x} \cos \tau z M_1(x, \tau, q, q^*) \, \mathrm{d}\tau, \tag{6.2.2}$$

*és $|M_1(x, \tau, q, q^*)| \leq c(D)$, ahol a $c(D)$ konstans független a $q$, $q^*$ potenciálok választásától. Sőt, amennyiben $\|q^{**}\|_1 \leq D$, akkor*

$$|M_1(x, \tau, q, q^*) - M_1(x, \tau, q, q^{**})| \leq c(D) \|q^* - q^{**}\|_1. \tag{6.2.3}$$

**6.2.2. Definíció.** *Legyen $M(t, x) = 2M_1(x, 2t)$-vel*

$$(A_{q^*} h)(x) = h(x) + \int_x^{\pi} M(x, t) h(t) \, dt \qquad h \in L_1(0, \pi). \tag{6.2.4}$$

**Megjegyzés.** Az $A_{q^*}$ operátor függ a $q$ potenciáltól is, amit rögzítettnek gondolunk. A (6.2.3) becslések $M$-re is érvényesek, ezért

$$\|A_{q^*} - A_{q^{**}}\| \leq c(D)\|q^* - q^{**}\|_1 \leq c(D)\|q^* - q^{**}\|_p, \tag{6.2.5}$$

ha $p \geq 1$. $M$ egyenletesen korlátos $\|q\|_p \leq D$, $\|q^*\|_p \leq D$-ben, így a Volterra operátorok tulajdonságaiból következően $A_{q^*} : L_p(0,\pi) \to L_p(0,\pi)$ folytonos, lineáris, invertálható operátor, és mind $A_{q^*}$, mind $A_{q^*}^{-1}$ egyenletesen korlátos a megadott halmazon.

**6.2.3. Következmény.** *Legyen $h \in L^1(0,\pi)$. Ekkor*

$$\int_0^\pi h(x)\ \mathrm{d}x - 2z^2 \int_0^\pi h(x)v(x,\lambda)v^*(x,\lambda)\ \mathrm{d}x = \int_0^\pi A_{q^*}\left(h(\pi - x)\right)\cos 2xz\ \mathrm{d}x. \tag{6.2.6}$$

*Bizonyítás.* A $\tau = 2t$ helyettesítés után szorozzuk meg a (6.2.2) egyenlőséget $h(\pi - x)$-szel, és integráljuk $x$ szerint 0-tól $\pi$-ig. Az integrálások sorrendjét felcserélve az állítást kapjuk. $\square$

**Megjegyzés.** A $z = 0$ helyettesítéssel

$$\int_0^\pi A_{q^*}h = \int_0^\pi h, \tag{6.2.7}$$

ezért

$$\int_0^\pi h(x)v(x,\lambda)v^*(x,\lambda)\ \mathrm{d}x = \int_0^\pi A_{q^*}\left(h(\pi - x)\right)\left(\frac{\sin xz}{z}\right)^2\ \mathrm{d}x. \tag{6.2.8}$$

**6.2.4. Lemma.** *[32] Legyen $B_1$ és $B_2$ Banach tér. Minden $q \in B_1$-re*

$$A_q : B_1 \to B_2$$

*folytonos lineáris operátor. Tegyük fel, hogy*

**(i)** *valamilyen rögzített $q_0 \in B_1$-re $A_{q_0}$ bijektív és az inverze is folytonos.*

**(ii)** *a $q \to A_q$ leképezés Lipschitz tulajdonságú a következő értelemben: minden $h \in B_1$-re*

$$\|(A_{q^*} - A_q)h\| \leq c(q_0)\|q^* - q\|\|h\|, \text{ ha } \|q\|, \|q^*\| \leq 2\|q_0\|, \tag{6.2.9}$$

*ahol $c(q_0)$ egy $q$-tól, $q^*$-tól és $h$-tól független konstans.*

*Ekkor az $\{A_q(q - q_0) : q \in B_1\}$ halmaz tartalmaz egy origó középű gömböt $B_2$-ben.*

**6.2.5. Következmény.** *(6.2.5) miatt a (6.2.4)-ben definiált $A_{q^*}$ operátorokkal az $\{A_{q^*}(q^* - q) : q \in L^p\}$ halmaz tartalmaz egy $L^p$-beli, origó középű gömböt.*

**Jelölés.** Legyen $L_0^p$ az olyan $L^p$-beli függvények halmaza, amelyeknek az integrálja 0.

**6.2.6. Következmény.** *Az $\{A_{q^*}(q^* - q) : q \in L_0^p\}$ halmaz tartalmaz egy $L_0^p$-beli, origó középű gömböt.*

## 6.3. Integráloperátorok a félegyenesen

Vezessük be a jelölés nélküli $\|\cdot\|$ normát a következőképpen: legyen $\|q(x)\| = \int_0^\infty |q(x)|(1+x)\,\mathrm{d}x$. Nyilván $\|q\| < \infty$ akkor és csak akkor, ha $q(x)$ és $xq(x)$ is $L^1$-beli, és $\|q(x)\| = \|q(x)\|_1 + \|xq(x)\|_1$.

**6.3.1. Definíció.** *Legyen $\delta > 0$-ra*

$$C_\delta = \{q : \int_0^\infty |q(x)|e^{\delta x} < \infty\}. \tag{6.3.1}$$

Ekkor $C_\delta$ a $\|q\|_\delta = \int_0^\infty |q(x)|e^{\delta x}$ normával Banach-tér.

**6.3.2. Állítás.** *Legyen $q \in C_\delta$. Ekkor $\|q\| \le c(\delta)\|q\|_\delta$.*

*Bizonyítás.*

$$\|q\| \le \frac{1}{\min(1,\delta)} \int_0^\infty |q(x)|(1+\min(1,\delta)x)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{\min(1,\delta)}\|q\|_\delta. \tag{6.3.2}$$

□

**6.3.3. Lemma.** *Legyen $||q||, ||q^*|| \le D$. Ekkor*

$$y(x,\lambda)y^*(x,\lambda) = e^{2ixz} + \int_x^\infty e^{2i\tau z} M_1(x,\tau,q,q^*)\,\mathrm{d}\tau, \tag{6.3.3}$$

*és $|M_1(x,\tau,q,q^*)| \le c(D)$, $\int_x^\infty |M_1(x,\tau,q,q^*)|\,\mathrm{d}\tau \le c(D)$, ahol a $c(D)$ konstans független a $q$, $q^*$ potenciálok választásától. Továbbá, amennyiben $\|q^{**}\| \le D$, akkor*

$$|M_1(x,\tau,q,q^*) - M_1(x,\tau,q,q^{**})| \le c(D)\|q^* - q^{**}\|, \tag{6.3.4}$$

$$\int_x^\infty |M_1(x,\tau,q,q^*) - M_1(x,\tau,q,q^{**})|\,\mathrm{d}\tau \le c(D)\|q^* - q^{**}\|.$$

*Bizonyítás.* Az 1.4. alfejezetben bizonyítottuk a következőket:

$$y(x,\lambda) = e^{ixz} + \int_x^\infty K(x,t)e^{itz}\,\mathrm{d}t, \tag{6.3.5}$$

$$y^*(x,\lambda) = e^{ixz} + \int_x^\infty K^*(x,t)e^{itz}\,\mathrm{d}t. \tag{6.3.6}$$

Legyen (az ott használt jelöléshez hasonlóan)

$$\sigma_0(x) = \max(\int_x^\infty |q|, \int_x^\infty |q^*|, \int_x^\infty |q^{**}|), \quad \sigma_1(x) = \int_x^\infty \sigma_0 \tag{6.3.7}$$

és

$$\delta_0(x) = \int_x^\infty |q^* - q^{**}|, \quad \delta_1(x) = \int_x^\infty \delta_0. \tag{6.3.8}$$

Bizonyítottuk azt is, hogy a $K$, $K^*$ magfüggvényekre

$$|K(x,t)|, |K^*(x,t)| \le c(D)\sigma_0(\frac{x+t}{2}), \tag{6.3.9}$$

továbbá $\|q^{**}\| \le D$ esetén

$$|K^*(x,t) - K^{**}(x,t)| \le c(D)\left(\delta_0(\frac{x+t}{2}) + \sigma_0(\frac{x+t}{2})\delta_1(x)\right), \tag{6.3.10}$$

amiből következik, hogy

$$|K(x,t)|,\ |K^*(x,t)|,\ \int_x^\infty |K(x,t)|\ \mathrm{d}t,\ \int_x^\infty |K^*(x,t)|\ \mathrm{d}t \le c(D), \tag{6.3.11}$$

és

$$|K^*(x,t) - K^{**}(x,t)|,\ \int_x^\infty |K^*(x,t) - K^{**}(x,t)|\ \mathrm{d}t \le c(D)\|q^* - q^{**}\|, \tag{6.3.12}$$

ahol a $c(D)$ konstans független a $q$, $q^*$, $q^{**}$ potenciálok választásától.

Jelölje $\mathcal{F}$ a Fourier-transzformáltat. Ha $K(x,t)$-t kiterjesztjük $t < x$-re 0-nak, akkor

$$\begin{aligned}
&y(x,\lambda)y^*(x,\lambda) = \\
&= e^{2ixz} + \int_x^\infty [K + K^*](x,t)e^{i(x+t)z}\ \mathrm{d}t + \\
&+ (y(x,\lambda) - e^{ixz})(y^*(x,\lambda) - e^{ixz}) = \\
&= e^{2ixz} + \mathcal{F}\left(t \mapsto [K + K^*](x, t - x)\right) + \\
&+ \mathcal{F}\left((t \mapsto K(x,t)) * (t \mapsto K^*(x,t))(t)\right).
\end{aligned}$$

Mivel $K$ és $K^*$ is $t < x$-re 0, $t < 2x$-re mindkét Fourier-transzformálandó függvény zérus, így az

$$M_1(x,t,q,q^*) = 2K(x, 2t - x) + 2K^*(x, 2t - x) + 2\int_x^{2t-x} K(x, 2t - \tau)K^*(x,\tau)\ \mathrm{d}\tau \tag{6.3.13}$$

választással a kívánt alakhoz jutunk.

Hátra van még a (6.3.4) becslések bizonyítása.

$$\begin{aligned}
&|M_1(x,t,q,q^*)| \le \\
&\qquad \le c(D)\sigma_0(t) + c(D)\int_x^{2t-x} \sigma_0(t - \frac{\tau - x}{2})\sigma_0(\frac{\tau + x}{2})\ \mathrm{d}\tau \le \qquad (6.3.14) \\
&\qquad \le c(D)\sigma_0(t) + c(D)\int_0^{2t} \sigma_0(t - \frac{\tau}{2})\sigma_0(\frac{\tau}{2})\ \mathrm{d}\tau \le \\
&\qquad \le c(D)\sigma_0(t) + c(D)(\sigma_0 * \sigma_0)(t),
\end{aligned}$$

és hasonlóképpen

$$|M_1(x,t,q,q^*)-M_1(x,t,q,q^{**})| \leq \tag{6.3.15}$$
$$\leq c(D)\left(\delta_0(t)+\sigma_0(t)\delta_1(x)\right)+c(D)(\sigma_0*\delta_0)(t)+c(D)\delta_1(x)(\sigma_0*\sigma_0)(t).$$

Ebből a konvolúció normájára vonatkozó ismert

$$\|h*h^*\|_\infty \leq \|h\|_1\|h^*\|_\infty, \quad \|h*h^*\|_1 \leq \|h\|_1\|h^*\|_1 \tag{6.3.16}$$

becslések segítségével minden következik. □

**6.3.4. Definíció.** *Legyen* $M(x,t)=M_1(t,x,q,q^*)$*-gal*

$$(A_{q^*}h)(x)=h(x)+\int_0^x M(x,t)h(t)\,dt \qquad h\in L^p(0,\infty) \tag{6.3.17}$$

**Megjegyzés.** Az $A_{q^*}$ operátor függ a $q$ potenciáltól is, amit rögzítettnek gondolunk. A (6.3.4) becslések szerint az $A_{q^*}\colon L^1(0,\infty)\to L^1(0,\infty)$ operátor normájára

$$\|A_{q^*}\| \leq 1+\sup_t \int_t^\infty |M(x,t)|\ \mathrm{d}x = 1+\sup_x \int_x^\infty |M_1(x,t)|\ \mathrm{d}t \leq c(D) \tag{6.3.18}$$

és

$$\|A_{q^*}-A_{q^{**}}\| \leq c(D)\|q^*-q^{**}\|. \tag{6.3.19}$$

**6.3.5. Következmény.** *Legyen* $(1+x)q(x)\in L^1(0,\infty)$. *Ekkor*

$$\int_0^\infty h(x)y(x,\lambda)y^*(x,\lambda)\ \mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(A_{q^*}h\right)(x)e^{2ixz}\ \mathrm{d}x. \tag{6.3.20}$$

*Bizonyítás.* Szorozzuk meg a (6.3.3) egyenletet $h(x)$-szel, és integráljuk $x$ szerint 0-tól $\infty$-ig. Az integrálások sorrendjét felcserélve az állítást kapjuk. □

**6.3.6. Lemma.** *Létezik egy olyan* $M(x)\in L^1(0,\infty)\cap L^\infty(0,\infty)$ *függvény, amelyre* $|M(x,t)|\leq c(D)M(x)$ *és* $\|M\|_p\leq c(D)$. *Sőt, amennyiben* $q,q^*\in C_\delta$ *is teljesül, akkor* $M(x)\in C_\delta$ *és* $\|q\|_\delta$, $\|q^*\|_\delta\leq D$ *esetén* $\|M\|_\delta\leq c(D,\delta)$.

*Bizonyítás.* Legyen $M(x)=\sigma_0(x)+(\sigma_0*\sigma_0)(x)$. Az az előző bizonyítások során beláttuk, hogy $|M(x,t)|\leq c(D)M(x)$, $M(x)$ $L^1(0,\infty)\cap L^\infty(0,\infty)$-beli, és $\|M\|_1$, $\|M\|_\infty\leq c(D)$. Ezért

$$\|M\|_p=\left(\int_0^\infty |M(x)|^p\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\|M\|_1\|M\|_\infty^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \leq c(D), \tag{6.3.21}$$

Ha $q,q^*\in C_\delta$ is teljesül, akkor

$$\lim_{x\to\infty} e^{\delta x}\int_x^\infty |q| \leq \lim_{x\to\infty}\int_x^\infty |q(t)|e^{\delta t}\ \mathrm{d}t = 0, \tag{6.3.22}$$

ezért

$$\int_0^\infty e^{\delta x}\int_x^\infty |q|\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\delta}e^{\delta x}\int_x^\infty |q|\right]_0^\infty + \frac{1}{\delta}\int_0^\infty |q(x)|e^{\delta x}\ \mathrm{d}x \le \frac{D}{\delta}, \qquad (6.3.23)$$

azaz $\|\sigma_0\|_\delta \le \frac{D}{\delta}$ és így

$$\|M\|_\delta \le \frac{D}{\delta} + (\frac{D}{\delta})^2. \qquad (6.3.24)$$

□

**6.3.7. Lemma.** *Létezik egy olyan $m(x) \in L^1(0,\infty) \cap L^\infty(0,\infty)$ függvény, amelyre $|M(x,t,q,q^*) - M(x,t,q,q^{**})| \le c(D)m(x)$ és $\|m\|_p \le c(D)\|q^* - q^{**}\|$. Sőt, amennyiben $q, q^* \in C_\delta$ is teljesül, akkor $m(x) \in C_\delta$ és $\|q\|_\delta$, $\|q^*\|_\delta \le D$ esetén $\|m\|_\delta \le c(D,\delta)$.*

*Bizonyítás.* Legyen $m(x) = \delta_0(x) + (\sigma_0 * \delta_0)(x) + M(x)\delta_1(0)$. Az az előző bizonyítások során beláttuk, hogy $|M(x,t,q,q^*) - M(x,t,q,q^{**})| \le c(D)m(x)$, $m(x)$ $L^1(0,\infty) \cap L^\infty(0,\infty)$-beli, és $\|m\|_1$, $\|m\|_\infty \le c(D)\|q^* - q^{**}\|$. Ezért

$$\|m\|_p = \left(\int_0^\infty |m(x)|^p\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\|m\|_1 \|m\|_\infty^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \le c(D)\|q^* - q^{**}\|. \qquad (6.3.25)$$

Ha $q, q^* \in C_\delta$ is teljesül, akkor $\|\sigma_0\|_\delta \le \frac{D}{\delta}$, $\|\delta_0\|_\delta \le \frac{D}{\delta}\|q^* - q^{**}\|$, és így

$$\|m\|_\delta \le 2\left(\frac{D}{\delta} + (\frac{D}{\delta})^2\right)\|q^* - q^{**}\|. \qquad (6.3.26)$$

□

**6.3.8. Következmény.** *Az $A_{q^*} : L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty)$ operátor normájára*

$$\|A_{q^*}h\|_p \le c(D)\|h\|_p \qquad (6.3.27)$$

*és*

$$\|A_{q^*} - A_{q^{**}}\| \le c(D)\|q^* - q^{**}\|. \qquad (6.3.28)$$

*Bizonyítás.* $p < \infty$-re

$$\|\int_0^x M(x,t)h(t)\ \mathrm{d}t\|_p \le \|M\|_p\|h\|_p \qquad (6.3.29)$$

és

$$\|\int_0^x M(x,t,q,q^*)h(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^x M(x,t,q,q^{**})h(t)\ \mathrm{d}t\|_p \le \|m\|_p\|h\|_p, \qquad (6.3.30)$$

míg $p = \infty$ esetén

$$\|\int_0^x M(x,t)h(t)\ \mathrm{d}t\|_p \le xM(x)\|h\|_p \qquad (6.3.31)$$

és

$$\| \int_0^x M(x,t,q,q^*)h(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^x M(x,t,q,q^{**})h(t)\ \mathrm{d}t\|_p \leq xm(x)\|h\|_p. \quad (6.3.32)$$

Mivel

$$xM(x) \leq \int_0^x M(t)\ \mathrm{d}t \leq \|M\|_1, \quad (6.3.33)$$

valamint $m$ monotonitása miatt

$$xm(x) \leq \|m\|_1, \quad (6.3.34)$$

a két előző lemmát felhasználva mindkét állítás adódik. □

Általában nem igaz, hogy $A_q^*$ $C_\delta$-t $C_\delta$-ba képezné, még akkor sem, ha $(q^* - -q) \in C_\delta$. Viszont

**6.3.9. Következmény.** *$\|q\|_\delta$, $\|q^*\|_\delta \leq D$ esetén az $A_{q^*} : C_\delta \to C_\delta$ operátor normájára*

$$\|A_{q^*}h\|_\delta \leq c(D)\|h\|_\delta, \quad (6.3.35)$$

*továbbá $\|q^{**}\|_\delta \leq D$ esetén*

$$\|A_{q^*} - A_{q^{**}}\| \leq c(D)\|q^* - q^{**}\|_\delta. \quad (6.3.36)$$

*Bizonyítás.* A két előző lemmát felhasználva

$$\| \int_0^x M(x,t)h(t)\ \mathrm{d}t\|_\delta \leq \|M\|_\delta \|h\|_1 \quad (6.3.37)$$

és

$$\| \int_0^x M(x,t,q,q^*)h(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^x M(x,t,q,q^{**})h(t)\ \mathrm{d}t\|_\delta \leq \|m\|_\delta \|h\|_1, \quad (6.3.38)$$

amiből ($\|h\|_1 \leq \|h\|_\delta$-val) mindkét állítás adódik. □

**6.3.10. Lemma.** *Az $A_{q^*} : L^1(0,\infty) \to L^1(0,\infty)$ operátornak létezik korlátos lineáris inverze. Ha $M(x) = \sigma_0(x) + (\sigma_0 * \sigma_0)(x)$, akkor $\|A_{q^*}^{-1}\| \leq e^{c(D)\|M\|_1}$.*

*Bizonyítás.* Legyen $B = A_{q^*} - I$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|B^n h\|_1 &= \int_0^\infty | \int_0^{x_n} \dots \int_0^{x_1} \prod_{j=1}^n M(x_j, x_{j-1}) h(x_0)\ \mathrm{d}x_0 \dots\ \mathrm{d}x_{n-1}|\ \mathrm{d}x_n \leq \\
&\leq (c(D))^n \int_0^\infty \int_0^{x_n} \dots \int_0^{x_1} \prod_{j=1}^n M(x_j)|h(x_0)|\ \mathrm{d}x_0 \dots\ \mathrm{d}x_{n-1}\ \mathrm{d}x_n = \\
&= (c(D))^n \int_0^\infty \int_{x_0 < x_1 < \dots x_n < \infty} \prod_{j=1}^n M(x_j)|h(x_0)|\ \mathrm{d}x_1 \dots\ \mathrm{d}x_n\ \mathrm{d}x_0 = \\
&= (c(D))^n \int_0^\infty \frac{1}{n!} \int_{x_0}^\infty \dots \int_{x_0}^\infty \prod_{j=1}^n M(x_j)\ \mathrm{d}x_1 \dots\ \mathrm{d}x_n |h(x_0)|\ \mathrm{d}x_0 = \\
&= (c(D))^n \int_0^\infty \frac{1}{n!} \left( \int_{x_0}^\infty M(x)\ \mathrm{d}x \right)^n |h(x_0)|\ \mathrm{d}x_0 \leq \frac{(c(D))^n}{n!} \|M\|_1^n \|h\|_1,
\end{aligned} \quad (6.3.39)$$

tehát az $(I+B)^{-1}$-et előállító $\sum_{n=0}^{\infty}(-B)^n$ Neumann-sor konvergens, és a normák összege legföljebb $e^{c(D)\|M\|_1}$. □

**6.3.11. Lemma.** *Az $A_{q^*}$:$L^\infty(0,\infty)\to L^\infty(0,\infty)$ operátornak létezik korlátos lineáris inverze. Ha $M(x)=\sigma_0(x)+(\sigma_0*\sigma_0)(x)$, akkor $\|A_{q^*}^{-1}\|\leq 1+c(D)\|M\|_1 e^{c(D)\|M\|_1}$.*

*Bizonyítás.* Az előző lemmához hasonlóan bizonyítható, hogy $n\geq 1$-re

$$\|B^n h\|_\infty \leq c(D)\|xM(x)\|_\infty \frac{(c(D))^{n-1}}{(n-1)!}\|M\|_1^{n-1}\|h\|_\infty, \tag{6.3.40}$$

tehát az $(I+B)^{-1}$-et előállító $\sum_{n=0}^{\infty}(-B)^n$ Neumann-sor konvergens, és a normák összege legföljebb $1+c(D)\|M\|_1 e^{c(D)\|M\|_1}$. □

**6.3.12. Lemma.** *$1<p<\infty$-re az $A_{q^*}:L^p(0,\infty)\to L^p(0,\infty)$ operátornak létezik korlátos lineáris inverze. Ha $M(x)=\sigma_0(x)+(\sigma_0*\sigma_0)(x)$, akkor $\|A_{q^*}^{-1}\|\leq 1+$ $+c(D)\|M\|_\infty e^{c(D)\|M\|_1}$.*

*Bizonyítás.* Az előző lemmákhoz hasonlóan bizonyítható, hogy $n\geq 1$-re

$$\|B^n h\|_p \leq c(D)\|M\|_\infty \frac{(c(D))^{n-1}}{(n-1)!}\|M\|_1^{n-1}\|h\|_p, \tag{6.3.41}$$

tehát az $(I+B)^{-1}$-et előállító $\sum_{n=0}^{\infty}(-B)^n$ Neumann-sor konvergens, és a normák összege legföljebb $1+c(D)\|M\|_\infty e^{c(D)\|M\|_1}$. □

**6.3.13. Lemma.** *Az $A_{q^*}:C_\delta\to C_\delta$ operátornak létezik korlátos lineáris inverze. Ha $M(x)=\sigma_0(x)+(\sigma_0*\sigma_0)(x)$, akkor $\|A_{q^*}^{-1}\|\leq e^{c(D)\|M\|_1}$.*

*Bizonyítás.* Szintén hasonlóan bizonyítható, hogy $n\geq 1$-re

$$\|B^n h\|_\delta \leq \frac{(c(D))^n}{n!}\|M\|_\delta\|M\|_1^{n-1}\|h\|_1 \leq \frac{(c(D))^n}{n!}\|M\|_\delta^n\|h\|_\delta, \tag{6.3.42}$$

tehát az $(I+B)^{-1}$-et előállító $\sum_{n=0}^{\infty}(-B)^n$ Neumann-sor konvergens, és a normák összege legföljebb $e^{c(D)\|M\|_\delta}$. □

**6.3.14. Lemma.** *Az $A_\delta=\{A_{q^*}(q^*-q)|q,q^*\in C_\delta\}$ halmaz tartalmaz $C_\delta$-beli gömböt.*

*Bizonyítás.* Minden $q^*\in C_\delta$-ra $A_{q^*}$ izomorfizmus, valamint

$$\|A_{q^*}-A_{q^{**}}\|\leq c(D)\|q^*-q^{**}\|_\delta. \tag{6.3.43}$$

Ezért alkalmazható a 6.2.4. lemma, amely szerint $A_\delta$ tartalmaz gömböt. □

## 6.4. Az inverz spektrál probléma véges intervallumon

**6.4.1. Definíció.** *[32] Legyen $\beta \in \mathbb{R}$ és $q, q^* \in L^p(0,\pi)$. $\lambda$ közös sajátértéke a $q$ és a $q^*$ potenciálnak, ha létezik olyan $\alpha$, amellyel $\lambda \in \sigma(q,\alpha,\beta) \cap \sigma(q^*,\alpha,\beta)$.*

A továbbiakban a $\beta = 0$ esetet vizsgáljuk. Azon, hogy a $\lambda_n$ sajátértékek meghatározzák a potenciált, azt fogjuk érteni, hogy nincs két olyan különböző $q, q^*$ potenciál $L^p(0,\pi)$-ben, amelyeknek a $\lambda_n$ számok közös sajátértékei.

**6.4.2. Tétel.** *(Horváth) Legyen $1 \le p \le \infty$, $q \in L^p$, $\lambda \ne 0$, $\lambda_n \not\to -\infty$, $n \ge 1$ különböző valós számok. Legyen $\lambda_n \in \sigma(\alpha_n, 0)$. Akkor a $\lambda_n$ sajátértékek meghatározzák a potenciált $\Leftrightarrow \{1, x, e^{\pm 2i\lambda_n x}\}$ teljes $L^p(-\pi,\pi)$-ben.*

Legyen $v(x,\lambda)$ az (1.1.1) egyenlet

$$v(\pi,\lambda) = 0, \quad v'(\pi,\lambda) = -1 \tag{6.4.1}$$

feltételeket kielégítő megoldása, és legyen $z = \sqrt{\lambda}$. Definiáljuk a következő, a továbbiakban sokszor használt függvényt:

$$F(x,z,z^*) = v'(x,\lambda)v^*(x,\lambda^*) - v(x,\lambda)v^{*\prime}(x,\lambda^*). \tag{6.4.2}$$

Ha $q = q^*$, akkor nyilván $F = 0$.

**6.4.3. Lemma.**

$$F(0,z,z^*) = \int_0^\pi (q^*(x) - q(x) - \lambda^* + \lambda) v(x,\lambda) v^*(x,\lambda^*) \, \mathrm{d}x. \tag{6.4.3}$$

*Ha $\lambda$ és $\lambda^*$ valós, akkor*

$$F(0,z,z^*) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(\alpha, 0, q), \ \lambda^* \in \sigma(\alpha, 0, q^*) \tag{6.4.4}$$

*valamilyen $\alpha \in \mathbb{R}$-rel.*

*Bizonyítás.* (1.1.1) szerint

$$\begin{aligned} F'(x,z,z^*) &= v''(x,\lambda)v^*(x,\lambda^*) - v(x,\lambda)v^{*\prime\prime}(x,\lambda^*) = \\ &= (q(x) - q^*(x) - \lambda + \lambda^*) v(x,\lambda) v^*(x,\lambda^*), \end{aligned}$$

és $F(0) = -\int_0^\pi F'$-ből (6.4.3) már következik. $F$ definíciója szerint $F(0) = 0$ pontosan akkor, ha a $(v(0,\lambda), v'(0,\lambda))$ és a $(v^*(0,\lambda), v^{*\prime}(0,\lambda^*))$ vektorok párhuzamosak, amiből a lemma második állítása is következik. □

**6.4.4. Lemma.** *Tegyük fel, hogy a $q$ és a $q^*$ potenciálnak végtelen sok $\lambda_n$ közös sajátértéke van, ahol $\lambda_n \not\to -\infty$. Ekkor $\int_0^\pi (q^* - q) = 0$.*

*Bizonyítás.* A 6.4.3. lemma szerint $z^2$ pontosan akkor közös sajátérték, ha $\int_0^\pi (q^*(x)-q(x))v(x,\lambda)v^*(x,\lambda)\ \mathrm{d}x = 0$, azaz (6.2.6) szerint

$$\int_0^\pi A_{q^*}\,(q^*(\pi-x)-q(\pi-x))\cos 2xz\ \mathrm{d}x = \int_0^\pi (q^*-q). \tag{6.4.5}$$

Ha $\lambda_n \to +\infty$, akkor ez egy végtelenbe tartó $z_n$ sorozat mentén igaz. Ha nem, akkor a $\lambda_n$ sorozatnak van véges torlódási pontja, és a komplex függvénytan unicitás tétele szerint minden $z$-re $F(0,z,z) = \int_0^\pi (q^*-q)$, azaz speciálisan ez egy $+\infty$-be tartó sorozat mentén is igaz. De akkor a Riemann-lemma szerint $\int_0^\pi (q^*-q) = 0$. □

**6.4.5. Lemma.** *Tegyük fel, hogy a $q$ és a $q^*$ potenciálnak végtelen sok $\lambda_n$ közös sajátértéke van, ahol $\lambda_n \nrightarrow -\infty$. $\lambda \neq 0$ pontosan akkor közös sajátérték, ha*

$$\int_0^\pi A_{q^*}\,(q^*(\pi-x)-q(\pi-x))\cos 2xz\ \mathrm{d}x = 0. \tag{6.4.6}$$

*Bizonyítás.* Az előző lemma szerint $\int_0^\pi (q^*-q) = 0$. A 6.4.3. lemma szerint $z^2$ pontosan akkor közös sajátérték, ha $\int_0^\pi (q^*(x)-q(x))v(x,\lambda)v^*(x,\lambda)\ \mathrm{d}x = 0$, azaz (6.2.6) szerint

$$\int_0^\pi A_{q^*}\,(q^*(\pi-x)-q(\pi-x))\cos 2xz\ \mathrm{d}x = \int_0^\pi (q^*-q) = 0. \tag{6.4.7}$$

Ha pedig (6.4.6) teljesül, akkor (6.2.6) és $\int_0^\pi (q^*-q) = 0$ miatt $\int_0^\pi (q^*(x) - {} - q(x))v(x,\lambda)v^*(x,\lambda)\ \mathrm{d}x = 0$, azaz $z^2$ közös sajátérték. □

**A 6.4.2. tétel bizonyítása.** Elemi úton bizonyítható ([32], Lemma 5.4), hogy az $\{1, x, e^{\pm 2ixz_n} : n \geq 1\}$ rendszer pontosan akkor teljes $L^p(-\pi,\pi)$-ben, ha az $C(\Lambda) = \{1, \cos 2xz_n : n \geq 1\}$ rendszer teljes $L^p(0,\pi)$-ben.

Ha a $C(\Lambda)$ rendszer teljes, akkor az előző lemma szerint $A_{q^*}(q^*(x)-q(x)) = 0$, azaz $q^*(x)-q(x) = 0$. Ha viszont a $C(\Lambda)$ rendszer nem teljes, akkor létezik egy $0 \neq h \in L^p[0,\pi]$, $\int_0^\pi h = 0$ úgy, hogy

$$\int_0^\pi h(x)\cos 2xz_n\ \mathrm{d}x = 0, \tag{6.4.8}$$

és a 6.2.6. következmény szerint elég kis $\gamma$-ra létezik olyan $q^*$, hogy

$$\int_0^\pi A_{q^*}\,(q^*(\pi-x)-q(\pi-x)) = \gamma h(x), \tag{6.4.9}$$

azaz a $\lambda_n$ számok $q$-nak és $q^*$-nak közös sajátértékei. □

## 6.5. Az inverz spektrál probléma a félegyenesen

A félegyenesen adott Schrödinger-operátor $m$-függvénye

$$m(\lambda) = \frac{y'(0,\lambda)}{y(0,\lambda)}, \quad \Im z > 0, \tag{6.5.1}$$

ahol $y$ – a határpont esetben egyértelmű – $L^2$-beli megoldás. Azt mondjuk, hogy $\lambda \in \sigma(\alpha, q)$, ha $y(x,\lambda)$ kielégíti

$$y(0,\lambda)\cos\alpha - y'(0,\lambda)\sin\alpha = 0 \tag{6.5.2}$$

0-ban adott peremfeltételt, azaz, ha $m(\lambda) = \cot\alpha$.

Legyen $m = m(q)$ és $m^* = m(q^*)$ két $m$-függvény, $q, q^* \in L^1(0,\infty)$. Ekkor határpont eset van, a sajátértékek negatívak, és $m$ a nemnegatív féltengely kivételével meromorf. Ha $\lambda$ közös sajátértéke a $q$ és a $q^*$ potenciálnak, akkor $m(\lambda) = m^*(\lambda)$; ha pedig $\lambda$ és $\lambda^*$ ugyanahhoz a spektrumhoz tartoznak, akkor $m(\lambda) = m^*(\lambda^*)$. Azon, hogy a $\lambda_n$ sajátértékek meghatározzák a potenciált, továbbra is azt fogjuk érteni, hogy nincs két olyan különböző $q, q^*$ potenciál az adott függvényosztályban, amelyeknek a $\lambda_n$ számok közös sajátértékei.

**6.5.1. Tétel.** *Legyen $(1+x)q(x) \in L^1(0,\infty)$, $\lambda_n < 0$, $n \geq 1$ különböző valós számok. Legyen*

$$e(\Lambda) = \left\{e^{2ixz_n} | n \geq 1\right\}. \tag{6.5.3}$$

*Ha az $e(\Lambda)$ rendszer teljes $L^1(0,\infty)$-ben, akkor a $\lambda_n$ sajátértékek meghatározzák a potenciált.*

Az $m$-függvény segítségével ezt a problémát úgy fogalmazhatjuk meg, hogy mikor határozzák meg az $m$-függvényt adott $\lambda_n < 0$ helyeken (a sajátértékekben) fölvett értékei. Ez utóbbi feltételt elhagyva arra az általános kérdésre keressük a választ, hogy tetszőlegesen adott helyeken fölvett értékei az $m$-függvényt mikor határozzák meg.

**6.5.2. Tétel.** *Legyen $(1+x)q(x) \in L^1(0,\infty)$, $\Im z_n > 0$, $n \geq 1$ különböző komplex számok. Legyen*

$$e(\Lambda) = \left\{e^{2ixz_n} | n \geq 1\right\}. \tag{6.5.4}$$

*Ha az $e(\Lambda)$ rendszer teljes $L^1(0,\infty)$-ben, akkor az $m$-függvényt meghatározzák a $\lambda_n$ helyeken fölvett értékei.*

*Bizonyítás.* Vezessük be a véges esetben is használt

$$F(x,z) = y'(x,\lambda)y^*(x,\lambda) - y(x,\lambda)y^{*\prime}(x,\lambda) \tag{6.5.5}$$

függvényt.

**6.5.3. Állítás.** *[33]*

$$F(0,z) = \int_0^\infty (q^*(x) - q(x))y(x,\lambda)y^*(x,\lambda)\ \mathrm{d}x. \tag{6.5.6}$$

*Bizonyítás.* A bizonyítás a véges esethez hasonló, felhasználva, hogy $y(x,\lambda)$ ($(1+x)q(x) \notin L^1(0,\infty)$ esetén $\Im z > 0$-tól függően) korlátos. □

A 6.3.5. következmény szerint tehát

$$F(0,z) = \int_0^\infty A_{q^*}(q^*(x) - q(x))e^{2ixz}\,dx. \tag{6.5.7}$$

Tegyük fel, hogy a $q$ és $q^*$ potenciálokhoz tartozó $m$-függvények megegyeznek a $\lambda_n$ helyeken. Ekkor $F(0,\lambda_n) = 0$, vagyis $A_{q^*}(q^* - q)$ merőleges az $e(\Lambda)$ rendszer összes elemére. Mivel $e(\Lambda)$ teljes, $A_{q^*}(q^* - q) = 0$, azaz $q^* = q$. □

**Megjegyzés.** Ha $\limsup_n \lambda_n < 0$, akkor mindkét tételben elegendő feltenni, hogy $q \in L^1$ ([33]).

Felmerülhet a kérdés, hogy az $e(\Lambda)$ rendszer teljessége szükséges feltétele-e a potenciál egyértelműségének. Ha a potenciálról egy kicsivel többet tudunk, nevezetesen $q \in C_\delta$ valamilyen $\delta > 0$-ra, akkor igaz a következő:

**6.5.4. Tétel.** *Legyen $q(x) \in C_\delta$, $\Im z_n > 0$, $n \geq 1$ különböző komplex számok. Legyen*

$$e(\Lambda) = \left\{ e^{2ixz_n} | n \geq 1 \right\}. \tag{6.5.8}$$

*Ekkor az $m$-függvényt pontosan akkor határozzák meg a $\lambda_n$ helyeken fölvett értékei, ha az $e(\Lambda)$ rendszer teljes $C_\delta$-ban.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy az $e(\Lambda)$ rendszer teljes, és a $q$ és $q^*$ potenciálokhoz tartozó $m$-függvényekre $m(\lambda_n) = m^*(\lambda_n)$ teljesül $\forall n$-re. Ekkor $F(0,z_n) = \int_0^\infty A_{q^*}(q^* - q)e^{2ixz_n} = 0$ $\forall n$-re és minden $q^* \in C_\delta$-ra. Mivel $A_{q^*} : C_\delta \to C_\delta$ izomorfizmus és az $e(\Lambda)$ rendszer teljes $C_\delta$-ban, ez csak akkor lehetséges, ha $q^* = q$.

Másodszor tegyük fel, hogy az $e(\Lambda)$ rendszer nem teljes. Ekkor $\exists h \in C_\delta$ úgy, hogy $\int_0^\infty h(x)e^{2ixz_n} = 0$ $\forall n$-re. A 6.3.14. lemma szerint elég kis $\gamma$-ra létezik olyan $q^*$, hogy

$$\int_0^\pi A_{q^*}\left(q^*(\pi - x) - q(\pi - x)\right) = \gamma h(x), \tag{6.5.9}$$

azaz a $\lambda_n$ számok $q$-nak és $q^*$-nak közös sajátértékei. □

A következő, Müntz-típusú tétel egy könnyen ellenőrizhető kritériumot ad az eddig bizonyított tételekhez:

**6.5.5. Tétel.** *Legyenek $z_n$, $n \geq 1$ $\Im z_n \geq 0$ különböző komplex számok. Ha $\sum \frac{\Im z_n}{1+|z_n|^2} = \infty$, akkor az $e(\Lambda) = \{e^{2ixz_n} : z_n \geq 1\}$ rendszer teljes $L^1(0,\infty)$-ben.*

*Bizonyítás.* Ha $e(\Lambda)$ nem teljes, tekintsük a $0 \neq H(z) = \int_0^\infty h(x)e^{2ixz}$ függvényt. Mivel ez korlátos az $\Im z \geq 0$ félsíkon, nullhelyei kielégítik a

$$\sum_{H(z_n)=0} \frac{\Im z_n}{1+|z_n|^2} < \infty \tag{6.5.10}$$

Blaschke-feltételt ([17]), ellentmondásban a tétel feltételeivel. □

**6.5.6. Tétel.** *Legyen* $\Im z_n > 0$, $n \geq 1$ *különböző komplex számok. Ha*

$$\sum \frac{\Im z_n}{1+|z_n|^2} = \infty, \tag{6.5.11}$$

*akkor az* $m$*-függvényt meghatározzák a* $\lambda_n$ *helyeken fölvett értékei. Ha még* $q(x) \in$ $\in C_\delta$ *is teljesül, akkor az* $m$*-függvény meghatározásához*

$$\sum \frac{\Im(2z_n + i\delta)}{1+|2z_n+i\delta|^2} = \infty \tag{6.5.12}$$

*is elegendő.*

*Bizonyítás.* Az első állítás a 6.5.5. tétel és a 6.5.2. tétel egymás utáni alkalmazásából következik; a második állítás pedig abból, hogy $e(\Lambda)$ pontosan akkor teljes $C_\delta$-ban, ha az $\left\{e^{ix(2z_n+i\delta)} | n \geq 1\right\}$ teljes $L^1$-ben. □

# 7. fejezet

# Inverz problémák stabilitása

## 7.1. Potenciál szerinti derivált

A Sturm-Liouville operátorokról szóló bevezető részben azt állítottuk, hogy az $y_1$ és $y_2$ adott kezdeti értékből induló megoldások analitikus függvényei $q$-nak. Egy $f:E\to F$ Banach-terek közötti leképezés $x\in E$-ben Fréchet-differenciálható, ha létezik egy $d_xf$ folytonos lineáris leképezés $E$-ből $F$-be úgy, hogy

$$||f(x+a)-f(x)|| = d_xf(a)+\epsilon(a), \tag{7.1.1}$$

ahol

$$\lim_{a\to 0}\frac{\epsilon(a)}{||a||}=0. \tag{7.1.2}$$

$f$ Gâteaux-differenciálható, ha minden $e\in E$ egységvektorra és $\mu$ valós vagy komplex számra

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{\epsilon(\mu e)}{|\mu|}=0. \tag{7.1.3}$$

Ha az $F$ Banach-tér a komplex számtest, akkor $d_xf$ tekinthető $E^*$ egy elemének, azaz pl. $E=L^1$ esetén a derivált minden $x\in E$ pontban egy $L^\infty$-beli függvény. Ebben az alfejezetben kiszámítjuk a sajátértékek $q$ szerinti Fréchet deriváltját.

**7.1.1. Tétel.** *[42, 56, 66] Ha $q\in L^1(0,\pi)$, akkor*

$$\frac{\partial y_j}{\partial q}(x) = y_j(t)[y_1(t)y_2(x)-y_2(t)y_1(x)]\chi_{(0,x)}(t) \qquad j=1{,}2, \tag{7.1.4}$$

$$\frac{\partial y_j'}{\partial q}(x) = y_j(t)[y_1(t)y_2'(x)-y_2(t)y_1'(x)]\chi_{(0,x)}(t) \qquad j=1{,}2. \tag{7.1.5}$$

**7.1.2. Következmény.**

$$|y_2(x,\lambda,q)-y_2(x,\lambda,q^*)|\le\frac{c(D)}{\lambda}\|q-q^*\|. \tag{7.1.6}$$

**7.1.3. Lemma.** *Legyen* $q \in L_1(0,\pi)$, $\lambda \in \sigma(\alpha,0,q)$. *Akkor*

$$\int_0^\pi y_\alpha^2(x,\lambda)\ \mathrm{d}x = \dot{y}_\alpha(\pi,\lambda)y'_\alpha(\pi,\lambda) - \dot{y}'_\alpha(\pi,\lambda)y_\alpha(\pi,\lambda) \tag{7.1.7}$$

*(ponttal ezúttal a* $\lambda$ *szerinti deriváltat jelöltük).*

*Bizonyítás.* Az (1.1.1) egyenletet $\lambda$ szerint differenciálva

$$-\dot{y}''_\alpha + q(x)\dot{y}_\alpha = y_\alpha + \lambda\dot{y}_\alpha. \tag{7.1.8}$$

Szorozzuk meg ezt az egyenletet $y_\alpha$-val, és vonjuk ki belőle az eredeti egyenlet $\dot{y}_\alpha$-szorosát:

$$y''_\alpha\dot{y}_\alpha - \dot{y}''_\alpha y_\alpha = y_\alpha^2. \tag{7.1.9}$$

Így

$$\int_0^\pi y_\alpha^2(x,\lambda)\ \mathrm{d}x = W[\dot{y}_\alpha, y_\alpha]|_0^\pi = \dot{y}_\alpha(\pi,\lambda)y'_\alpha(\pi,\lambda) - \dot{y}'_\alpha(\pi,\lambda)y_\alpha(\pi,\lambda). \tag{7.1.10}$$

□

**7.1.4. Állítás.** *[42, 56, 66] Legyen* $q \in L_1(0,\pi)$, $\lambda_n = \lambda_n(q) \in \sigma(\alpha,\beta,q)$. *Ekkor* $\lambda_n$ *analitikus függvénye* $q$*-nak, és*

$$\frac{\partial\lambda_n}{\partial q} = g_n^2(t), \tag{7.1.11}$$

*ahol* $g_n$ *a* $\lambda_n$*-hez tartozó* ($L^2$*-ben) normált sajátfüggvény.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $\sin\beta \neq 0$, és legyen $m(\lambda_n,q) = \frac{y'_\alpha(\pi,\lambda_n,q)}{y_\alpha(\pi,\lambda_n,q)}$. (Ha $\sin\beta \neq$ $\neq \frac{\pi}{2}$, akkor hasonlóan bizonyíthatjuk az állítást $m(\lambda_n,q) = \frac{y_\alpha(\pi,\lambda_n,q)}{y'_\alpha(\pi,\lambda_n,q)}$ segítségével.) Ekkor $m(\lambda_n,q)$ valós analitikus függvénye $q$-nak, és $\lambda_n \in \sigma(\alpha,\beta,q) \Leftrightarrow m(\lambda_n) +$ $+\cot\beta = 0$.

$$\frac{\partial m(\lambda_n,q)}{\partial\lambda} = \frac{\dot{y}'_\alpha y_\alpha - \dot{y}_\alpha y'_\alpha}{y_\alpha^2} = \frac{-\int_0^\pi y_\alpha^2}{y_\alpha^2(\pi,\lambda_n,q)} \neq 0, \tag{7.1.12}$$

az előző lemma szerint, ezért az implicit-függvény tétel feltételei teljesülnek, $\lambda_n = \lambda_n(q)$ is valós analitikus, és

$$0 = \frac{\partial m(\lambda_n) + \cot\beta}{\partial q} = \frac{\partial m(\lambda_n,q)}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda_n}{\partial q} + \frac{\partial m(\lambda_n,q)}{\partial q}, \tag{7.1.13}$$

azaz

$$\frac{\partial\lambda_n}{\partial q} = \frac{\frac{\partial}{\partial q}y'_\alpha y_\alpha - \frac{\partial}{\partial q}y_\alpha y'_\alpha}{\int_0^\pi y_\alpha^2} \tag{7.1.14}$$

(ez a képlet már minden $\beta$-ra érvényes). Felhasználva a 7.1.1. tétel eredményét,

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial q} = \frac{y_\alpha(t) y_\alpha(\pi)[y_1(t)y_2'(\pi) - y_2(t)y_1'(\pi)]}{\int_0^\pi y_\alpha^2} - \\ - \frac{y_\alpha(t) y_\alpha'(\pi)[y_1(t)y_2(\pi) - y_2(t)y_1(\pi)]}{\int_0^\pi y_\alpha^2},$$

ez pedig $W(y_1, y_2) = 1$ és $y_\alpha = y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha$ ismeretében a

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial q} = \frac{y_\alpha^2(t)}{\int_0^\pi y_\alpha^2} \tag{7.1.15}$$

alakra hozható. □

## 7.2. Előkészítő becslések véges intervallumon

**7.2.1. Lemma.** *Legyen $\|q(x)\|_1 \le D$. Ekkor*

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \int_0^\pi y_2^2(x, \lambda, q)\ \mathrm{d}x < c(D) \int_0^\pi y_2^2(x, \lambda, 0)\ \mathrm{d}x, \tag{7.2.1}$$

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \int_0^\pi y_2^2(x, \lambda, q)\ \mathrm{d}x > \varepsilon(D) \int_0^\pi y_2^2(x, \lambda, 0)\ \mathrm{d}x, \tag{7.2.2}$$

*valamilyen $q$-tól független $c(D)$ és $\epsilon(D) > 0$ számmal.*

*Bizonyítás.* A (6.2.8) egyenlőségbe $h(x) = 1$-et helyettesítve, és felhasználva, hogy az $A_q : L^\infty \to L^\infty$ operátor mindkét irányba folytonos,

$$\int_0^\pi y_2^2(x, \lambda)\ \mathrm{d}x = \|A_q\|^2 \int_0^\pi \left(\frac{\sin xz}{z}\right)^2\ \mathrm{d}x, \tag{7.2.3}$$

és

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin xz}{z}\right)^2\ \mathrm{d}x \le \|A_q^{-1}\|^2 \int_0^\pi y_2^2(x, \lambda)\ \mathrm{d}x, \tag{7.2.4}$$

ami bizonyítja a lemma állítását. □

**7.2.2. Következmény.** *Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor*

$$|g_2(x, \lambda, q)| < \begin{cases} c(D), & \textit{ha } \lambda \ge 0, \\ c(D)(1 + |z|), & \textit{ha } \lambda < 0. \end{cases} \tag{7.2.5}$$

*Bizonyítás.*

$$|g_2(x, \lambda, q)| = \frac{|y_2(x, \lambda, q)|}{\|y_2(x, \lambda, q)\|_2} \le \frac{c(D)}{\varepsilon(D)} \frac{\|\sin xz\|_\infty}{\|\sin xz\|_2}, \quad x \in [0, \pi], \tag{7.2.6}$$

ez pedig $\lambda \to 0$ és $\lambda \to +\infty$ esetén egyaránt korlátos, míg $\lambda \to -\infty$ esetén $O(|z|)$. □

Legyen $v(x,\lambda)=v_0(x,\lambda)$ az (1.1.1) egyenlet

$$v(\pi,\lambda)=0, \quad v'(\pi,\lambda)=-1 \tag{7.2.7}$$

feltételeket kielégítő megoldása. Definiáljuk $v^*$-ot hasonlóan. Ekkor $v(x,\lambda,q)=$ $=y_2(\pi-x,\lambda,q(\pi-x))$ és $\lambda\geq 0$-ra $\sin xz\leq 1$ miatt

**7.2.3. Következmény.** *Legyen $\lambda\geq\frac{1}{4}$. Ekkor*

$$\frac{\varepsilon(D)}{\lambda}<\int_0^\pi v^2(x,\lambda,q)\ \mathrm{d}x<\frac{c(D)}{\lambda}. \tag{7.2.8}$$

**7.2.4. Tétel.** *Jelölje $\sigma(\alpha,0)$ n. elemét $\lambda_n$. Ekkor $\lambda_n(q+t(p-q))\geq -N^2$, $p,q\in L^1$ és $||p||_1,||q||_1\leq D$ esetén*

$$|\lambda_n(p)-\lambda_n(q)|<c(D)(N+1)||p-q||_1, \tag{7.2.9}$$

*ahol $c(D)$ nem függ $\alpha$-tól.*

*Bizonyítás.*

$$|\lambda_n(p)-\lambda_n(q)|\leq\int_0^1|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_n(q+t(p-q))|\ \mathrm{d}t, \tag{7.2.10}$$

és $g$ korlátját figyelembe véve

$$\begin{aligned}|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_n(q+t(p-q))|=&|\int_0^\pi g^2(x,\lambda_n,q+t(p-q))(p-q)\ \mathrm{d}x|\\ \leq& c(D)(N+1)||p-q||_1,\end{aligned}$$

amiből a tétel állítása már következik. □

**7.2.5. Tétel.** *Jelölje $\sigma(\alpha,0)$ n. elemét $\lambda_n$. Ekkor $\lambda_n(q)\geq\frac{1}{4}$, $p,q\in L^1$ és $||p||_1$, $||q||_1\leq D$ esetén*

$$|\lambda_n(p)-\lambda_n(q)|<c(D)||p-q||_1, \tag{7.2.11}$$

*ahol $c(D)$ nem függ $\alpha$-tól.*

**Megjegyzés.** A tételben elegendő volna kikötni, hogy $\lambda_n(q)$ alulról korlátos. Természetesen a sajátértékek eltérését becslő konstans függ ettől a korláttól.

*Bizonyítás.* Válasszuk $N$-et olyan nagyra, hogy a 7.2.4. tétel becslésében szereplő $c(D)$ konstanssal $|\lambda_n(p)-\lambda_n(q)|<N^2+\frac{1}{4}$ adódjon. Ez megtehető: legyen például $\frac{N^2+\frac{1}{4}}{N+1}>2Dc(D)$. Azt állítjuk, hogy akkor a $(p,q)$ szakasz minden pontján $\lambda_n\geq -N^2$. Tegyük fel, hogy nem ez a helyzet, azaz a $(p,q)$ szakasznak mégis van olyan pontja, ahol $\lambda_n(q+t(p-q))=-N^2$. Legyen $t_0$ az ilyen $t$-k infimuma. A 7.2.4. tételt alkalmazva a $q$ és $q+t_0(p-q)$ potenciálokra, $\lambda_n(q+t_0(p-q))>-N^2$, ellentmondás. Tehát a $(p,q)$ szakasz minden pontján $\lambda_n\geq -N^2$; a 7.2.4. tétel jogosan alkalmazható, és mivel $N$ is csak $D$-től függ, az állítás következik. □

**7.2.6. Következmény.** *Legyen* $\lambda_n \in \sigma(\alpha, 0, q)$ *és legyen* $\lambda_n^*$ $\sigma(\alpha, 0, q^*)$ *megfelelő eleme. Ha* $\lambda_n \geq \frac{1}{4}$, $\lambda^* \geq \frac{1}{4}$, *akkor* $||q||_1, ||q^*||_1 \leq D$ *esetén* $\varepsilon(D) \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_n^*} \leq c(D)$.

*Bizonyítás.*

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_n^*} \leq 1 + \frac{|\lambda_n - \lambda_n^*|}{\lambda_n^*} \leq c(D), \tag{7.2.12}$$

és ugyanígy $\frac{\lambda_n^*}{\lambda_n}$ is korlátos. □

**7.2.7. Lemma.** *Legyen* $z, z^* \geq \frac{1}{2}$, $\lambda = z^2$, $\lambda^* = z^{*2}$. *Ekkor*

$$|v(x, \lambda^*) - v(x, \lambda)| \leq |\lambda^* - \lambda| \frac{c(D)}{(z + z^*)\min(z, z^*)}. \tag{7.2.13}$$

*Bizonyítás.* Az 1.3.11. következmény első állítása szerint

$$v(\pi - x, \lambda) = \frac{\sin xz}{z} + \int_0^x K(x, t) \frac{\sin tz}{z} dt, \tag{7.2.14}$$

ahol $K$ folytonos és $|K(x, t)| \leq c(D)$.

$$\left|\frac{d}{dz}\frac{\sin zx}{z}\right| = \left|\frac{zx\cos zx - \sin zx}{z^2}\right| \leq \frac{zx + 1}{z^2} \leq \frac{2\pi}{z} \tag{7.2.15}$$

miatt

$$\left|\frac{\sin z^* x}{z^*} - \frac{\sin zx}{z}\right| \leq \frac{2\pi}{\min(z, z^*)}|z^* - z| = |\lambda^* - \lambda| \frac{2\pi}{\min(z, z^*)(z^* + z)}, \tag{7.2.16}$$

amiből (7.2.14)-et felhasználva (7.2.13)-at kapjuk. □

## 7.3. A stabilitás ekvivalens feltétele véges intervallumon

A 6.4.2. tétel megválaszolja azt a kérdést, hogy egy sajátértékekből álló rendszer mikor elegendő a potenciál meghatározásához. Ebben a szakaszban egy olyan tételt mondunk ki, ami megengedi, hogy az általunk ismert sajátértékek különbözők legyenek, és arra nézve ad szükséges és elégséges feltételt, hogy a potenciálok eltérése becsülhető-e az ismert sajátértékek eltéréseinek segítségével. Speciálisan arra is, hogy mikor függ a potenciál folytonosan az őt meghatározó sajátértékektől.

Tekintsük a

$$\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi_n = \cos 2\sqrt{\lambda_n}x : n \geq 1, \tag{7.3.1}$$

függvényrendszert és a

$$b \mapsto (\langle b, \varphi_n \rangle) \qquad (n \geq 1) \tag{7.3.2}$$

$L_0^r \to l_0^s$ leképezést ($1 \leq r, s \leq \infty$). Mint eddig is, $L_0^r = \{h \in L^r : \int h = 0\}$. A $l^s$ sorozattér elemeit 0-tól indexeljük, míg $l_0^s \subset l^s$ jelentse azt, hogy az elemeket egytől indexeljük, vagy, ami ezzel ekvivalens, a nulladik elem zérus. Általánosságban a stabilitás attól függ, hogy a (7.3.2)-ben definiált leképezés inverze korlátos-e.

**7.3.1. Tétel.** *Legyen* $q, q^* \in L^1$, $\|q\|_1, \|q^*\|_1 \leq D$, *valamilyen* $\alpha_n$ *számokkal pedig* $\frac{1}{4} \leq \lambda_n \in \sigma(\alpha_n, 0, q)$, $\frac{1}{4} \leq \lambda_n^* \in \sigma(\alpha_n, 0, q^*)$ $(n \geq 1)$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ *és* $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n^* - - \lambda_n| = 0$. *Tekintsük a (7.3.2)-ben definiált* $L_0^r \to l_0^s$ *leképezést* $(1 \leq r, s \leq \infty)$. *Ha ez a leképezés invertálható, és az inverz normája* $C$, *akkor*

$$\|q^* - q\|_r \leq c(D)C\left(\sum_n |\lambda_n - \lambda_n^*|^s\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{7.3.3}$$

*Ha az inverz nem korlátos, akkor minden* $q$ *potenciálhoz és* $U > 0$, $M > 0$ *számhoz van olyan* $q^*$ *potenciál, amelyre* $\|q - q^*\|_r \leq U$ *és*

$$\|q - q^*\|_r > M\left(\sum_n |\lambda_n - \lambda_n^*|^s\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{7.3.4}$$

**Megjegyzés.** A (7.3.3) becslés mutatja, hogy nincs két különböző $q$ potenciál ugyanazokkal a $\lambda_n \in \sigma(\alpha_n, 0, q)$ sajátértékekkel. A 6.4.2. tétel bizonyítása során láttuk, hogy a (7.3.1) rendszer teljessége a szükséges és elégséges feltétel ahhoz, hogy a sajátértékek meghatározzák $q$-t. A teljesség azzal ekvivalens, hogy a $h \mapsto (\langle h, \varphi_n \rangle)$ leképezés injektív. A stabilitáshoz az is szükséges, hogy az inverz folytonos legyen.

A bizonyításhoz szükségünk lesz az alábbi becslésre:

**7.3.2. Lemma.** $\|q\|_p, \|q^*\|_p \leq D$ *esetén*

$$\left|\int_0^\pi (q^*(x) - q(x))v(x,\lambda_n)v^*(x,\lambda_n)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{c(D)}{\lambda_n}|\lambda_n - \lambda_n^*|, \tag{7.3.5}$$

*míg elegendően kis* $U = \|q - q^*\|_p$ *esetén*

$$\left|\int_0^\pi (q^*(x) - q(x))v(x,\lambda_n)v^*(x,\lambda_n)\,\mathrm{d}x\right| \geq \frac{c(D,U)}{\lambda_n}|\lambda_n - \lambda_n^*|. \tag{7.3.6}$$

*Bizonyítás.*

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi (q^*(x) - q(x))v(x,\lambda_n)v^*(x,\lambda_n)\,\mathrm{d}x = \\
&\qquad = \int_0^\pi (q^*(x) - q(x))v(x,\lambda_n)[v^*(x,\lambda_n) - v^*(x,\lambda_n^*)]\,\mathrm{d}x + \\
&\qquad\quad + (\lambda_n - \lambda_n^*)\int_0^\pi v(x,\lambda_n)[v^*(x,\lambda_n^*) - v^*(x,\lambda_n)]\,\mathrm{d}x + \\
&\qquad\quad + (\lambda_n - \lambda_n^*)\int_0^\pi v(x,\lambda_n)[v^*(x,\lambda_n) - v(x,\lambda_n)]\,\mathrm{d}x + \\
&\qquad\quad + (\lambda_n - \lambda_n^*)\int_0^\pi v^2(x,\lambda_n)\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

Külön-külön becsülünk meg minden tagot. $z_n \geq \frac{1}{2}$ és $z_n^* \geq \frac{1}{2}$ miatt a nevezőből el lehet hagyni bármelyiket; a 7.2.6. lemma szerint pedig $z_n$ és $z_n^*$ közül bármelyikkel oszthatunk, az ugyanarra a becslésre vezet.

A 7.2.7. lemma és $zv(x, \lambda)$ korlátossága miatt

$$|I_1| \leq \frac{c(D)}{\lambda_n}|\lambda_n - \lambda_n^*| \|q^*(x) - q(x)\|_1 \leq \frac{c(D)}{\lambda_n}|\lambda_n - \lambda_n^*| \|q^*(x) - q(x)\|_p. \tag{7.3.7}$$

Ugyanezért és a 7.2.5. tétel miatt

$$|I_2| \leq \frac{c(D)}{\lambda_n}|\lambda_n - \lambda_n^*|^2 \leq \frac{c(D)}{\lambda_n}|\lambda_n - \lambda_n^*| \|q^*(x) - q(x)\|_p. \tag{7.3.8}$$

A 7.1.2. következmény és ugyancsak $zv(x, \lambda)$ korlátossága miatt

$$|I_3| \leq \frac{c(D)}{\lambda_n}|\lambda_n - \lambda_n^*|^2 \leq \frac{c(D)}{\lambda_n}|\lambda_n - \lambda_n^*| \|q^*(x) - q(x)\|_p. \tag{7.3.9}$$

Mivel pedig a 7.2.3. következmény szerint $\|zv(x, \lambda)\|_2$ alulról és felülről is korlátos,

$$\frac{c(D)}{\lambda_n}|\lambda_n - \lambda_n^*| \leq |I_4| \leq \frac{c(D)}{\lambda_n}|\lambda_n - \lambda_n^*|, \tag{7.3.10}$$

amiből a lemmában megfogalmazott becslés következik. □

**A 7.3.1. tétel bizonyítása.**

A Riemann-lemma szerint $\int_0^\pi A_{q^*}\,(q^*(\pi - x) - q(\pi - x)) \cos 2z_n x \; \mathrm{d}x \to 0$, ezért $\int_0^\pi (q^* - q) = 0$ és

$$\begin{aligned} \int_0^\pi A_{q^*}\,(q^*(\pi - x) - q(\pi - x)) \cos 2z_n x \; \mathrm{d}x = \\ = -2z_n^2 \int_0^\pi (q^*(x) - q(x)) v(x, \lambda_n) v^*(x, \lambda_n) \; \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{7.3.11}$$

(6.2.7) szerint $A_{q^*}\,(q^*(\pi - x) - q(\pi - x)) \in L_0^1$, ezért ha (7.3.2) inverze folytonos, akkor

$$\begin{aligned} \|q - q^*\|_r \leq & c(D) \|A_{q^*}\,(q^*(\pi - x) - q(\pi - x))\,\|_r \leq \\ \leq & c(D) C \left( \sum_n |\int_0^\pi A_{q^*}\,(q^*(\pi - x) - q(\pi - x)) \cos 2\sqrt{\lambda_n} x \; \mathrm{d}x|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \\ \leq & c(D) C \left( \sum_n |\lambda_n - \lambda_n^*|^s \right)^{\frac{1}{s}}. \end{aligned} \tag{7.3.12}$$

Ha azonban a (7.3.2) leképezés inverze nem folytonos, akkor tetszőlegesen nagy adott $M$-hez létezik $h \in L_0^r$-t úgy, hogy

$$\|h\|_r \geq M \left( \sum_n |\int_0^\pi h(x) \cos 2\sqrt{\lambda_n} x \; \mathrm{d}x|^s \right)^{\frac{1}{s}} \tag{7.3.13}$$

teljesül. A 6.2.6. következmény szerint elég kis $\gamma$-ra létezik olyan $q^*$, hogy

$$\int_0^\pi A_{q^*}\left(q^*(\pi-x)-q(\pi-x)\right)\,\mathrm{d}x=\gamma h(x). \tag{7.3.14}$$

Válasszuk $\gamma$-t olyan kicsire, hogy megfelelő $U$-val $\|q-q^*\|_r\le U$ is biztosan teljesüljön (például legyen $\gamma\le\frac{U}{\|A_{q^*}^{-1}\|\|h\|_r}$). Ekkor

$$\begin{aligned}\|q-q^*\|_r \ge& c(D)\|A_{q^*}\left(q^*(\pi-x)-q(\pi-x)\right)\|_r\ge\\ \ge& c(D)M\left(\sum_n\left|\int_0^\pi A_{q^*}\left(q^*(\pi-x)-q(\pi-x)\right)\cos 2\sqrt{\lambda_n}x\,\mathrm{d}x\right|^s\right)^{\frac{1}{s}}\ge\\ \ge& c(D,U)M\left(\sum_n|\lambda_n-\lambda_n^*|^s\right)^{\frac{1}{s}}.\end{aligned} \tag{7.3.15}$$

$\square$

## 7.4. Tételek a stabilitásról véges intervallumon

Legyen $1\le p\le\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $L_0^p$ jelölje $L^p$-nek azt az alterét, ahol $\int h=0$. A $l^s$ sorozattér elemeit 0-tól indexeljük, míg $l_0^s$ jelentse ugyanazt, mint az előző szakaszban. Mint eddig is, $q,q^*\in L^1$, $\|q\|_1,\|q^*\|_1\le D$ és $c(D)$ egy csak $D$-től függő konstans. Minden tételben feltesszük (és ezután külön nem is említjük), hogy $\|q\|_1,\|q^*\|_1\le D$, tetszőleges $\alpha_n$ számokkal $\frac{1}{4}\le\lambda_n\in\sigma(\alpha_n,0,q)$, $\frac{1}{4}\le\lambda_n^*\in\sigma(\alpha_n,0,q^*)$ $(n\ge1)$, $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$ és $\lim_{n\to\infty}|{\lambda^*}_n-\lambda_n|=0$.

Néha nem tesszük fel, hogy egy függvény $L^p$-beli, de becsüljük a $p$-normáját. Ezt úgy értjük, hogy ha a norma véges, akkor a függvény $L^p$-beli, míg ha a normát definiáló kifejezés végtelen is lehet, akkor a függvény nem feltétlenül tartozik $L^p$-hez.

Emlékeztetünk arra, hogy a $(\psi_n,\varphi_n)$ rendszer egy *keret* (frame) a $B$ Banach térben, ha $\psi_n\in B$, $\varphi_n\in B^*$, minden $b\in B$-re az

$$Fb=\sum_n\langle b,\varphi_n\rangle\psi_n \tag{7.4.1}$$

sor normában konvergál és $F$ – az ún. frame operátor – $B$-nek korlátos bijekciója. A (7.3.2) leképezés inverze ilyenkor

$$(c_n)\mapsto\sum_n c_nF^{-1}\psi_n\qquad(n\ge1). \tag{7.4.2}$$

Egy $H$ Hilbert térben $(\varphi_n,\varphi_n)$ pontosan akkor keret, ha léteznek olyan $0<$ $<m,M<\infty$ konstansok, hogy

$$m\|h\|^2\le\sum|\langle h,\varphi_n\rangle|^2\le M\|h\|^2\quad h\in H, \tag{7.4.3}$$

és ekkor

$$m = \frac{1}{\|F^{-1}\|^2\|F\|}, \qquad M = \|F\|, \tag{7.4.4}$$

ahol $F$ a frame operátor. A rövidség kedvéért ilyenkor azt mondjuk, hogy $\varphi_n$ keret $H$-ban. A $\varphi_n$ rendszer *Riesz bázis* a $H$ Hilbert térben, ha egy ortonormált bázis izomorf képe. Ha $\varphi_n$ Riesz bázis, akkor $(\varphi_n, \varphi_n)$ keret $H$-ban, azaz minden Riesz bázis egyben keret is. Az alábbi tételekben azt tesszük fel, hogy a (7.3.1)-ben definiált függvényekkel $\varphi_n$ $(n \geq 0)$ keret az $L^2(0,\pi)$ térben.

**7.4.1. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $\varphi_n$ rendszer keret $L^2(0,\pi)$-ben, és frame operátora $F$. Ha $1 \leq p \leq 2$, akkor van olyan $U > 0$, amelyre $\|q^* - q\|_1 \leq U$ esetén*

$$\left(\sum_n |\lambda_n - \lambda_n^*|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq c(D,U)\|F\|^{\frac{1}{p'}}\|q^* - q\|_p. \tag{7.4.5}$$

*Bizonyítás.* A

$$h \mapsto (\langle h, \varphi_n\rangle) \tag{7.4.6}$$

lineáris operátor normája $L^1$-ből $l^\infty$-be legfeljebb 1, míg $L^2$-ből $l^2$-be a $\varphi_n$ rendszer keret tulajdonsága miatt legfeljebb $\|F\|^{\frac{1}{2}}$. Ezért Riesz Marcell tételéből [59] következik, hogy az operátor normája $L^p$-ből $l^{p'}$-be legfeljebb $\|F\|^{\frac{1}{p'}}$, ha $1 \leq p \leq 2$. Így

$$\begin{aligned}
\|q - q^*\|_p &\geq \frac{1}{c(D)}\|A_{q^*}\left(q^*(\pi - x) - q(\pi - x)\right)\|_p \geq \\
&\geq \frac{\|F\|^{-\frac{1}{p'}}}{c(D)}\left(\sum_n \left|\int_0^\pi A_{q^*}\left(q^*(\pi - x) - q(\pi - x)\right)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\geq \frac{\|F\|^{-\frac{1}{p'}}}{c(D,U)}\left(\sum_n |\lambda_n - \lambda_n^*|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned} \tag{7.4.7}$$

□

**7.4.2. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $\varphi_n$ rendszer keret $L^2(0,\pi)$-ben, frame operátora pedig $F$. Ha $1 < p < 2$, akkor semmilyen $U > 0$-ra nem létezik olyan $C$ konstans, hogy $\|q^* - q\|_p \leq U$ esetén*

$$\|q^* - q\|_p \leq C\left(\sum_n |\lambda_n - \lambda_n^*|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{7.4.8}$$

*Bizonyítás.* Legyen $1 \leq p \leq 2$ és $U > 0$ adott, és tegyük fel, hogy az állítással ellentétben létezik olyan $C$ konstans, hogy minden $\|q^* - q\|_p \leq U$-ra

$$\|q^* - q\|_p \leq C\left(\sum_n |\lambda_n - \lambda_n^*|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{7.4.9}$$

Feltehető, hogy $U$ olyan kicsi, hogy alkalmazhatjuk a 7.3.2. lemmát. Ekkor

$$\|A_{q^*}\left(q^*(\pi-x)-q(\pi-x)\right)\|_p \leq$$
$$\leq c(D,U)C\left(\sum_n |\int_0^\pi A_{q^*}\left(q^*(\pi-x)-q(\pi-x)\right)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (7.4.10)$$

Eszerint a

$$h \mapsto (\langle h, \varphi_n\rangle) \qquad (n \geq 0) \quad (7.4.11)$$

$L_0^p \to l^{p'}$ leképezés inverze folytonos. Akkor viszont (7.4.11) értékkészlete nemcsak sűrű, hanem zárt is $l_0^{p'}$-ben, azaz az egész $l_0^{p'}$. Ezért (7.4.11) $L^p$-t $l^{p'}$-re képezi. Azonban, mint láttuk, ez az operátor korlátos mint $L^1 \to l^\infty$ és mint $L^2 \to l^2$ leképezés, ezért kielégíti [59] 3.15. tételének feltételeit. Ez a tétel pedig – a Marcinkiewicz interpolációs tétel egy élesebb változata – azt állítja, hogy egy ilyen operátor $L^p$-t az $l^{p'}$-nél szigorúan kisebb $l(p,p')$ térbe képezi (a definíciót lásd szintén [59]-ben). □

Ha a $(\psi_n, \varphi_n)$ rendszer keret a $B$ Banach térben, akkor $(F^{-1}\psi_n, F^{-1*}\varphi_n)$ az ún. *inverz keret*, amelynek frame operátora $F^{-1}$. Hilbert térben tetszőleges $\varphi_n$ rendszer frame operátora önadjungált. Jelöljük az inverz keret elemeit $\tilde{\varphi}_n$-mal. Ha $\varphi_n$ még Riesz bázis is $H$-ban, akkor $\tilde{\varphi}_n$ a biortogonális rendszere.

**7.4.3. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $\varphi_n$ rendszer keret $L^2(0,\pi)$-ben, frame operátora pedig $F$. Ekkor*

$$\|q^*-q\|_2^2 \leq c(D)\|F^{-1}\|^2\|F\|\sum_n |\lambda_n-\lambda_n^*|^2. \quad (7.4.12)$$

*Bizonyítás.* A (7.3.1) rendszer keret tulajdonsága miatt (7.3.2) inverzének, mint $l_0^2$ to $L_0^2$ leképezésnek a normája legfeljebb $\|F^{-1}\|\|F\|^{\frac{1}{2}}$. Ezért az állítás következik a 7.3.1. tételből. □

**7.4.4. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $\varphi_n$ rendszer keret $L^2(0,\pi)$-ben, frame operátora $F$, és tegyük fel, hogy létezik olyan $C$ konstans, hogy az inverz keret elemeire*

$$\|F^{-1}\varphi_n\|_\infty \leq C \qquad (n \geq 1). \quad (7.4.13)$$

*Akkor $1 \leq p \leq 2$ esetén*

$$\|q^*-q\|_{p'} \leq c(D)\left(C^{p'-2}\|F^{-1}\|^2\|F\|\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_n |\lambda_n-\lambda_n^*|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (7.4.14)$$

*Bizonyítás.* A (7.4.13) feltétel miatt (7.3.2) inverze (a (7.4.2)-ben megadott leképezés, $\psi_n = \varphi_n$-nel) $l_0^1$-ből $L_0^\infty$-be is korlátos, ezért az állítás következik a Riesz Marcell tételből. □

**7.4.5. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $\varphi_n$ rendszer keret $L^2(0,\pi)$-ben, frame operátora $F$, és $\sum_n |\lambda_n - \lambda_n^*|$ véges. Ekkor $p' \geq 2$ $\frac{\|q^*-q\|_{p'}}{\sum_n |\lambda_n - \lambda_n^*|}$ pontosan akkor korlátos, ha létezik olyan $r \geq p'$ szám és olyan $C$ konstans, hogy az inverz keret elemeire*

$$\|\tilde{\varphi}_n\|_r \leq C \qquad (n \geq 1). \tag{7.4.15}$$

*Ez esetben*

$$\|q^* - q\|_{p'} \leq c(D) C \sum_n |\lambda_n - \lambda_n^*|. \tag{7.4.16}$$

*Bizonyítás.* A (7.4.15) feltétel azzal ekvivalens, hogy $\tilde{\varphi}_n$ korlátos $L^{p'}$-ben, ami éppen a (7.3.2) $l_0^1 \to L_0^{p'}$ leképezés inverzének a folytonosságát jelenti, így a 7.3.1. tételből következik az állítás. □

Tekintsük az

$$e(\Lambda) = \{1, e^{\pm 2i\sqrt{\lambda_n}x} : n \geq 1\} \tag{7.4.17}$$

rendszert. Egyszerűen belátató (lásd később a 7.4.10. lemmát), hogy ha $e(\Lambda)$ keret (Riesz bázis) $L_2(-\pi,\pi)$-ben, akkor a (7.3.1) rendszer is keret (Riesz bázis) $L^2(0,\pi)$-ben, ekvivalens konstansokkal. Így $p = 2$-re a 7.4.1. és a 7.4.3. tétel spciális eseteként a következőt kapjuk:

**7.4.6. Tétel.** *Legyen (7.4.17) keret $L_2(-\pi,\pi)$-ben az $F$ frame operátorral. Ekkor egyrészt*

$$\|q^* - q\|_2^2 \leq C(D)\|F^{-1}\|^2 \|F\| \sum |{\lambda^*}_n - \lambda_n|^2, \tag{7.4.18}$$

*másrészt létezik olyan $U = U(D) > 0$, hogy $\|q^* - q\|_2 \leq U$ esetén*

$$\sum |{\lambda^*}_n - \lambda_n|^2 \leq c(D,U)\|F\| \|q^* - q\|_2^2. \tag{7.4.19}$$

**Megjegyzés.** Ha a (7.3.1) rendszer Riesz bázis, akkor a $\lambda_n$, ${\lambda^*}_n \geq \frac{1}{4}$ megszorítás nem lényeges: ha $q$-hoz és $q^*$-hoz egy konstanst hozzáadunk, $\lambda_n$ és ${\lambda^*}_n$ ugyanezzel a konstanssal tolódnak el. Az eltolás nem befolyásolja az $e(\Lambda)$ rendszer Riesz bázis tulajdonságát (lásd Young [64]).

**Megjegyzés.** Hruscev, Nikolskii és Pavlov [38] többek között az alábbi Riesz bázis tesztet bizonyították: ha $\delta_n \in \mathbb{C}$, $|n| \to \infty$ esetén $\delta_n \to 0$, és $(n+\delta_n)$ szeparált, azaz $\inf_{n \neq m} |(n+\delta_n) - (m+\delta_m)| > 0$, akkor az $\{e^{i(n+\delta_n)x}\}$ rendszer Riesz bázis $L_2(-\pi,\pi)$-ben. Legyen tehát $\{\lambda_{1,n} : n \geq 1\} = \sigma(\pi/2, 0)$, $\{\lambda_{2,n} : n \geq 1\} = \sigma(0,0)$ és tartalmazza a $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ sorozat a két spektrum unióját. Tudjuk, hogy $2\sqrt{\lambda_{1,n}} = 2n - 1 + \mathbf{o}(1)$ és $2\sqrt{\lambda_{2,n}} = 2n + \mathbf{o}(1)$ [48]. Miután a spektrumoknak nincs közös része, a 0, $\pm\sqrt{\lambda_n}$ kitevők szeparáltak, és egy $\mathbf{o}(1)$-perturbációját adják $\mathbb{Z}$-nek. Ezért 7.4.17) Riesz bázis $L_2(-\pi,\pi)$-ben, és a következő állítás a 7.4.6 tétel speciális esete:

**7.4.7. Következmény.** *Legyen* $\{\lambda_n : n\geq 1\} = \sigma(\pi/2,0,q)\cup\sigma(0,0,q)$ *és* $\{\lambda_n^* : n\geq \geq 1\} = \sigma(\pi/2,0,q^*)\cup\sigma(0,0,q^*)$. *Ekkor teljesül (7.4.18).*

**Megjegyzés.** (7.4.18)-hoz hasonló becslést igazolt Hald [26], de csak a 0 potenciál egy kis környezetében.

A 7.4.4 és a 7.4.2 tétel segítségével megfigyelhetjük az alábbit:

**7.4.8. Következmény.** *Legyen* $1<p\leq\infty$, $\{\lambda_n : n\geq 1\} = \sigma(\pi/2,0,q)\cup\sigma(0,0,q)$, $\{\lambda_n^* : n\geq 1\} = \sigma(\pi/2,0,q^*)\cup\sigma(0,0,q^*)$. *Ekkor a*

$$\frac{\|q-q^*\|_p}{(\sum_n |\lambda_n-\lambda_n^*|^{p'})^{\frac{1}{p'}}} \tag{7.4.20}$$

*tört* $p\geq 2$ *esetén korlátos, míg* $p<2$ *esetén* $q$ *bármely környezetében tetszőlegesen nagy lehet.*

Végül megmutatjuk, hogy eredményeinkből levezethető egy hasonló nagyságrendű becslés, mint amit Marletta and Weikard [54] bizonyítottak:

**7.4.9. Tétel.** *Legyen* $q, q^*\in L^2(!)$, $\|q\|_2, \|q^*\|_2\leq D$, *és legyen adott* $\alpha_n$ *számokkal* $\frac{1}{4}\leq\lambda_n\in\sigma(\alpha_n,0,q)$, $\frac{1}{4}\leq\lambda_n^*\in\sigma(\alpha_n,0,q^*)$, $|\lambda_n-\lambda_n^*|\to 0$. *Tegyük fel, hogy adott* $\varepsilon>0$*-ra és* $1\leq n\leq N$*-re* $|\lambda_n-\lambda_n^*|<\varepsilon$. *Ha a (7.4.17) rendszer keret* $L^2(-\pi,\pi)$*-ben és az inverz keret elemeinek* $L^\infty$*-normája legfeljebb* $C$, *akkor található olyan* $U=U(D)>0$, *hogy ha* $\|q^*-q\|_2\leq U$, *akkor*

$$\sup_{0\leq x\leq\pi}\left|\int_0^x (q^*-q)\right|\leq Cc(D)\varepsilon\sum_{n=1}^N\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}+Cc(D,U)\|F\|^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=N+1}\frac{1}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.4.21}$$

**Megjegyzés.** Ha például adott az első $N$ Dirichlet sajátérték és az első $N$ Dirichlet-Neumann sajátérték (azaz $2N$ sajátértékpár adott, és $\sqrt{\lambda_n}=\frac{1}{2}n+ +\mathbf{o}(1)$), be lehetne bizonyítani, hogy $\|F\|$ és $C$ csak $D$-től függ. Ezért $\|F\|$ és $C$ beolvasztható $c(D)$-be, és a $c(D)\varepsilon\log N+c(D,U)N^{-\frac{1}{2}}$ becslést kapjuk.

A bizonyításhoz előrebocsátjuk a következő két lemmát:

**7.4.10. Lemma.** *[37] Tegyük fel, hogy a (7.4.17) rendszer keret (Riesz bázis)* $L^2[-\pi,\pi]$*-ben. Ekkor mind (7.3.1), mind pedig az*

$$S(\Lambda)=\{\sin 2\sqrt{\lambda_n}x : n\geq 1\} \tag{7.4.22}$$

*rendszer keret (Riesz bázis)* $L^2[0,\pi]$*-ben. Ha (7.4.17) inverz keretének elemei kisebbek, mint* $C$ *valamilyen* $p$*-normában, akkor (7.3.1) és (7.4.22) inverz keretének elemei kisebbek, mint* $2C$ *ugyanabban a normában.*

*Bizonyítás.* Jelölje $e(\Lambda)$, $C(\Lambda)$ és $S(\Lambda)$ elemeit rendre $e_n$ ($n\in\mathbb{Z}$), $\varphi_n$ ($n\geq 0$) és $s_n$ ($n\geq 1$). Legyenek a (feltételezett) frame operátorok $F_e$, $F_c$ és $F_s$. A $h\in \in L^2[0,\pi]$ függvény páros és páratlan kiterjesztését jelölje $h_e$ és $h_o$, azaz legyen $h_e(x)=h(|x|)$, $h_o(x)=\operatorname{sgn}(x)h(|x|)$. Ekkor

$$F_e(h_e)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle h_e,e_n\rangle e_n=4\left(\sum_{n\geq 0}\langle h,\varphi_n\rangle\varphi_n\right)_e=4(F_ch)_e,$$

$$F_e(h_o) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle h_o, e_n\rangle e_n = 4\left(\sum_{n\geq 1}\langle h, s_n\rangle s_n\right)_o = 4(F_s h)_o,$$

ezért

$$F_e^{-1}(h_e) = \frac{1}{4}(F_c^{-1}h)_e, \quad F_e^{-1}(h_o) = \frac{1}{4}(F_s^{-1}h)_o.$$

Emiatt $F_c$ és $F_s$ frame operátor,

$$\|F_c\| \leq \frac{1}{4}\|F_e\|, \quad \|F_c^{-1}\| \leq 4\|F_e^{-1}\|,$$
$$\|F_s\| \leq \frac{1}{4}\|F_e\|, \quad \|F_s^{-1}\| \leq 4\|F_e^{-1}\|.$$

Sőt,

$$\begin{aligned}\|F_c^{-1}\varphi_n\|_p &= \frac{1}{2}\|\left(F_c^{-1}\varphi_n\right)_e\|_p = 2\|F_e^{-1}(\varphi_n)_e\|_p \\ &\leq \|F_e^{-1}e_n + F_e^{-1}e_{-n}\|_p \leq 2C,\end{aligned}$$

és hasonlóképpen,

$$\|F_s^{-1}s_n\|_p \leq 2C.$$

□

**7.4.11. Lemma.** *Legyen* $h \in L_0^1[0,\pi]$. *Ekkor*

$$\frac{1}{c(D)}\sup_{x\in[0,\pi]}|\int_0^x h| \leq \sup_{x\in[0,\pi]}|\int_0^x A_{q^*}h| \leq c(D)\sup_{x\in[0,\pi]}|\int_0^x h|. \tag{7.4.23}$$

*Bizonyítás.* Jelölje $\int_0^x h$-et $H(x)$. (6.2.7) miatt $A_{q^*}h \in L_0^1$, így

$$\begin{aligned}\int_0^{t_0} A_{q^*}h &= H(t_0) - \int_{t_0}^{\pi}\int_x^{\pi} M(x,t)h(t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x = \\ &= H(t_0) + \int_{t_0}^{\pi} M(x,x)H(x)\ \mathrm{d}x + \\ &+ \int_{t_0}^{\pi}\int_x^{\pi} M_t(x,t)H(t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x = (I+B_1+B_2)H(t_0).\end{aligned} \tag{7.4.24}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\|B_j\|_{C[0,\pi]\to C[0,\pi]} \leq \frac{c(D)^n}{(jn)!}, \tag{7.4.25}$$

így a $(I+B_1+B_2)^{-1} = \sum_n(-B_1-B_2)^n$ Neumann sor konvergens, összege legfeljebb $c(D)$. □

**A 7.4.9. tétel bizonyítása**.

$$\int_0^\pi \int_0^x A_{q^*}(q^*-q)\cdot \sin 2\sqrt{\lambda_n}x \; \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^\pi A_{q^*}(q^*(x)-q(x))\frac{\cos 2\sqrt{\lambda_n}x}{2\sqrt{\lambda_n}} \; \mathrm{d}x \le \frac{c(D)}{\sqrt{\lambda_n}}|\lambda_n-\lambda_n^*|.$$

Mivel (7.4.22) keret és az inverz keret elemei egyenletesen korlátosak,

$$\begin{aligned}
|\int_0^x A_{q^*}(q^*-q)| &\le 2C\sum_n |\int_0^\pi \int_0^x A_{q^*}(q^*-q)\cdot \sin 2\sqrt{\lambda_n}x \; \mathrm{d}x| \le \\
&\le C\sum_n \frac{c(D)}{\sqrt{\lambda_n}}|\lambda_n-\lambda_n^*| \\
&\le Cc(D)\varepsilon \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} + \\
&+ Cc(D)\left(\sum_{n=N+1}\frac{1}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_n |\lambda_n-\lambda_n^*|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le Cc(D)\varepsilon \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} + Cc(D,U)\|F\|^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=N+1}\frac{1}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

□

## 7.5. A véges intervallum és a félegyenes kapcsolata

**7.5.1. Tétel.** *[19] Legyen $q \in L^1(0,\infty)$; $L$ a $[0,\infty)$ félegyenesen értelmezett Schrödinger operátor a 0-ban adott peremfeltételekkel. Legyen $L_b$ a $[0,b]$ intervallumon értelmezett Schrödinger operátor a 0-ban ugyanazzal a peremfeltétellel, $b$-ben Dirichlet peremfeltételekkel. Ha $b\to\infty$, akkor*

**(i)** *Ha $L$-nek nincs negatív sajátértéke, akkor minden rögzített $n$-re*

$$\lambda_n(L_b)\to 0. \tag{7.5.1}$$

**(ii)** *Ha $L$-nek pontosan egy negatív sajátértéke van, akkor*

$$\lambda_0(L_b)\to\lambda_0(L), \quad \lambda_n(L_b)\to 0, \quad n\ge 1. \tag{7.5.2}$$

**(iii)** *Ha $L$-nek véges sok negatív sajátértéke van, $\lambda_0,\dots\lambda_k$, akkor*

$$\lambda_n(L_b)\to\lambda_n(L), \quad n\le k, \quad \lambda_n(L_b)\to 0, \quad n>k. \tag{7.5.3}$$

**(iv)** *Ha L-nek megszámlálható sok negatív sajátértéke van, akkor*

$$\lambda_n(L_b) \to \lambda_n(L). \tag{7.5.4}$$

Ha a $[0,\pi]$ intervallumon kimondott 7.3.1. tételt erősebb formában is ki tudnánk mondani, nevezetesen, ha el tudnánk hagyni a $\lambda \geq \frac{1}{4}$ feltételt és a bizonyítás során használt $c(D)$ konstansokat függetlenné tudnánk tenni az intervallum $\pi$ hosszától, akkor ez az erősebb tétel megfelelő módosításokkal automatikusan igaz lenne a félegyenesen is. Ilyen tételt azonban az eddigi eszközeinkkel nehéz lenne bizonyítani, ezért a félegyenes esetében más utat, a közvetlen, véges esettől független bizonyítást választjuk.

## 7.6. Potenciál szerinti derivált és becslések a félegyenesen

A félegyenesen tekintett Schrödinger-operátor esetében többnyire föltesszük, hogy $xq(x)$ is $L^1(0,\infty)$-beli.

**7.6.1. Tétel.** *Legyen $\|q\|, \|q^*\| \leq D$, $\Im z > 0$. Ekkor*

$$|y(x,\lambda,q) - y(x,\lambda,q^*)| \leq c(D)||q-q^*||. \tag{7.6.1}$$

*Bizonyítás.* Emlékeztetünk rá, hogy

$$y(x,\lambda,q) = e^{ixz} + \int_x^\infty K(x,t,q)e^{itz}\ \mathrm{d}t, \tag{7.6.2}$$

ahol (lásd (1.4.24)-et)

$$\int_x^\infty |K(x,t,q) - K(x,t,q^*)|\ \mathrm{d}t \leq c(D)||q-q^*||. \tag{7.6.3}$$

Ebből a tétel állítása következik. □

**7.6.2. Tétel.** *Ha $q \in L^1(0,\infty)$, akkor*

$$\frac{\partial y}{\partial q}(x) = y(t)[y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)]\chi_{(0,x)}(t), \tag{7.6.4}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial q}(x) = y(t)[y_1(t)y_2'(x) - y_2(t)y_1'(x)]\chi_{(0,x)}(t). \tag{7.6.5}$$

A bizonyítás szinte szóról szóra ugyanaz, mint véges esetben a 7.1.1. tételé.

**7.6.3. Lemma.** *Legyen $\|(1+x)q(x)\|_1 \leq D$. Ekkor*

$$\sup_{\lambda<0} \int_0^\infty y^2(x,\lambda,q)\ \mathrm{d}x < \frac{c(D)}{|z|}, \tag{7.6.6}$$

$$\inf_{\lambda<0} \int_0^\infty y^2(x,\lambda,q)\ \mathrm{d}x > \frac{\epsilon(D)}{|z|}, \tag{7.6.7}$$

*valamilyen q-tól független $c(D)$ és $\epsilon(D) > 0$ számmal.*

*Bizonyítás.* Induljunk ki a (6.3.20) egyenlőségből. Mivel az $A_q{:}L^\infty \to L^\infty$ operátor mindkét irányba folytonos,

$$\int_0^\infty 1\cdot y^2(x,\lambda)\ \mathrm{d}x \le \|A_q\| \int_0^\infty |e^{2ixz}|\ \mathrm{d}x, \tag{7.6.8}$$

és

$$\int_0^\infty 1\cdot e^{2ixz}\ \mathrm{d}x \le \|A_q^{-1}\| \int_0^\infty |y^2(x,\lambda)|\ \mathrm{d}x, \tag{7.6.9}$$

ami bizonyítja a lemma állítását. □

**7.6.4. Lemma.** *Legyen* $\|q\| \le D$, $\Im\sqrt{\lambda} > 0$, $\lambda \in \sigma(m,q)$. *Akkor*

$$|\frac{\partial}{\partial z} y(x,\lambda)| \le \frac{c(D)}{\Im z} \tag{7.6.10}$$

*és*

$$|\frac{\partial}{\partial z} y'(x,\lambda)| \le c(D)\frac{1+|z|}{\Im z}. \tag{7.6.11}$$

*Ha még* $\|(1+x^2)q(x)\|_1 \le D$ *is teljesül, akkor*

$$|\frac{\partial}{\partial z} y(x,\lambda)| \le c(D)(1+x). \tag{7.6.12}$$

*Bizonyítás.*

$$|\frac{\partial}{\partial z} y(x,\lambda)| = |ixe^{ixz} + \int_x^\infty K(x,t)e^{itz} it\ \mathrm{d}t| \le \frac{c(D)}{|z|}\sup_{x>0}|ixze^{ixz}| \le \frac{c(D)}{\Im z}. \tag{7.6.13}$$

$$\begin{aligned} |\frac{\partial}{\partial z} y'(x,\lambda)| \le & |-xze^{ixz}| + |ixK(x,x)e^{ixz} + \int_x^\infty K_x(x,t)e^{itz} it\ \mathrm{d}t| \\ \le & (1+\frac{c(D)}{|z|})\sup_{x>0}|ixze^{ixz}| \le c(D)\frac{1+|z|}{\Im z}. \end{aligned} \tag{7.6.14}$$

Ha pedig $\|(1+x^2)q(x)\|_1 \le D$, akkor $|\int_x^\infty K(x,t)e^{itz} it\ \mathrm{d}t| \le c(D)$, tehát a harmadik állítás is következik. □

**7.6.5. Következmény.** *Legyen* $(1+x^2)q(x) \in L_1(0,\infty)$, $\Im\sqrt{\lambda} > 0$, *és tegyük fel, hogy* $\Re z \Re z^* \ge 0$. *(Ez mindig teljesül, ha* $\lambda$ *és* $\lambda^*$ *ugyanahhoz a spektrumhoz tartoznak.) Akkor*

$$|y(x,\lambda) - y(x,\lambda^*)| \le \frac{c(D)}{|z|}(1+x)|\lambda - \lambda^*|. \tag{7.6.15}$$

*Bizonyítás.* Az előző lemmából éppen ez következik $|z|$ helyett $|z+z^*|$-kel. De $|\Re(z+z^*)| \geq |\Re z|$ és $\Im(z+z^*) \geq \Im z$ miatt az állítás $|z|$-kel még inkább igaz. □

**7.6.6. Lemma.** *Legyen* $(1+x)q(x) \in L_1(0,\infty)$, $\Im\sqrt{\lambda} > 0$, $\lambda \in \sigma(m,q)$. *Akkor*

$$-\int_0^\infty y^2(x,\lambda)\ \mathrm{d}x = \dot{y}(0,\lambda)y'(0,\lambda) - \dot{y}'(0,\lambda)y(0,\lambda). \tag{7.6.16}$$

*Bizonyítás.* Ugyanúgy, mint a 7.1.3 lemmában,

$$y''_\alpha \dot{y}_\alpha - \dot{y}''_\alpha y_\alpha = y^2_\alpha. \tag{7.6.17}$$

Így

$$-\int_0^\infty y^2(x,\lambda)\ \mathrm{d}x = -\ W[\dot{y},y]|_0^\infty = \dot{y}(0,\lambda)y'(0,\lambda) - \dot{y}'(0,\lambda)y(0,\lambda), \tag{7.6.18}$$

ha belátjuk, hogy $\lim_{x\to\infty} W[\dot{y},y] = 0$. A 7.6.4. lemma alapján azonban

$$\lim_{x\to\infty} \dot{y}(0,\lambda)y'(0,\lambda) = \lim_{x\to\infty} \dot{y}'(0,\lambda)y(x,\lambda) = 0. \tag{7.6.19}$$

□

**7.6.7. Állítás.** *Legyen* $q \in L_1(0,\infty)$, $\lambda < 0$, $\lambda_n = \lambda_n(q) \in \sigma(m,q)$. *Ekkor* $\lambda_n$ *analitikus függvénye* $q$*-nak, és*

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial q} = g_n^2(t), \tag{7.6.20}$$

*ahol* $g_n$ *a* $\lambda_n$*-hez tartozó* ($L^2$*-ben*) *normált sajátfüggvény.*

*Bizonyítás.* Ugyanúgy, mint a véges esetben a sajátértékek deriválásáról szóló 7.1.4 állításban, teljesülnek az implicit függvény tétel feltételei, mert $|z\int_0^\infty y^2|$ alulról és felülről is korlátos, továbbá

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial q} = \frac{\frac{\partial}{\partial q}y'y - \frac{\partial}{\partial q}yy'}{-\int_0^\infty y^2}. \tag{7.6.21}$$

Ezúttal a 7.6.2. tétel eredményét felhasználva

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial q} = \frac{y(t)[y(0)y_1(t) + y_2(t)y'(0)]}{\int_0^\infty y^2} = g^2(t,\lambda_n,q). \tag{7.6.22}$$

□

**7.6.8. Tétel.** *Legyen* $z^2 \in \sigma(m)$, *és tegyük fel, hogy a* $p$ *és* $q$ *potenciál olyan közel van egymáshoz, hogy a differenciálható* $z = z(q)$ *implicit függvény a* $p,q$ *szakaszon értelmes. Ekkor* $||p||, ||q|| \leq D$ *esetén*

$$|z(p) - z(q)| < c(D)||p-q||_1. \tag{7.6.23}$$

*Bizonyítás.*

$$|\int_0^\infty g^2(x,\lambda,q+t(p-q))(p-q)\ \mathrm{d}x| \leq \tag{7.6.24}$$

$$\leq \frac{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}{\epsilon(D)}\|y^2(x,\lambda,q+t(p-q))\|_\infty ||p-q||_1 \tag{7.6.25}$$

$$\leq \frac{c(D)}{\epsilon(D)}|\lambda|^{\frac{1}{2}}||p-q||_1, \tag{7.6.26}$$

azaz

$$\frac{\partial z}{\partial q}(p-q) \leq \frac{c(D)}{\epsilon(D)}||p-q||_1, \tag{7.6.27}$$

amiből a tétel állítása már következik. □

## 7.7. A stabilitás kérdése a félegyenesen

Ebben a szakaszban összegezzük a félegyenessel kapcsolatos eredményeinket. Hasonló becsléseket bizonyítunk, mint a véges intervallum esetén, ám ezek minőségileg eltérő következtetésekre vezetnek. Egyelőre csak sejtük, hogy az inverz sajátértékproblémát a fix energiájú inverz szórás feladatba kell transzformálni ahhoz, hogy relváns eredményekhez jussunk [36].

Legyen $B$ egy olyan normált tér, hogy az $A_{q^*}$ operátorok $B \to B$ izomorfizmusok; jelölje $l$ a $\mathbb{C}$ értékű végtelen sorozatok terét egy $\|\cdot\|_l$ normával ellátva. Tekintsük a

$$h \mapsto (\langle h, e^{2ixz_n}\rangle) \qquad (n \geq 1) \tag{7.7.1}$$

$B \to l$ leképezést.

**7.7.1. Tétel** (Horváth-Kiss)**.** *Legyen $\|(1+x^2)q(x)\|_1, \|(1+x^2)q^*(x)\|_1 \leq D$, $q \in$ $\in B$, $q^* \in B$, és valamilyen adott $m_n$ valós számokkal $0 > \lambda_n \in \sigma(m_n, q)$, $0 >$ $> \lambda_n^* \in \sigma(m_n, q^*)$. Ha a (7.7.1) leképezés invertálható, és az inverz normája $C$, akkor*

$$\|q^* - q\|_B \leq c(D)C\left\|\frac{\lambda_n - \lambda_n^*}{z_n}\right\|_l. \tag{7.7.2}$$

*Ha az inverz nem korlátos, és még az is teljesül, hogy a rögzített $q$ potenciál mellett az $\{A_{q^*}(q^*-q) : q^* \in B\}$ halmaz tartalmaz gömböt $B$-ben, akkor minden $U > 0$, $M > 0$ számhoz van olyan $q^*$ potenciál, amelyre $\|q - q^*\|_B \leq U$ és*

$$\|q - q^*\|_B > M\left\|\frac{\lambda_n - \lambda_n^*}{z_n}\right\|_l. \tag{7.7.3}$$

A véges esethez hasonlóan szükségünk lesz az alábbi becslésre:

**7.7.2. Lemma.** *$\|(1+x^2)q(x)\|_1, \|(1+x^2)q^*\|_1 \le D$ esetén*

$$|\int_0^\pi (q^*(x)-q(x))y(x,\lambda_n)y^*(x,\lambda_n)\ \mathrm{d}x| \le \frac{c(D)}{|z_n|}|\lambda_n-\lambda_n^*|, \tag{7.7.4}$$

*míg elegendően kis $U = \|(1+x^2)(q(x)-q^*(x)\|_1$ esetén*

$$|\int_0^\pi (q^*(x)-q(x))y(x,\lambda_n)y^*(x,\lambda_n)\ \mathrm{d}x| \ge \frac{c(D,U)}{|z_n|}|\lambda_n-\lambda_n^*|. \tag{7.7.5}$$

*Bizonyítás.*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty &(q^*(x)-q(x))y(x,\lambda_n)y^*(x,\lambda_n)\ \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^\infty (q^*(x)-q(x))y(x,\lambda_n)[y^*(x,\lambda_n)-y^*(x,\lambda_n^*)]\ \mathrm{d}x+ \\ &\quad +(\lambda_n-\lambda_n^*)\int_0^\infty y(x,\lambda_n)[y^*(x,\lambda_n^*)-y^*(x,\lambda_n)]\ \mathrm{d}x+ \\ &\quad +(\lambda_n-\lambda_n^*)\int_0^\infty y(x,\lambda_n)[y^*(x,\lambda_n)-y(x,\lambda_n)]\ \mathrm{d}x+ \\ &\quad +(\lambda_n-\lambda_n^*)\int_0^\infty y^2(x,\lambda_n)\ \mathrm{d}x = I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned}$$

Itt a 7.6.5. következmény és $|y(x,\lambda)|$ korlátossága miatt

$$|I_1| \le \frac{c(D)}{|z_n|}|\lambda_n-\lambda_n^*|\|q^*(x)-q(x)\|. \tag{7.7.6}$$

$|y(x,\lambda)| \le c(D)e^{ixz}$ miatt

$$|I_2| \le \frac{c(D)}{|z_n|}|\lambda_n-\lambda_n^*|, \tag{7.7.7}$$

és ha $q^*$ elég közel van $q$-hoz, akkor a 7.6.4. lemma és a 7.6.8. tétel szerint

$$|I_2| \le \frac{c(D)}{|z_n|}|z_n-z_n^*||\lambda_n-\lambda_n^*| \le \frac{c(D)}{|z_n|}|\lambda_n-\lambda_n^*|\|q^*(x)-q(x)\|_1. \tag{7.7.8}$$

A 7.6.1. tétel szerint

$$|I_3| \le \frac{c(D)}{|z_n|}|\lambda_n-\lambda_n^*|\|q^*(x)-q(x)\|. \tag{7.7.9}$$

Végül a 7.6.3. lemma szerint

$$\frac{c(D)}{|z_n|}|\lambda_n-\lambda_n^*| \le |I_4| \le \frac{c(D)}{|z_n|}|\lambda_n-\lambda_n^*|, \tag{7.7.10}$$

amiből a lemmában megfogalmazott becslés következik. □

**A 7.7.1. tétel bizonyítása.**

$$\int_0^\infty A_{q^*}\left(q^*(x)-q(x)\right)e^{2ixz_n}\,\mathrm{d}x = \\ = \int_0^\infty (q^*(x)-q(x))y(x,\lambda_n)y^*(x,\lambda_n)\,\mathrm{d}x. \tag{7.7.11}$$

Ha a (7.7.1) leképezés inverze folytonos, akkor

$$\begin{aligned}\|q-q^*\|_B \le & c(D)\|A_{q^*}(q^*(x)-q(x))\|_B \le \\ \le & c(D)C\left\|\int_0^\infty A_{q^*}\left(q^*(x)-q(x)\right)e^{2ixz_n}\,\mathrm{d}x\right\|_l \le \\ \le & c(D)C\left\|\frac{\lambda_n-\lambda_n^*}{z_n}\right\|_l.\end{aligned} \tag{7.7.12}$$

Ha azonban a (7.7.1) leképezés inverze folytonos, tetszőlegesen nagy adott $M$-hez válasszunk $0\neq h\in B$-t úgy, hogy

$$\|h\|_B \ge M\left\|\int_0^\infty h(x)e^{2ixz_n}\,\mathrm{d}x\right\|_l \tag{7.7.13}$$

teljesüljön. Ez megtehető, ha $A_{q^*}(q^*-q)$ tartalmaz gömböt $B$-ben. Sőt, bármilyen kis $\gamma$-ra létezik olyan $q^*$, hogy

$$\int_0^\infty A_{q^*}\left(q^*(x)-q(x)\right)\,\mathrm{d}x = \gamma h(x). \tag{7.7.14}$$

Válasszuk $\gamma$-t olyan kicsire, hogy megfelelő $U$-val $\|(1+x^2)(q(x)-q^*(x))\|_1\le U$ is biztosan teljesüljön (például legyen $\gamma\le\frac{U}{\|A_{q^*}^{-1}\|\|(1+x^2)h(x)\|_1}$). Ekkor

$$\begin{aligned}\|q-q^*\|_B \ge & c(D)\|A_{q^*}\left(q^*(\pi-x)-q(\pi-x)\right)\|_B \ge \\ \ge & c(D)M\left\|\int_0^\infty A_{q^*}\left(q^*(x)-q(x)\right)e^{2ixz_n}\,\mathrm{d}x\right\|_l \ge \\ \ge & c(D,U)M\left\|\frac{\lambda_n-\lambda_n^*}{z_n}\right\|_l.\end{aligned} \tag{7.7.15}$$

□

# A függelék

# Dirac operátorok

## A.1. Dirac egyenletek

Tekintsük az alábbi elsőrendű rendszert:

$$-y_2' + q_1(x)y_1 = \lambda y_1, \tag{A.1.1}$$

$$y_1' + q_2(x)y_2 = \lambda y_2, \tag{A.1.2}$$

a

$$y_1(0)\cos\alpha - y_2(0)\sin\alpha = 0 \tag{A.1.3}$$

kezdeti feltételekkel, $\alpha \in [0,\pi)$ adott, $\lambda \in \mathbb{C}$, $q \in L^1[0,\pi]$. Később általában azt is feltesszük, hogy $q$ valós értékű, de erre egyelőre nincs szükségünk. A lineáris differenciálegyenletekről szóló általános tételek szerint (lásd pl. [14], Chapter 3.), (A.1.1)-(A.1.3) megoldása létezik és egyértelmű.

A $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix bevezetésével az (A.1.1)-(A.1.2) rendszer mátrixalakban is felírható:

$$Jy' + Q(x)y = \lambda y, \tag{A.1.4}$$

ahol $Q(x) = \begin{bmatrix} q_1(x) & 0 \\ 0 & q_2(x) \end{bmatrix}$.

**Megjegyzés.** Néha a Dirac egyenletben $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. A Dirac egyenletnek ezen kívül számos további felírása van (lásd [60]).

**Megjegyzés.** A Dirac egyenlet egy relativisztikus elektront ír le. Gyakran $q_1(x) = q(x) + m$, $q_2(x) = q(x) - m$, ahol $m > 0$ a részecske tömege.

**Megjegyzés.** Az 1.1. részben tekintett (1.1.1) Schrödinger egyenletet is átírhatjuk elsőrendű rendszerré az $y_1 = y$, $y_2 = y'$ helyettesítésekkel:

$$-y_2' + q(x)y_1 = \lambda y_1, \tag{A.1.5}$$

$$y_1' - y_2 = 0. \tag{A.1.6}$$

Ez a felírás mutatja, hogy a Schrödinger egyenletre bizonyított állítások egy része – ha nem is mindig változatlanul – átfogalmazható a Dirac egyenletre.

## A.2. Polárkoordináták

Legyen $y(x,\lambda)$ (A.1.4) tetszőleges megoldása. Vezessük be az alábbi változókat:

$$y_1(x,\lambda) = r(x,\lambda)\sin\varphi(x,\lambda), \tag{A.2.1}$$

$$y_2(x,\lambda) = r(x,\lambda)\cos\varphi(x,\lambda), \tag{A.2.2}$$

ahol $r(x,\lambda) > 0$. Új változóinkra a következő egyenlőségek teljesülnek:

$$\varphi' = -\lambda + q_2\cos^2\varphi + q_1\sin^2\varphi = -\lambda + \frac{q_2+q_1}{2} + \frac{q_2-q_1}{2}\cos 2\varphi, \tag{A.2.3}$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{q_2-q_1}{2}\sin 2\varphi. \tag{A.2.4}$$

**Megjegyzés.** Ez a transzformáció nemdiagonális $Q$ mátrix esetén is elvégezhető.

**Megjegyzés.** $q$ folytonossági pontjaiban ezek a formulák a klasszikus értelemben teljesülnek, míg a többi pontban általánosított (disztribúciós) értelemben.

**Megjegyzés.** A Schrödinger esettől eltérően most nincs értelme módosított Prüfer-változókat használni, hiszen $y_1(x,z)$ és $y_2(x,z)$ nagyságrendje megegyezik.

**Megjegyzés.** Később $2n\times 2n$-es mátrix potenciálok esetére is levezetünk hasonló formulát.

## A.3. A véges intervallumon értelmezett Dirac operátor spektruma

Tekintsük az (A.1.1)-(A.1.2) egydimenziós Dirac egyenletet az

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0, \tag{A.3.1}$$

$$y_1(\pi)\cos\beta + y_2(\pi)\sin\beta = 0 \tag{A.3.2}$$

peremfeltételekkel, ahol $\alpha$, $\beta$ adott valós számok. Ha valamilyen $\lambda$ komplex (vagy, mint látni fogjuk, valós) számra az (A.1.1)-(A.1.2)-(A.3.1)-(A.3.2) problémának van nemtriviális megoldása, akkor $\lambda$ sajátérték, a megoldással, mint hozzá tartozó sajátfüggvénnyel.

**A.3.1. Tétel.** *Az (A.1.1)-(A.1.2)-(A.3.1)-(A.3.2) sajátértékproblémának megszámlálhatóan végtelen sok sajátértéke létezik,* $\dots < \lambda_{-n} < \dots < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < < \dots < \lambda_n < \dots$, $\lambda_{\pm n} \to \pm\infty$. *A sajátfüggvények teljes ortogonális rendszert alkotnak* $L^2([0,\pi],\mathbb{R}^2)$*-ben.*

**Megjegyzés.** A sajátfüggvények többféleképpen számozhatók, de $\lambda_0$ megadása után a számozás már egyértelmű.

**Bizonyítás.** Mivel a sajátfüggvények ortogonálisak egymásra, minden sajátérték valós, így a továbbiakban tegyük fel, hogy $\lambda$ valós. Feltehető, hogy $0 \leq \alpha, \beta \leq \leq \pi$. (A.1.1), (A.1.2) és (A.3.1) megoldása minden $\lambda$-ra egyértelmű, legyen ez a megoldás $y(x, \lambda)$, és alkalmazzuk a polárkoordinátákban való felírást. (A.2.3) szerint

$$\varphi' = -\lambda + \frac{q_2 + q_1}{2} + \frac{q_2 - q_1}{2} \cos 2\varphi, \tag{A.3.3}$$

míg a (A.3.1) kezdeti feltételből

$$\varphi(0, \lambda) = \alpha. \tag{A.3.4}$$

Mivel $-\lambda + \min(q_1, q_2) \leq \varphi' \leq -\lambda + \max(q_1, q_2)$, ezért, ha $|\lambda| \to \infty$ és $x > 0$, a Riemann-lemma miatt $\varphi(x, \lambda) = -\lambda x - \int_0^x \frac{q_2+q_1}{2} + o(1)$. $\lambda$ pontosan akkor sajátérték, ha $\varphi(\pi, \lambda) \equiv \beta$ moduló $\pi$. De az 1.6.1. összehasonlító tétel miatt $\varphi(\pi, \lambda)$ monoton csökken $\lambda$-ban. Tehát létezik a sajátértékek mindkét irányban végtelen sorozata, sőt, ha $\varphi(x, \lambda_n) = \beta - n\pi$, akkor

$$\lambda_n = n + \int_0^x \frac{q_2 + q_1}{2\pi} + o(1). \tag{A.3.5}$$

A sajátfüggvényrendszer teljességét illetően a Green függvényről szóló részre hivatkozunk (A.4.6. következmény). □

## A.4. Green függvény, $m$-függvény és spektrálfüggvény

**A.4.1. Definíció.** *Tekintsük az (A.1.1)-(A.1.2) Dirac egyenletet két tetszőleges u,v megoldását! A*

$$W(\lambda) = W(u, v, \lambda) = \det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \tag{A.4.1}$$

*mennyiséget az (A.1.1)-(A.1.2) rendszer Wronsky determinánsának nevezzük.*

Az $x$-től való függést nem jelöltük, mert, akárcsak a Schrödinger esetben,

**A.4.2. Állítás.** *A Wronsky determináns $x$-ben állandó.*

**A.4.3. Állítás.** *[47] Jelölje az (A.1.4)-(A.3.1)-(A.3.2) sajátértékprobléma $n$. sajátértékét $\lambda_n$, a hozzá tartozó normált sajátfüggvényt $g_n$. Akkor a Green függvény (Green mátrix) a következőképpen állítható elő:*

$$G(x, t, \lambda) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{g_n(x) g_n^T(t)}{\lambda_n - \lambda}, \quad \lambda \neq \lambda_n. \tag{A.4.2}$$

*A sor minden $0 \le x, t \le \pi$-re konvergens, $x \ne t$-re lokálisan egyenletesen. Legyen u és v (A.1.1)-(A.1.2) egy-egy megoldása, u az (A.3.1), v az (A.3.2) feltételek mellett. $x \ne t$-re (A.1.1)-(A.1.2) Green függvénye a*

$$G(x,t,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{W(\lambda)} u(x,\lambda) v^T(t,\lambda), & x < t \\ \frac{1}{W(\lambda)} u(t,\lambda) v^T(x,\lambda), & x > t \end{cases} \tag{A.4.3}$$

*alakban is előáll. A Green függvényt az (A.1.1)-(A.1.2)-(A.3.1)-(A.3.2) probléma sajátértékeiben ($u = c \cdot v$ esetén) nem értelmezzük.*

**A.4.4. Állítás.** *Legyen $f \in L^2([0,\pi], \mathbb{R}^2)$. Ha $y(x,\lambda) = \int_0^\pi G(x,t,\lambda) f(t)\,\mathrm{d}t$, akkor*

$$Jy'(x,\lambda) + Q(x)y(x,\lambda) = \lambda y(x,\lambda) + f(x). \tag{A.4.4}$$

Legyen $L$ az (A.1.4)-(A.3.1)-(A.3.2) sajátértékprobléma lineáris operátora, azaz legyen

$$Ly = Jy' + Q(x)y, \tag{A.4.5}$$

$$DomL = \{ y \in L^2([0,\pi], \mathbb{R}^2) | y_1, y_2 \in AC(0,\pi), \\ y_1(0)\cos\alpha - y_2(0)\sin\alpha = 0, y_1(\pi)\cos\beta - y_2(\pi)\sin\beta = 0 \}.$$

Legyen továbbá $G : f(t) \mapsto \int_0^\pi G(x,t,\lambda) f(t)\,\mathrm{d}t$, $L^2 \to L^2$ folytonos lineáris. Az előző állításokat az $L$ és a $G$ operátorok segítségével a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

**A.4.5. Állítás.** *Ha $\lambda$ nem sajátérték, akkor*

$$(L - \lambda I)Gf = f, \qquad f \in L^2([0,\pi], \mathbb{R}^2), \tag{A.4.6}$$

$$G(L - \lambda I)y = y, \qquad y \in Dom\, L. \tag{A.4.7}$$

A 1.9.6. definíció értelmében tehát $-G$ az $L$ operátor rezolvense.

**A.4.6. Következmény.** *Az (A.1.4)-(A.3.1)-(A.3.2) sajátértékprobléma $y_n$ sajátfüggvényei teljes ortonormált rendszert alkotnak az $L^2([0,\pi], \mathbb{R}^2)$ térben.*

*Bizonyítás.* Ha $f \in L^2([0,\pi], \mathbb{R}^2)$ az összes sajátfüggvényre merőleges, akkor az előző elő állítás és az (A.4.6) egyenlőség miatt $f = 0$. ☐

**A.4.7. Definíció.** *Jelölje $u(x,\lambda)$ (A.1.1)-(A.1.2) $u_1(0,\lambda) = \sin\alpha$, $u_2(0,\lambda) = \cos\alpha$ kezdeti értékekből induló megoldását. A $\varrho(\lambda)$ spektrálfüggvény egy jobbról folytonos lépcsős függvény, ami az (A.1.4)-(A.3.1)-(A.3.2) sajátértékprobléma sajátértékeiben ugrik $\frac{1}{||u(x,\lambda)||_2^2}$-t, továbbá $\varrho(0) = 0$.*

Látható, hogy a spektrálfüggvény függ a definícióban önkényesen megválasztott kezdeti feltételekből induló megoldástól. Segítségével átfogalmazhatjuk a Green függvény első előállítását:

**A.4.8. Tétel.**

$$G(x,t,\lambda) = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x,\lambda)u^T(t,\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \, \mathrm{d}\varrho(\lambda). \tag{A.4.8}$$

**A.4.9. Állítás** (Spektrálfüggvény tulajdonságai)**.** *$f \in L^2([0,\pi],\mathbb{R}^2)$-re létezik*

$$F(\lambda) = \int_0^\pi f(x) y^T(x,\lambda) \, \mathrm{d}x, \tag{A.4.9}$$

*és*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(\lambda) y(x,\lambda) \, \mathrm{d}\varrho(\lambda). \tag{A.4.10}$$

**A.4.10. Definíció.** *Jelölje $v(x,\lambda)$ az (A.1.1)-(A.1.2) rendszer $v_1(\pi,\lambda) = \sin\beta$, $v_2(\pi,\lambda) = \cos\beta$ végpontbeli feltételeket kielégítő megoldását. Akkor az*

$$m_\beta(\lambda) = \frac{v_2(0,\lambda)}{v_1(0,\lambda)} \tag{A.4.11}$$

*függvényt az (A.1.4)-(A.3.1)-(A.3.2) sajátértékprobléma $m$-függvényének nevezzük.*

**A.4.11. Állítás** ($m$-függvény tulajdonságai)**.** *Az $m$-függvény meromorf, gyökei és pólusai valósak, egyszeresek, továbbá*

**(a)** $\Im\lambda > 0$*-ra* $\Im m(\lambda) > 0$,

**(b)** $\lambda \in \sigma(\alpha,\beta) \Longleftrightarrow m(\lambda) = \cot\alpha$.

**A.4.12. Tétel.** *[30] Legyen $m_{\alpha,\beta} = \frac{m\cos\alpha - \sin\alpha}{m\sin\alpha + \cos\alpha}$. Az (A.1.4)-(A.3.1)-(A.3.2) sajátértékprobléma $m$-függvénye és spektrálfüggvénye között a következő összefüggés áll fenn:*

$$m_{\alpha,\beta}(z) = p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} \, \mathrm{d}\varrho(\lambda), \tag{A.4.12}$$

*valamint $\varrho$ folytonossági pontjaiban*

$$\varrho(\mu) - \varrho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_\lambda^\mu \Im m_{\alpha,\beta}(z + i\epsilon) \, \mathrm{d}z. \tag{A.4.13}$$

# Irodalomjegyzék

[1] V. Ambarzumian, *Über eine Frage der Eigenwerttheorie*, Zeitschrift für Physik **53** (1929), 690–695.

[2] M. Ashbaugh and R. Benguria, *Optimal lower bound for the gap between the first two eigenvalues of one-dimensional Schrödinger operators with symmetric single-well potentials*, Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1987), 419–424.

[3] ______, *Optimal bounds for ratios of eigenvalues of one-dimensional Schrödinger operators with Dirichlet boundary conditions and positive potentials*, Commun. Math. Phys. **124** (1989), 403–415.

[4] ______, *Eigenvalue ratios for Sturm-Liouville operators*, J. Diff. Eqns. **103** (1993), 205–219.

[5] S. A. Avdonin, *On the question of Riesz bases of exponential functions in $L^2$ (in Russian)*, Vestnik Leningrad. Univ. Ser. Mat. **13** (1974), 5–12.

[6] D. Azagra and J. Ferrera, *Every closed convex set is the set of minimizers of some $C^\infty$-smooth convex function*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 3687–3692.

[7] F. A. Berezin and M. A. Shubin, *The Schrödinger equation*, Kluwer, Dordrecht, 1991.

[8] G. Borg, *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe*, Acta Math. **78** (1946), 1–96.

[9] ______, *Uniqueness theorems in the spectral theory of $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$*, Proc. 11th Scandinavian Congress of Mathematicians (Oslo), Johan Grundt Tanums Forlag, 1952, pp. 276–287.

[10] Chung-Chuan Chen, *Optimal lower estimates for eigenvalue ratios of Schrödinger operators and vibrating strings*, electronically published **e-Thesys** (2002).

[11] H-H. Chern, C. K. Law, and H-J. Wang, *Extension of Ambarzumyan's Theorem to General Boundary Conditions*, J. Math. Anal. and Appl. **263** (2001), 333–342.

[12] H-H. Chern and C-L. Shen, *On the $n$-dimensional Ambarzumyan's theorem*, Inverse Problems **13** (1997), 15–18.

[13] S. Clark and F. Gesztesy, *Weyl-Titchmarsh $M$-function asymptotic, local uniqueness results, trace formulas and Borg-type theorems for Dirac-operators*, Trans. Amer. Math. Soc **354** (2002), 3475–3534.

[14] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1955.

[15] J. M. Combes, P. Duclos, and R. Seiler, *Krein's formula and one-dimensional multiple-well*, J. Funct. Anal **52** (1983), 257–301.

[16] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon, *Schrödinger Operators, with Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.

[17] P. L. Duren, *The theory of $H^p$ spaces*, Academic Press, New York, 1970.

[18] Simon L. és E. A. Baderko, *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[19] W. N. Everitt, M. Marletta, and A. Zettl, *Inequalities and eigenvalues of Sturm-Liouville problems near a singular boundary*, J. Inequalities and Applications **6** (2001), 405–413.

[20] I. M. Gelfand and B. M. Levitan, *On the determination of a differential operator from its spectral function*, Trans. Amer. Math. Soc. **1** (1951), 253–304.

[21] F. Gesztesy, R. del Rio, and B. Simon, *Inverse spectral analysis with partial information on the potential, III. Updating boundary conditions*, Intl. Math. Research Notices **15** (1997), 751–758.

[22] F. Gesztesy and B. Simon, *On the determination of the potential from three spectra*, Trans. Amer. Math. Soc. **189(2)** (1999), 85–92.

[23] ———, *A new approach to inverse spectral theory II. General real potentials and the connection to the spectral measure*, Ann. of Math. **152** (2000), no. 2, 593–643.

[24] ———, *Inverse spectral analysis with partial information on the potential, II. The case of discrete spectrum*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 2765–2787.

[25] ———, *On local Borg-Marchenko uniqueness results*, Commun. Math. Phys. **211** (2000), 273–287.

[26] O. H. Hald, *The inverse Sturm-Liouville problem and the Rayleigh-Ritz method*, Math. Comp. **32** (1978), no. 143, 687–705.

[27] H. Holden and A. Jensen, *Schrödinger Operators, with Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry*, vol. 345, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.

[28] M. Horváth, *Eigenfunction expansions for one-dimensional Dirac operators*, Acta Sci. Math. Szeged **61** (1995), 225–240.

[29] ______, *On a theorem of Ambarzumian*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **131A** (2001), 899–907.

[30] ______, *On the inverse spectral theory of Schrödinger and Dirac operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 10, 4155–4171.

[31] ______, *On the first two eigenvalues of Sturm-Liouville operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2002), 1215–1224.

[32] ______, *Inverse spectral problems and closed exponential systems*, Ann. of Math. **162** (2005), no. 2, 885–918.

[33] ______, *Inverse scattering with fixed energy and an inverse eigenvalue problem on the half-line* , Trans. Amer. Math. Soc. (in press).

[34] M. Horváth and M. Kiss, *A bound for ratios of eigenvalues of Schrödinger operators on the real line*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **suppl.** (2005), 403–409.

[35] ______, *A bound for ratios of eigenvalues of Schrödinger operators with single-well potentials*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 1425–1434.

[36] ______, *On the stability of inverse scattering*, manuscript (2007).

[37] ______, *Stability of an inverse eigenvalue problem for Schrödinger operators*, preprint (2007).

[38] S. V. Hruscev, N. K. Nikolskii, and B. S. Pavlov, *Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels*, Lecture Notes in Math., vol. 864, Springer, 214-335, 1981.

[39] M. J. Huang, *On the eigenvalue ratios for vibrating strings*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1805–1813.

[40] Y. L. Huang and C. K. Law, *Eigenvalue ratios for the regular Sturm-Liouville system*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1996), 1427–1436.

[41] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.

[42] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1996.

[43] M. Kiss, *An $n$-dimensional Ambarzumian type theorem for Dirac operators*, Inverse Problems **20** (2004), 1593–1597.

[44] ______, *Eigenvalue ratios of vibrating strings*, Acta. Math. Hungar. **110** (2006), no. 3, 243–249.

[45] N. Levinson, *Gap and density theorems*, vol. XXVI, AMS Coll. Publ., New York, 1940.

[46] B. M. Levitan, *Inverse Sturm-Liouville problems*, V.N.U. Science Press, Utrecht, 1987.

[47] B. M. Levitan and I. S. Sargsjan, *Introduction to spectral theory (in Russian)*, Nauka, Moscow, 1970.

[48] ______, *Sturm-Liouville and Dirac operators (in Russian)*, Nauka, Moscow, 1988.

[49] M. M. Malamud, *Borg-type theorems for first-order systems on a finite interval*, Funct. Anal. Appl. **33** (1999), 64–68.

[50] ______, *Uniqueness questions in inverse problems for systems of ordinary differential equations on a finite interval*, Trans. Moscow Math. Soc. **60** (1999), 173–224.

[51] V. A. Marchenko, *Certain problems in the theory of second order differential operators (in Russian)*, Dekl. Akad. Nauk. SSSR **72** (1950), 457–460.

[52] ______, *Sturm-Liouville operators and their applications (in Russian)*, Naoukova Dumka, Kiev, 1977.

[53] ______, *Sturm-Liouville Operators and Applications*, Naoukova Dumka, Basel, 1986.

[54] M. Marletta and R. Weikard, *Weak stability for an inverse Sturm-Liouville problem with finite spectral data and complex potential*, Inverse Problems **21** (2005), 1275–1290.

[55] L. Gy. Pál, *Ortogonális függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.

[56] J. Pöschel and E. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*, Academic Press, Boston et al., 1987.

[57] M. Reed and B. Simon, *Analysis of Operators*, vol. 4, Academic Press, New York, 1978.

[58] B. Simon, *Schrödinger operators in the twentieth century*, J. Math. Phys. **41** (2000), 3523–3555.

[59] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1971.

[60] B. Thaller, *The Dirac equation*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992.

[61] Anna Tóth, *A rezgő húr sajátértékeiről*, TDK-dolgozat (2001).

[62] B. A. Watson, *Inverse spectral problems for weighted Dirac systems*, Inverse Problems **15(3)** (1999), 793–805.

[63] H. Weyl, *Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen*, Math. Ann. (1910).

[64] R. M. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series* , Academic Press, New York, 1980.

[65] V. A. Yurko, *Inverse Spectral Problems of Differential Operators and Their Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Germany, Japan, Russia, 2000.

[66] A. Zettl, *Sturm-Liouville Theory*, vol. 121, American Mathematical Society, 2005.